Sistemas de Ecuaciones Lineales

1 *Sistemas de ecuaciones y matrices*

Definición 1 Una *ecuación lineal* en las variables $x_1, x_2, \dots, x_n$ es una ecuación de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

con $a_1, a_2 \dots$ y b números reales.

Ejemplo 1 La ecuación

$$3x_1 + 5x_2 - 2.4x_3 = \pi,$$

es lineal. La ecuación

$$4x_1 + x_1x_2 = 2$$

no es lineal.

Definición 2 Un *sistemas de ecuaciones lineales (o sistema lineal)* es una colección de varias ecuaciones lineales. En forma general se escribe

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right. \tag{1}$$

Importante. El número de incógnitas n y el de ecuaciones m no son necesariamente iguales

Ejemplo 2 El sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x_1 - x_2 + 1.5x_3 & = & -3.7 \\ x_1 \qquad + 2x_3 & = & 14 \end{array} \right.$$

es un sistema lineal con dos ecuaciones y tres incógnitas.

El sistema general (1) también se puede escribir en *forma matricial*:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad \text{es la matriz de coeficientes con } m \text{ filas y } n \text{ columnas}$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \text{es el vector de incógnitas} \quad \text{y} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \qquad \text{es el término independiente.}$$

Objetivo. Encontrar el vector (o vectores) $\mathbf{x}$, si es que existe, que haga que se cumplan todas las ecuaciones simultáneamente.

Ejercicio 3 En un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas, ¿qué posibilidades hay para el vector $\mathbf{x}$? Representa gráficamente las posibles soluciones

> **Importante.** Para un sistema cualquiera con m ecuaciones y n incógnitas sólo se puede tener una de estas tres opciones:
>
> Existe solución $\Longrightarrow$ Es única (Sistema compatible determinado) / Hay infinitas (Sistema compatible indeterminado)
>
> No existe solución $\Longrightarrow$ (Sistema incompatible)

2 *Eliminación gaussiana*

Queremos encontrar una forma para resolver un SEL (sistema de ecuaciones lineales) general.

> **Idea.** Sustituir el sistema original por otro sistema equivalente y que sea más fácil de resolver

El sistema original y el "simplificado" son equivalentes y tienen la misma solución. Para pasar de uno a otro hacemos Operaciones Elementales de Fila:

1. Multiplicar una fila por una constante no nula.
2. Intercambiar una fila por la suma de esa fila más un múltiplo de otra.
3. Intercambiar dos filas.

Ejemplo 4 El sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcr} x_1 - x_2 + 4x_3 & = & -3 \\ 2x_1 - 7x_2 + 3x_3 & = & -2 \\ -2x_1 + x_2 + 7x_3 & = & -1 \end{array} \right.$$

se escribe en forma matricial

$$\left(\begin{array}{rrrcr} 1 & -5 & 4 & | & -3 \\ 2 & -7 & 3 & | & -2 \\ -2 & 1 & 7 & | & -1 \end{array} \right).$$

Haciendo operaciones elementales de fila, esta matriz se convierte en otra equivalente

$$\left(\begin{array}{rrrcr} 1 & -5 & 4 & | & -3 \\ 0 & 3 & -5 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & | & 5 \end{array} \right).$$

y por tanto el sistema original tiene la misma solución que

$$\left\{ \begin{array}{rcr} x_1 - x_2 + 4x_3 & = & -3 \\ 3x_2 - 5x_3 & = & 4 \\ 0 & = & 5 \end{array} \right.$$

que se resuelve fácilmente despejando. El sistema es incompatible, no tiene solución.

2.1. ***Reducción por filas y forma escalonada.*** La base del método de Gauss es transformar la matriz del sistema lineal en una matriz escalonada y resolver, cuando sea posible, el sistema. La matriz escalonada nos permite decidir fácilmente si el sistema tiene una, infinitas o ninguna solución.

Definición 3 Las *filas no nulas* de una matriz son aquéllas que tienen al menos un elemento distinto de cero.

Definición 4 La *entrada principal* de de una fila no nula es la primera entrada no nula por la izquierda.

Definición 5 Una matriz rectangular está en *forma escalonada* (escalonada por filas) si tiene las siguientes propiedades:

1. Todas las filas no nulas están por encima de las nulas.
2. Cada entrada principal de una fila se encuentra siempre en una columna a la derecha de la entrada principal de una fila superior.
3. Debajo de cada entrada principal sólo puede haber ceros.

Definición 6 Una matriz rectangular está en *forma escalonada reducida* si está en forma escalonada y además cumple:

4. La entrada principal de cada fila no nula es 1.
5. Cada 1 que corresponde a una entrada principal es la única entrada distinta de cero en su columna.

Ejemplo 5 Las siguientes matrices están en forma escalonada

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

¿Está alguna de ellas en forma escalonada reducida? ¿Cuáles son las entradas principales?

> **Importante.** Una matriz se puede reducir por filas a más de una matriz escalonada, sin embargo la forma escalonada reducida de una matriz es única. Es decir, cada matriz es equivalente a una y sólo una matriz escalonada reducida.

Definición 7 Una *posición pivote* de una matriz es una entrada de la matriz original que corresponde a una entrada principal de en una forma escalonada de dicha matriz.

Definición 8 Una *columna pivote* de una matriz escalonada es una columna que contiene una posición pivote.

Una posición pivote no es lo mismo que un pivote. El pivote se utiliza para llegar a la forma escalonada y puede ser distinto según las operaciones que se hagan. Las posiciones pivote son siempre elementos de la matriz original, antes de transformarla en escalonada.

Ejemplo 6 Haciendo transformaciones elementales reducimos la matriz (**Ejercicio: hacer las cuentas**)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \\ -1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \end{pmatrix}$$

a la matriz escalonada

$$\widehat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

¿Cuáles son las entradas principales de $\widehat{A}$? ¿Cuáles son las posiciones y las columnas pivote?

2.2. *Algoritmo de reducción por filas.* Este algoritmo se conoce con el nombre de método de Gauss

1. Seleccionar la columna distinta de cero que se encuentre más a la izquierda en la matriz. Es una columna pivote.
2. seleccionar como pivote (para definir los multiplicadores) una entrada distinta de cero en la columna pivote. Si es necesario se intercambiarán dos filas.

3. Usar operaciones elementales para hacer ceros debajo del pivote
4. Tapar la fila y la columna que contienen al pivote y repetir los pasos 1 a 3 en la submatriz que queda. Repetir este proceso hasta que no haya más filas distintas de cero por modificar.

Con este algoritmo llegamos a una matriz escalonada a partir de la matriz original. Si queremos obtener la única matriz escalonada reducida equivalente a la matriz original hay que efectuar un paso más:

5. Comenzar por el pivote situado más a la derecha trabajando a hacia arriba y a la izquierda, crear ceros por encima de cada pivote. Si un pivote no es 1, dividimos la fila por el valor del pivote.

2.3. *Soluciones de sistemas lineales usando la forma escalonada.* Recordemos que un SEL tiene 1 solución, infinitas o ninguna.

Objetivo. Saber, a través de la forma escalonada de la matriz del sistema, cuántas soluciones hay.

El algoritmo de reducción por filas conduce directamente a una descripción explícita del conjunto solución de un sistema.

Definición 9 Las variables que corresponden a columnas pivote de la matriz se denominan *variables principales*. Las demás son *variables libres*.

Ejemplo 7 A la vista de las siguientes matrices escalonadas determinar el número de soluciones que tienen los SEL asociados

$$\text{(a)}\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b)}\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \text{(c)}\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) x_1, x_2 son variables principales, x_3 es variable libre. El sistema es compatible indeterminado, hay infinitas soluciones de la forma $\mathbf{x} = (2x_3, (2 - x_3)/2, x_3)^T$.

(b) x_1, x_2, x_3 son variables principales, no hay variables libres. El sistema es compatible determinado, hay una única solución $\mathbf{x} = (1, 1, 2)^T$.

(c) El sistema es incompatible.

Conclusión. Las siguientes afirmaciones son equivalentes,

1. El SEL es compatible (determinado o indeterminado.
2. La columna de la derecha de la matriz ampliada del sistema no es columna pivote.
3. Una forma escalonada de la matriz ampliada no tiene ninguna fila de la forma $(0\ 0\ \ldots\ 0\ b)$, con $b \neq 0$.

Si un sistema es compatible, entonces

1. Existe una única solución cuando no hay variables libres.
2. Hay infinitas soluciones cuando al menos hay una variable libre.

3 *Operaciones con matrices*

Dado los n vectores $\mathbf{a_1}, \ldots, \mathbf{a_n}$ de m componentes cada uno, escribimos la matriz A como

$$A = (\mathbf{a_1}\ \ldots\ \mathbf{a_n}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Es una matriz $m \times n$. Tiene m filas y n columnas y el elemento a_{ij} es el escalar que está en la fila i-ésima y en la columna j-ésima.

- Una matriz cuadrada es una matriz con $m = n$.
- La matriz identidad, I, es una matriz con unos en la diagonal y ceros en el resto; es decir $a_{ii} = 1$ y $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

3.1. ***Suma de matrices y multiplicación por escalares.*** Dadas dos matrices A y B de dimensión $m \times n$ y un escalar λ, se tiene

$$A+B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{1m} & a_{m2}+b_{2m} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}, \quad \lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

es decir, las operaciones se hacen componente a componente. Por tanto, para sumar dos matrices estas tienen que ser de igual dimensión.

Propiedades. Sean A, B, C matrices de tamaño $m \times n$ y λ, μ dos escalares. Entonces:

1. $A + B = B + A$
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. $A + 0 = 0 + A$
4. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
5. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
6. $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$

3.2. ***Producto de matrices.*** ¿Cuándo se pueden multiplicar matrices? ¿Cómo se calcula el producto? ¿Qué dimensión tiene el resultado?

Primera observación: Recordemos la forma general de un sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. A es una matriz $m \times n$ y $\mathbf{x}$ es una matriz $n \times 1$ (un vector). El resultado de la multiplicación es una matriz $\mathbf{b}$ de dimensión $m \times 1$,

$$(m \times n) \cdot (n \times 1) = (m \times 1)$$

Ejercicio 8 Intenta concluir una condición sobre la dimensión de dos matrices para que esta se puedan multiplicar. ¿Qué dimensión tiene el producto?

Definición 10 Sea A una matrix $m \times n$ y B una matriz $n \times p$, entonces AB es una matriz com m filas y p columnas de la forma

$$AB = (A\mathbf{b_1} \ \dots \ A\mathbf{b_p}),$$

es decir, cada columna de la matriz producto se obtiene multiplicando A por una columna de B.

Ejemplo 9 Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}_{2\times 2}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

su producto es una matriz de dimensión 2×3 que se obtiene de la siguiente forma

$$A\mathbf{b_1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad A\mathbf{b_2} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 13 \end{pmatrix}, \quad A\mathbf{b_3} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 21 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ -9 \end{pmatrix}$$

y por tanto

$$AB = \begin{pmatrix} 11 & 0 & 21 \\ -1 & 13 & -9 \end{pmatrix}.$$

Regla fila-columna. Cada elemento de la matriz producto se puede calcular directamente con la regla "fila-columna"

$$(AB)_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{in}b_{nj}.$$

Ejemplo 10 Con las matrices del ejemplo anterior el elemento $1, 1$ de la matriz producto se calcula:

$$(AB)_{11} = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 1 = 11.$$

Propiedades. Sean A, B, C matrices con las dimensiones apropiadas para realizar las siguientes operaciones y sea λ un escalar. Entonces:

1. $A(BC) = (AB)C$
2. $A(B + C) = AB + AC$
3. $(B + C)A = BA + CA$
4. $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$
5. $IA = AI = A$,
   donde I es la matriz identidad de dimensión tal que se puedan realizar estas multiplicaciones.

Ejercicio 11 ¿Por qué son distintas la propiedad 2 y la 3?

- En general $AB \neq BA$. Además,
- Si $AB = AC$ no podemos concluir que $B = C$.
- Si $AB = 0$ no podemos concluir que $A = 0$ o $B = 0$.

Importante. El producto de matrices NO es conmutativo.

4 *Matrices inversas*

Motivación: Para resolver $3x = 2$, dividimos por 3 (multiplicamos por $1/3$) ambos lados de la ecuación para obtener $x = 2/3$.

Para resolver un sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ la idea es la misma: multiplicar ambos lados de la ecuación por "la inversa de A" y así despejar $\mathbf{x}$.

¿Qué es la inversa de A?, ¿Existe siempre?

Definición 11 Dada una matriz cuadrada A, *la inversa de A* es otra matriz cuadrada $B = A^{-1}$ tal que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Idea. Si A tiene inversa, entonces la solución del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es única y se calcula:

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$$

Ejemplo 12 Las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

son inversas una de la otra, ya que

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Importante.

- Si A es invertible, entonces A^{-1} también es invertible y $(A^{-1})^{-1} = A$.
- Si A y B son invertibles, entonces AB también es invertible y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Dada una matriz A invertible, ¿cómo calculamos su inversa?

Idea. A es invertible si y sólo si es equivalente por filas a la matriz identidad

$$(A \;\; I) \rightsquigarrow (I \;\; A^{-1})$$

Para calcula la inversa de una matriz utilizamos eliminación gaussiana.

Ejemplo 13 Calcular la inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Calculamos la forma escalonada reducida de

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right),$$

luego

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se puede comprobar que $AA^{-1} = I$.

En la mayoría de los casos no estaremos interesados en calcular la inversa de una matriz (requiere muchas operaciones) y nos bastará con saber si la matriz es invertible.

Caracterización de matrices invertibles. Sea A una matriz cuadrada $n \times n$. Son equivalentes

- A es invertible
- A es equivalente por filas a I
- A tiene n posiciones pivote
- $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene sólo la solución trivial $\mathbf{x} = \mathbf{0}$)
- $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene solución única, para todo $\mathbf{b}$.

5 *Matrices traspuestas*

Definición 12 Dada una matriz A de dimensión $m \times n$ *la matriz traspuesta*, A^T, *de* A es una matriz $n \times m$ que tiene por filas las columnas de A.

Ejemplo 14

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \qquad \text{y} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 15 Dado el vector

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

calcular los siguientes productos,

$$\text{(a)} \quad \mathbf{x}\mathbf{x}^T, \qquad \text{(b)} \quad \mathbf{x}^T\mathbf{x}.$$

Definición 13 Una matriz *simétrica* es una matriz cuadrada tal que $A = A^T$.

Propiedades de A^T. Sean A, B matrices de tamaño apropiado para realizar las siguientes operaciones:

1. $(A+B)^T = A^T + B^T$
2. $(AB)^T = B^T A^T$
3. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
4. $AA^T \neq A^T A$
5. AA^T es siempre una matriz cuadrada
6. AA^T es siempre una matriz simétrica

Ejercicio 16 Utilizando la definición de matriz simétrica $A = A^T$ comprobar la propiedad 6, es decir, comprobar que

$$(AA^T) = (AA^T)^T.$$