Universidad Carlos III de Madrid

Escuela Politécnica Superior

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Primer Curso de Grado en Ingeniería Telemática. Álgebra lineal

CONTROL 2. MODELO A 18 de noviembre de 2008.

Problema 1 Decide si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas justificando adecuadamente tu respuestas:

(a) Si A es una matriz 4×3, entonces $\mathrm{Col}(A)$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

(b) Si $T(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0}$ entonces T es una transformación lineal.

(c) Si $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, entonces $\mathrm{Ker}(T)$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.

(d) Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una aplicación lineal inyectiva. Dados los vectores $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, entonces no hay inconveniente en que sus imágenes sean $T\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $T\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(e) El plano $2x - y + x - 1 = 0$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

`[1+1+1+1+1=5 puntos]`

Problema 2 Dadas las siguientes aplicaciones lineales

$$T_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+6y \\ y-2 \end{pmatrix}, \qquad T_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+2y \\ -x \\ x-y \end{pmatrix}, \qquad T_3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + y^2. \tag{1}$$

(a) Estudia cuáles de ellas son transformaciones lineales.

(b) Para las transformaciones dadas en (1) que sean lineales calcular la dimensión del núcleo y la imagen.

(c) Para las transformaciones dadas en (1) que sean lineales encontrar la matriz de la aplicación $M(T_i, \overleftarrow{B_i, B})$ siendo $B = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$ la base de $\mathbb{R}^2$ en el espacio de salida y B_i definidas de la siguiente forma

$$B_1 = \left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, \qquad B_2 = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, \qquad B_3 = \{1\},$$

las bases correspondientes en los espacios de llegada.

`[1.5+1+2.5=5 puntos]`

Problema 3 Dados los vectores de $\mathbb{R}^4$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ v_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Determina si son linealmente independientes o no.

Considera ahora la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 \\ -2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) ¿Cuál es la dimensión de $\mathrm{Col}(A)$? ¿Y de $\mathrm{N}(A)$?

(c) Pertenece el vector $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ a $\mathrm{Col}(A)$? ¿Y a $\mathrm{N}(A)$?

(d) Modificando un único elemento de la matriz A se puede construir una matriz B que sea invertible. ¿Cuál es esa matriz?

(e) Pertenece el vector $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ a $\mathrm{Col}(B)$? ¿Y a $\mathrm{N}(B)$?

`[1+1+1+1+1=5 puntos]`