1.- Calcular los siguientes determinantes:

$$a)\ \begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}, \qquad b)\ \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}, \qquad c)\ \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & -6 & -7 & 5 \\ 5 & 0 & 4 & 4 \end{vmatrix}.$$

2.- Calcular los determinantes de las siguientes matrices:

$$a)\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{vmatrix}, \qquad b)\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \qquad c)\ \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

3.- Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ una matriz 2×2 y α un número real cualquiera. Encontrar una fórmula que relacione $\det[\alpha \cdot A]$ con α y $\det A$.

4.- Calcular los determinantes de las siguientes matrices reduciendo las mismas a su forma escalón reducida:

$$a)\ \begin{vmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 2 & 13 & -7 \end{vmatrix}, \qquad b)\ \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & -3 \\ -3 & -7 & -5 & 2 \end{vmatrix}.$$

5.- Combinar los métodos de reducción por filas y el desarrollo del determinante por filas o columnas para calcular los siguientes determinantes:

$$a)\ \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 6 & 6 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} \qquad b)\ \begin{vmatrix} -3 & -2 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \\ -3 & 4 & -2 & 8 \\ 3 & -4 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

6.- Calcular los determinantes siguientes si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 7$

$$a)\ \begin{vmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}, \qquad b)\ \begin{vmatrix} g & h & i \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}, \qquad c)\ \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ g & h & i \end{vmatrix}.$$

7.- Utilice determinantes para decidir si la matriz $\begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ es invertible.

8.- Demostrar los siguientes resultados:

1. Sea A una matriz $n \times n$ invertible. Demostrar que $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$
2. Si A es una matriz $n \times n$ y α un número real cualquiera, encontrar una expresión para $\det(\alpha \cdot A)$.
3. Sean A y B matrices cualesquiera $n \times n$, entonces $\det(A \cdot B) = \det(B \cdot A)$, aunque en general, $A \cdot B \neq B \cdot A$.
4. Sean A y P matrices $n \times n$ y P invertible. Demostrar que $\det(P \cdot A \cdot P^{-1}) = \det A$.

5. Sea U una matriz $n \times n$ tal que $U^T \cdot U = I$. Demostrar que $\det U = \pm 1$.

6. Sea A una matriz $n \times n$ tal que $\det A^4 = 0$. ¿Por qué no es A invertible?

9.- Sean A y B matrices 3×3 tales que $\det A = 4$ y $\det B = -3$. Calcular:

$$a) \ \det(A \cdot B) \qquad b) \ \det(A^{-1}) \qquad c) \ \det(5\,A) \qquad d) \ \det(A^3) \qquad e) \ \det(B^T).$$

10.- Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matrices 2×2. Demostrar que $\det(A + B) = \det A + \det B$ si y sólo si $a + d = 0$.

11.- Utilizando la regla de Cramer, resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$a) \ \left\{ \begin{array}{rcl} 4x_1 + x_2 & = & 6 \\ 5x_1 + 2x_2 & = & 7 \end{array} \right. \qquad b) \ \left\{ \begin{array}{rcl} 2x_1 + x_2 + x_3 & = & 4 \\ -x_1 + 2x_3 & = & 2 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 & = & -2 \end{array} \right.$$

12.- ¿Para qué valores del parámetro s tienen solución los siguientes sistemas ? Determina la solución en caso de que ésta exista.

$$a) \ \left\{ \begin{array}{rcl} 3s\,x_1 - 5x_2 & = & 3 \\ 9x_1 + 5s\,x_2 & = & 2 \end{array} \right. \qquad b) \ \left\{ \begin{array}{rcl} 2s\,x_1 + x_2 & = & 1 \\ 3s\,x_1 + 6s\,x_2 & = & 2 \end{array} \right.$$

13.- Demostrar que el determinante de la matriz de *Vandermonde* $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$ es igual a:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$$

14.- Sea $f(t) = \begin{vmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \end{vmatrix}$, donde x_1, x_2 y x_3 son diferentes entre sí. Demostrar que $f(t)$ es un polinomio de tercer grado y calcular $f(x_1)$, $f(x_2)$ y $f(x_3)$. (Ayuda: Demuestre que el coeficiente delante de la potencia t^3 es diferente de cero)

Ejercicios adicionales:

Libro ''Álgebra lineal y sus aplicaciones'' de D.C. Lay. Capítulos 3.1 y 3.2