1.- Sea W el conjunto de todos los vectores de $\mathbb{R}^4$ de la forma $\begin{bmatrix} s+3t \\ s-t \\ 2s-t \\ 4t \end{bmatrix}$, con $s,\ t \in \mathbb{R}$. Probar que W es un subespacio de $\mathbb{R}^4$.

2.- En los apartados siguientes, sea W el conjunto de vectores de la forma dada, siendo a, b y c números reales arbitrarios. En cada caso, encuéntrese un conjunto generador de W, o bien pruébese mediante un contraejemplo que W no es un subespacio.

$$\text{a)} \begin{bmatrix} -a+1 \\ a-6b \\ 2b+a \end{bmatrix} \qquad \text{b)} \begin{bmatrix} 4a+3b \\ 0 \\ a+b+c \\ c-2a \end{bmatrix}.$$

3.- Sea W la unión de los cuadrantes primero y tercero en el plano xy. Es decir,

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : xy \geq 0 \right\}.$$

Si $u \in W$ y α es un escalar arbitrario, ¿pertenece αu a W?, ¿por qué?. Encontrar ejemplos de vectores u, v de W, tales que $u+v$ *no* pertenezca a W. Esto es suficiente para demostrar que W no es subespacio vectorial.

4.- Para los siguientes conjuntos de vectores, probar si son o no subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$:

$$\text{a)} \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} : \begin{array}{c} a+3b=c \\ b+c+a=d \end{array} \right\} \qquad \text{b)} \left\{ \begin{bmatrix} b-5d \\ 2b \\ 2d+1 \\ d \end{bmatrix} : b, d \ \text{ reales} \right\}.$$

5.- Determinar si el vector $w = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ pertenece a Ker A para la matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & 21 & 19 \\ 13 & 23 & 2 \\ 8 & 14 & 1 \end{bmatrix}$.

6.- Encuéntrese una descripción explícita, en términos de vectores que los generen, de los núcleos de las siguientes matrices:

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 1 & -6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{b)} \begin{bmatrix} 1 & 5 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

7.- Encontrar Ker A para la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 6 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -8 & 1 & 9 \end{bmatrix}$.

8.- Comprobar que $A \sim B$, y utilizar dicha información para encontrar Ker A y Col A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 11 & -3 \\ 2 & 4 & -5 & 15 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & -5 & 19 & -2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & -7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

```
Ejercicios adicionales:
Libro ‘‘Álgebra lineal y sus aplicaciones’’ de D.C. Lay. Capítulos 4.1--4.2
```

1.- Encontrar una base de Gen$\{v_1, \dots, v_5\}$ si

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad v_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2.- Determine si los siguientes vectores son linealmente independientes

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

3.- Determine si las columnas de la siguiente matriz son linealmente dependientes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

4.- Sean

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ y } v_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ -6 \\ h \end{bmatrix}.$$

¿Para qué valores de h

1. $v_3 \in$ Gen$[v_1, v_2]$?
2. v_1, v_2 y v_3 son linealmente dependientes?

5.- Razone si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. (Por razonar se entenderá citar teoremas o resultados apropiados en el caso verdadero y proporcionar contraejemplos en el caso falso). Sean $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ vectores de $\mathbb{R}^4$

1. Si v_3 no es combinación lineal de v_1, v_2, v_4, entonces $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ es linealmente independiente.
2. Si $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ es linealmente independiente, entonces $\{v_1, v_2, v_3\}$ es también linealmente independiente.

6.- Rellene el espacio en blanco en la siguiente afirmación: "Si A es una matriz $m \times n$, entonces las columnas de A son linealmente independientes si y sólo si A tiene ______ columnas pivote".

7.- Sea A una matriz $m \times n$ con n columnas pivote. Explique por qué para cada $b \in \mathbb{R}^m$ la ecuación $Ax = b$ tiene como mucho una solución. (*Pista: Explique por qué $Ax = b$ no puede tener infinitas soluciones*)

8.- Encontrar una base del conjunto de vectores de $\mathbb{R}^2$ que están sobre la línea $y = 5x$.

9.- Hallar una base y la dimensión de los siguientes subespacios

$$\left\{ \begin{bmatrix} 3a + 6b - c \\ 6a - 2b - 2c \\ -9a + 5b + 3c \\ -3a + b + c \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}, \qquad \left\{ \begin{bmatrix} 4a + 3b \\ 0 \\ a + b + c \\ c - 2a \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}, \qquad \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} : \begin{array}{c} a + 3b = c \\ b + c + a = d \end{array} \right\}$$

10.- Calcular la dimensión del subespacio generado por los vectores

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -8 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

11.- Determinar las dimensiones de los subespacios Ker A y Col A en los casos:

$$\text{a)} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{b)} \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -6 & 10 \end{bmatrix}.$$

12.- Suponiendo que $A \sim B$, y sin hacer ningún cálculo, determinar rango A y $\dim$ Ker A; hallar bases de Col A, Fila A y Ker A.

$$\text{a)} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -1 & 9 \\ -2 & 6 & -6 & -1 & -10 \\ -3 & 9 & -6 & -6 & -3 \\ 3 & -9 & 4 & 9 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{b)} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 7 & 9 & -9 \\ 1 & 2 & -4 & 10 & 13 & -12 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 & -5 & -7 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & -5 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 7 & 9 & -9 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

13.- Si A es una matriz 4×3, ¿cuál es valor máximo posible para la dimensión de su subespacio fila?, ¿ y si A es 3×4?

14.- Si A es una matriz 6×4, ¿cuál es el valor mínimo que puede tener la dimensión de Ker A?

15.- Supóngase que un sistema no homogéneo de seis ecuaciones con ocho incógnitas tiene una solución con dos variables libres. ¿Es posible cambiar algunos de los valores del término independiente de manera que el sistema sea incompatible?

16.- Sean A una matriz $m \times n$, y $b \in \mathbb{R}^m$. ¿Qué valores relativos han de tener los rangos de las matrices A y $[A \;\; b]$ para que el sistema de ecuaciones $Ax = b$ sea compatible? (*Teorema de Rouché-Frobenius*).

17.- Sean $\mathcal{B} = \{b_1, b_2\}$ y $\mathcal{C} = \{c_1, c_2\}$ bases de un espacio vectorial V, y sean $b_1 = -c_1 + 4c_2$ y $b_2 = 5c_1 - 3c_2$. Encontrar la matriz del cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$. Hallar $[x]_\mathcal{C}$ para $x = 5b_1 + 3b_2$.

18.- Sean $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, a_3\}$ y $\mathcal{D} = \{d_1, d_2, d_3\}$ bases de un espacio vectorial V, y sea $P = [\ [d_1]_\mathcal{A}\, [d_2]_\mathcal{A}\, [d_3]_\mathcal{A}\ ]$. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones es la que satisface P para todo $x \in V$?

$$\text{a)} \quad [x]_\mathcal{A} = P\,[x]_\mathcal{D}, \qquad \text{b)} \quad [x]_\mathcal{D} = P\,[x]_\mathcal{A}.$$

19.- Sean $\mathcal{B} = \{b_1, b_2\}$ y $\mathcal{C} = \{c_1, c_2\}$ bases de $\mathbb{R}^2$. Hallar las matrices del cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ y viceversa, si

$$b_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}, \qquad c_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad c_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

20.- Encontrar el vector $x \in \mathbb{R}^3$ cuyo vector de coordenadas es $[x]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -4 \\ 8 \\ -7 \end{bmatrix}$ en la base

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}.$$

21.- Calcular el vector de coordenadas $[x]_{\mathcal{B}}$ de x en la base $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ en los casos:

a) $b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $b_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$

b) $b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$, $b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}$, $b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix}$.

22.- Encontrar las matrices de cambio de base, $P_{\mathcal{B}_c,\mathcal{B}}$, de las bases $\mathcal{B}$ dadas a las canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente.

a) $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \end{bmatrix} \right\}$, b) $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix} \right\}$.

23.- Los vectores $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ generan $\mathbb{R}^2$, pero no forman base. Encontrar dos maneras distintas de expresar el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ como combinación lineal de v_1, v_2 y v_3.

```
Ejercicios adicionales:
Libro ‘‘Álgebra lineal y sus aplicaciones’’ de D.C. Lay. Capítulos 4.3--4.7
```

1.- Determine si las aplicaciones dadas a continuación son lineales o no:

1. $T(x_1, x_2) = (4x_1 - 2x_2, 3|x_2|)$
2. $T(x_1, x_2) = (x_2, 0, x_1 + x_2, 0)$
3. $T(x_1, x_2) = (x_2, 1, x_1 + x_2, 0)$
4. $T(x_1, x_2, x_3) = (x_3, x_2)$
5. $T(x_1, x_2) = (x_1^2, x_2)$
6. $T(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$
7. $T(x_1, x_2) = x_1 x_2$
8. $T(x_1, x_2, x_3) = (-7x_1, x_3, 2x_2 + x_3, 2x_1 + 5x_2 - 3x_3)$

2.- Dada la aplicación lineal $T(x) = Ax$, encontrar x cuya imagen bajo T sea b, siendo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -8 \end{bmatrix} \text{ y } b = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

3.- Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -7 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 & 8 \end{bmatrix} \text{ y } b = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 0 \\ -9 \end{bmatrix}.$$

1. Calcule todos los vectores $x \in \mathbb{R}^4$ tales que son transformados en el cero por la transformación $x \to Ax$
2. ¿Está b en la Imagen de la aplicación definida por A?

4.- Dibuje los vectores:

$$u = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ y } v = \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Para cada una de las matrices dadas a continuación, dibuje los vectores Au y Av y dé una interpretación geométrica de la aplicación definida por la matriz A

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

5.- Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal que transforma $u = [1, 0]$ en $[7, -3, 1]$ y $v = [1, 1]$ en $[2, 0, 4]$. Use el hecho de que T es lineal para encontrar las imágenes de $3u$, $-2v$ y $3u - 2v$.

6.- Sea $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una aplicación lineal y sea $m = T(1)$. Use la propiedad de linealidad para demostrar que $T(x) = mx$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$.

7.- Encuentre la matriz de las aplicaciones definidas de la forma:

1. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que rota un punto en el sentido de las agujas del reloj un ángulo de $\pi/2$ radianes.
2. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que refleja un punto sobre la línea $x_1 = x_2$.
3. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que refleja un punto sobre el origen.
4. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que proyecta un punto (x_1, x_2, x_3) sobre el plano $x_2 x_3$.

8.- Encuentre la matriz A tal que:

$$A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5x_1 - 6x_2 \\ x_2 \\ 2x_1 - 2x_2 \end{bmatrix}.$$

9.- Decida si la aplicación lineal $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2 + 4x_1, x_3)$ es inyectiva y/o sobreyectiva.

10.- Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal, con A su matriz asociada. Rellene el espacio en blanco en la siguiente afirmación: "T es sobreyectiva si y sólo si A tiene ____ columnas pivote" y explique su respuesta.

11.- Si una aplicación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es inyectiva ¿qué se puede decir de m y n?

12.- Considere la aplicación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que cumple

$$T(1,0) = (0,1) \quad \text{y} \quad T(0,1) = (2,-1).$$

a) Determine la expresión analítica de T.

b) Calcule $T(3,4)$.

c) Calcule $T^{-1}(3,4)$.

d) ¿Es T inyectiva? ¿Y sobreyectiva?

13.- Sabiendo que T es una aplicación lineal que cumple $T(1,2) = (3,4)$ y $T(2,-1) = (1,0)$, determina la matriz asociada a T en la base de partida $A = \{(2,-1),(1,2)\}$ y de llegada $B = \{(3,4),(2,2)\}$.

14.- Dada la aplicación lineal $T(x_1, x_2) = (12x_1 + 10x_2, -15x_1 - 13x_2)$ encuentre la matriz de la aplicación cuando se consideran las siguientes bases B_1, B_2 en el espacio de salida y de llegada respectivamente

1. $B_1 = B_2 =$ Base canónica de $\mathbb{R}^2$
2. $B_1 = B_2 = \{(1,-1)^T, (2,-3)^T\}$

15.- Dada la aplicación lineal $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_2 - 3x_3)$ encuentre la matriz de la aplicación cuando se consideran las siguientes bases B_1, B_2 en el espacio de salida y de llegada respectivamente

1. B_1=Base canónica de $\mathbb{R}^3$ y $B_2 =$ Base canónica de $\mathbb{R}^2$
2. $B_1 = \{(1,0,1)^T, (1,1,0)^T, (1,1,1)^T\}$ y $B_2 = \{(1,-1)^T, (2,3)^T\}$

16.- Dada la aplicación lineal $T(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, 2x_1 + x_2, x_2)$ encuentre la matriz de la aplicación cuando se consideran las siguientes bases B_1, B_2 en el espacio de salida y de llegada respectivamente

1. B_1=Base canónica de $\mathbb{R}^2$ y $B_2 =$ Base canónica de $\mathbb{R}^3$
2. $B_1 = \{(2,1)^T, (1,2)^T, \}$ y $B_2 = \{(1,-1,0)^T, (0,2,0)^T, (0,2,5)^T\}$

```
Ejercicios adicionales:
Libro ‘‘Álgebra lineal y sus aplicaciones’’ de D.C. Lay. Capítulos 1.8--1.9,4.2
```