Determinantes

1 *Definición*

El determinante de una matriz cuadrada A, $|A| = \det(A)$, es un número que nos permite, por ejemplo, decidir si una matriz es invertible (determinante distinto de cero) o no (determinante igual a cero).

Se calcula fácilmente para matrices de tamaños pequeño (2×2 o 3×3). El cálculo de determinantes para matrices de orden superior requiere muchos cálculos.

Matriz 2×2.

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Matriz 3×3.

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Definición 1 Sea A una matriz cuadrada de dimensión n. Se llama *menor complementario del elemento* a_{ij} y se denota por α_{ij} al determinante de la matriz cuadrada de dimensión $(n-1)$ que se obtiene al eliminar la fila i y la columna j a las que pertenece a_{ij}.

Definición 2 Se llama *adjunto de del elemento* a_{ij} al valor $A_{ij} = (-1)^{i+j}\alpha_{ij}$.

Ejemplo 1 Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

se tiene

$$\alpha_{21} = \det \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -3, \qquad \text{y} \qquad A_{21} = (-1)^{2+1}(-3) = 3.$$

Cálculo de determinantes. Sea A una matriz cuadrada de orden n. El determinante de A se calcula sumando el producto de todos los elementos de una fila (columna) por su adjunto,

$$\det(A) = a_{i1}A_{i1} + \cdots + a_{in}A_{in} = a_{1j}A_{1j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$$

Ejercicio 2 Calcular el determinante de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

desarrollándolo por la segunda fila y por la tercera columna. ¿Cuál de las dos formas es más eficiente? ¿Por qué?

2 *Propiedades de los determinantes*

Objetivo. Nos gustaría hacer operaciones elementales de fila sobre la matriz de la cual queremos calcular el determinante para que los cálculos sean más sencillos. ¿Cómo varía le valor del determinante?

1. $|I|$=1.

Sea A una matriz cuadrada con n filas. Entonces

Operaciones elementales de filas

2. Si dos filas de A se intercambian para producir B entonces $|B| = -|A|$.
3. Si una fila de A se multiplica por $\lambda \neq 0$ para obtener B, entonces $|B| = \lambda|A|$.
4. Si un múltiplo de una fila de A se suma a otra fila de A para producir una matriz B, entonces $|B| = |A|$.

Otras operaciones

5. Si A tiene dos filas iguales o proporcionales, entonces $|A| = 0$.
6. Si A tiene una fila de ceros, entonces $|A| = 0$.
7. Si A es triangular, entonces $|A| = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$.
8. A es invertible si y sólo si $|A| \neq 0$.
9. $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$.
10. $|\lambda A| = \lambda^n|A|$.
11. $|AB| = |A||B|$.
12. $|A| = |A^T|$.

Esta última propiedad implica que todo lo dicho para filas es válido también para columnas.

Ejercicio 3 Comprobar que estas propiedades son ciertas con una matriz genérica de 2×2.