1.- Calcula el producto AB de dos modos: (1) por la definición, donde Ab_1 y Ab_2 se calculan por separado, y (2) mediante la regla del producto matricial, siendo A y B las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

2.- Sean las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \text{y} \qquad B = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 5 & \text{k} \end{bmatrix}.$$

¿Para qué valores de k se cumplirá $AB = BA$?

3.- Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$. Encuentra una matriz 2×2, B, cuyas columnas sean ambas distintas de 0, y tal que $AB = 0$.

4.- Sea A una matriz $m \times p$ y sea B una matriz $p \times n$.

1. Si A tiene la primera y tercera filas iguales, ¿qué puede decirse de las filas de AB? ¿Por qué?
2. Si la segunda columna de B es nula, ¿qué puede decirse de la segunda columna de AB?

5.- Si $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ y $AB = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 6 & -9 & 3 \end{bmatrix}$, determina la primera y segunda columnas de B.

6.- Sean $u = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$ y $v = \begin{bmatrix} \text{a} \\ \text{b} \\ \text{c} \end{bmatrix}$.

1. Calcule $u^T v$, $v^T u$, uv^T y vu^T.
2. Si $u, v \in \mathbb{R}^n$, ¿cuál es la relación entre $u^T v$ y $v^T u$? ¿Y entre uv^T y vu^T?

7.- Invierta las matrices $\begin{bmatrix} -4 & -5 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 7 & 9 \\ -6 & -8 \end{bmatrix}$, y ayúdese de esa información para resolver el sistema

$$\begin{aligned} -4x_1 - 5x_2 &= -3\,, \\ 5x_1 + 6x_2 &= 1\,. \end{aligned}$$

8.- Sean

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 13 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad b_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

1. Encuentre A^{-1} y utilícela para resolver las cuatro ecuaciones

$$Ax = b_1\,, \quad Ax = b_2\,, \quad Ax = b_3\,, \quad Ax = b_4\,.$$

2. Como la matriz de coeficientes en los cuatro sistemas es la misma, las operaciones por filas para reducir las matrices extendidas a la forma escalonada reducida son las mismas en los cuatro casos, así que se puede resolver el apartado anterior reduciendo por filas la matriz $[A\ b_1\ b_2\ b_3\ b_4]$. Resuelve de nuevo los cuatro sistemas por este procedimiento.

9.- Encuentra las inversas de las matrices

$$\begin{bmatrix} -3 & 6 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ -2 & -7 & 6 \\ 1 & 7 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -2 & -7 & 6 \\ 1 & 3 & -4 \end{bmatrix},$$

cuando existan.

10.- Sea $A = \begin{bmatrix} -1 & -5 & -7 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$. Determina la segunda columna de A^{-1} sin calcular las demás.

11.- Sea $A = \begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$ y $D = A^T$. Verifique que $AD = I$. ¿Es A invertible? ¿Por qué o por qué no?

12.- Encuentra una factorización LU de las matrices siguientes:

$$\begin{bmatrix} -5 & 3 & 4 \\ 10 & -8 & -9 \\ 15 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 5 \\ 3 & 7 & -2 & 9 \\ -2 & -3 & 1 & -4 \\ -1 & 6 & -1 & 7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -6 & 6 \\ -4 & 5 & -7 \\ 3 & 5 & -1 \\ -6 & 4 & 8 \\ 8 & -3 & 9 \end{bmatrix}.$$

13.- Encuentra la factorización LU de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -6 & -11 & -12 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}$. Usa esta factorización para calcular A^{-1}.

Repaso de la Hoja 1: Sistemas de ecuaciones

14.- Estudia, según los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$, si el siguiente sistema de ecuaciones es compatible o incompatible:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 + \lambda x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 2\lambda x_2 + \lambda x_3 &= 2. \end{aligned}$$

Si hay valores de λ para los que el sistema anterior es compatible indeterminado calcula su solución.

15.- Usando el método de Gauss o de reducción por filas, halla el conjunto de soluciones del sistema $Ax = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -6 & 1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

16.- Halla los valores de b tales que el sistema

$$\left\{ \begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 3 \\ 4x_2 + x_3 &= 2 \\ -x_1 + x_2 &= b \end{aligned} \right.$$

sea compatible. Resuelve el sistema para el valor de b encontrado, utilizando el método de Gauss.

```
Ejercicios adicionales:
Libro ‘‘Álgebra lineal y sus aplicaciones’’ de D.C. Lay. Capítulos 2.1-2.4
```