Universidad Carlos III de Madrid
Escuela Politécnica Superior
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Primer Curso de Grado en Ingeniería Telemática. Álgebra lineal

EXAMEN FINAL 16 de enero de 2009.

Indicaciones:

- El examen dura tres horas.
- La nota de este examen tendrá un peso del 60 % en la nota final de la asignatura.
- No está permitido el uso de apuntes, libros, calculadoras o teléfonos móviles durante el examen.
- Los enunciados están escritos por las dos caras de esta hoja.

Problema 1 Responde VERDADERO o FALSO a las siguientes cuestiones justificando tus respuestas:

(a) Si A es una matriz $n \times n$ invertible y $r \in \mathbb{R}$ con $r \neq 0$, entonces $(rA)^{-1} = \frac{1}{r}A^{-1}$

(b) Si A y B son matrices $n \times n$ entonces $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

(c) Si A es una matriz $n \times n$ y $p \in \mathbb{N}$ entonces $(A^p)^{-1} = (A^{-1})^p$.

(d) Si A es una matriz cuadrada de orden 2, entonces su polinomio característico se puede calcular con la fórmula

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda\,\mathrm{tr}(A) + \det(A)$$

(e) Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son dos vectores de $\mathbb{R}^n$ tales que $\|u\| = \|v\|$ entonces los vectores $\mathbf{w} = 2\mathbf{u} + 7\mathbf{v}$ y $\mathbf{z} = 3(\mathbf{u} - \mathbf{v})$ son ortogonales.

Indicación: La traza de una matriz A, $\mathrm{tr}(A)$, se define como la suma de los elementos de la diagonal principal.

[2 puntos]

Problema 2 Dada la aplicación $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ definida por

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 2x_4 + 5x_5 \\ 3x_3 - x_4 + x_5 \\ x_4 + 3x_5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(a) Escribe la matriz, A, de la aplicación en las bases canónica de $\mathbb{R}^5$ y $\mathbb{R}^4$.

(b) Determina el rango de A y la dimensión de $\mathrm{N}(A)$.

(c) Calcula una base de $\mathrm{Col}(A)$ y una base de $\mathrm{N}(A)$.

(d) ¿Es T inyectiva? ¿Es sobreyectiva?

[2 puntos]

Problema 3 Dada la aplicación $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + z \\ z + t \end{pmatrix}.$$

Determina la matriz de la aplicación cuando se considera en el espacio de salida y llegada las siguientes bases, respectivamente:

(a) Canónica de $\mathbb{R}^4$ y canónica de $\mathbb{R}^2$.

(b) Canónica de $\mathbb{R}^4$ y $B = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ de $\mathbb{R}^2$.

[2 puntos]

Problema 4 Dado el subespacio W generado por los vectores

$$\mathbf{u_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u_2} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

(a) Encuentra una base ortonormal de dicho espacio.

(b) Determina $W^{\perp}$.

`[2 puntos]`

Problema 5 Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Encuentra dos matrices, D y P, tales que D sea diagonal, P invertible y $A = PDP^{-1}$.

(b) Calcula A^4.

`[2 puntos]`
