Espacios vectoriales

1 *Espacios y subespacios*

$\mathbb{R}^n$ es el conjunto de todos los vectores columna con n componentes. Además $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial.

Ejemplo 1 Dados dos vectores de $\mathbb{R}^3$, por ejemplo

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -8 \\ 2.3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

y $\lambda = 3.1$ un escalar. Calculamos

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2.3 \\ -6 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \lambda\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 6.2 \\ 0 \\ -15.5 \end{pmatrix}.$$

Idea. Podemos sumar vectores y multiplicar por un escalar. El resultado vuelve a ser un vector $\rightsquigarrow$ Definición de espacio vectorial.

Definición 1 Un conjunto no vacío V es un *espacio vectorial*, y sus elementos se llaman *vectores*, se cumplen las siguientes propiedades:

Dados tres vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ cualesqueira y dos escalares λ y μ se tiene

1. La suma de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, denotada por $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, es un elemento de V.
2. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$.
3. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$.
4. Existe un vector cero $\mathbf{0}$ en V tal que $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$.
5. Para cada $\mathbf{u}$ en V , existe un vector $-\mathbf{u}$ en V tal que $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$.
6. El múltiplo escalar de $\mathbf{u}$ por λ, denotado por $\lambda\mathbf{u}$, es un elemento de V.
7. $\lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}$.
8. $(\lambda + \mu)\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{u}$.
9. $\lambda(\mu\mathbf{u}) = (\lambda\mu)\mathbf{u}$.
10. $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$.

Ejemplo 2 $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial.

Ejercicio 3 Comprobar que $\mathbb{P}_n = \{p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n : a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}$, el conjunto de todos los polinomios de grado menor o igual que n, es un espacio vectorial.

1.1. *Subespacios vectoriales.* Dado un espacio vectorial, buscamos un subconjunto dentro de ese espacio, que también tenga estructura de espacio vectorial.

Definición 2 Dado un espacio vectorial V, un *subespacio vectorial* de V es un subconjunto H que cumple:

1. $\mathbf{0} \in H$.

2. Si $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H$ entonces $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in H$.

3. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{u} \in H$ entonces $\lambda \mathbf{u} \in H$.

Ejemplo 4 Los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$ son:

- $\mathbf{0}$.
- Rectas que pasan por el origen.
- Planos que pasan por el origen.
- $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 5 $H = \{(x, y)^T : x + y = 1\}$ no es un subespacio de $\mathbb{R}^2$, porque $\mathbf{0} \notin H$.

Ejercicio 6 ¿Es el conjunto $H = \{(x_1, x_2, 0)^T : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ un subespacio de $\mathbb{R}^3$?

1.2. ***Subespacio generado por un conjunto.*** Buscamos una forma “compacta” de describir un subespacio. Esta forma no es única.

Idea. Escribimos todos los vectores del subespacio como *combinación lineal* de unos vectores dados

Ejemplo 7 Sea $H = \{(a - 3b, b - a, a, b)^T : a, b \in \mathbb{R}\}$. Este espacio se puede escribir como

$$\begin{pmatrix} a-3b \\ b-a \\ a \\ b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a\mathbf{v_1} + b\mathbf{v_2},$$

luego $H = \text{Gen}\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$ y es un subespacio de $\mathbb{R}^4$.

2 *Espacios nulos y columna*

Objetivo. Caracterizar

- el conjunto de soluciones de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$
- el conjunto de vectores $\mathbf{b}$ para los que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene solución

2.1. ***Espacio nulo.*** Un sistema lineal homogéneo ($A\mathbf{x} = \mathbf{0}$) siempre tiene solución. Cuando hay infinitas soluciones, ¿cómo las caracterizamos?

Definición 3 El *espacio nulo* de una matriz A de dimensión $m \times n$, $N(A)$, es el conjunto de todas las soluciones de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$; es decir, $N(A) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$.

Observaciones.

- $N(A)$ siempre contiene al $\mathbf{0}$ ($\rightsquigarrow$ $\mathbf{0}$ siempre es solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.)
- $N(A)$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 8 Encontrar el espacio nulo de

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{pmatrix},$$

(es un subespacio de $\mathbb{R}^5$).

Buscamos la solución general de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$:

$$A = \left(\begin{array}{rrrrr|r} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 0 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \text{variables libres: } x_2, x_4, x_5.$$

La solución general es

$$\mathbf{x} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \mathbf{u} + \lambda_2 \mathbf{v} + \lambda_3 \mathbf{w}.$$

y por tanto $N(A) = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$.

2.2. ***Espacio columna.*** Dado un sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, ¿para que vectores $\mathbf{b}$ hay solución?

Definición 4 El *espacio columna* de una matriz A de dimensión $m \times n$, $C(A)$, es el conjunto de todas las combinaciones lineales de las columnas de A; es decir, $C(A) = \{\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m : \mathbf{b} = A\mathbf{x} \text{ para algún } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$.

Observaciones.

- $C(A)$ es un subespacio de $\mathbb{R}^m$.

Ejemplo 9 Encontrar el espacio columna de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 11 & -3 \\ 2 & 4 & -5 & 15 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & -5 & 19 & -2 \end{pmatrix},$$

(es un subespacio de $\mathbb{R}^4$). Buscamos las columnas que dan “información” sobre el sistema:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 11 & -3 \\ 2 & 4 & -5 & 15 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & -5 & 19 & -2 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Las variables principales del sistema están en la columna 1,3 y 5, luego $C(A) = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$, con

$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

3 *Independencia lineal y sistemas generadores.*

3.1. ***Independencia lineal.*** Un subespacio puede estar generado por muchos vectores, pero puede que haya algunos vectores repetidos (iguales o múltiplos unos de otros).

Idea. Buscamos vectores que no den información redundante (aunque no sea suficiente) sobre el subespacio.

Definición 5 Los vectores $\{\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_p}\}$ son *linealmente independientes* si la ecuación vectorial

$$\lambda_1 \mathbf{v_1} + \cdots + \lambda_p \mathbf{v_p} = \mathbf{0}$$

tiene sólo la solución trivial $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$.

De forma equivalente,

Definición 6 Las columnas de $A = [\mathbf{v_1}| \ldots |\mathbf{v_p}]$ son *linealmente independientes* si el sistema $A\lambda = \mathbf{0}$ es compatible determinado (es decir, $\lambda = \mathbf{0}$ es la única solución).

Ejemplo 10 Los vectores

$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

no son linealmente independientes, porque el sistema $[\mathbf{v_1}|\mathbf{v_2}|\mathbf{v_3}]\lambda = \mathbf{0}$ no tiene solución única (es decir $N(A) \neq \{\mathbf{0}\}$).

3.2. *Sistemas generadores.* ¿Cómo describimos un espacio a través de unos poco vectores?

> **Idea.** Buscamos vectores que den información suficiente (aunque sea demasiada) sobre el subespacio.

Definición 7 Los vectores $\{\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_p}\}$ *generan* el espacio V, $V = \text{Gen}\{\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_p}\}$ si cualquier vector de V se puede escribir como combinación lineal de $\{\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_p}\}$.

Ejemplo 11 El conjunto $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$ con

$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

es un conjunto generador de $\mathbb{R}^2$.

4 *Bases, dimensiones y rango*

4.1. *Bases.* Los conjuntos linealmente independientes pueden no dar información suficiente sobre un subespacio. Los conjuntos generadores pueden dar información demás sobre un subespacio.

> **Idea.** Buscamos un conjunto de vectores lo suficientemente grande para que genere todo el espacio, pero lo suficientemente pequeño para que sus vectores sean linealmente independientes.

Definición 8 Sea H un subespacio vectorial de V. El conjunto de vectores $\mathcal{B} = \{\mathbf{b_1}, \ldots, \mathbf{b_p}\}$ es una *base* de H si

1. $\mathcal{B}$ es un conjunto linealmente independiente
2. $\mathcal{B}$ genera H.

> **Importante.** Todo elemento de V se puede escribir como combinación lineal de los elementos de $\mathcal{B}$. La forma es única.

Ejemplo 12 La base "más importante" es la base canónica. En $\mathbb{R}^n$ corresponde a las columnas de la matriz identidad de dimensión n, es decir:

$$\mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \ldots \qquad \mathbf{e_n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 13 Encontrar una base para $N(A)$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 6 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -8 & 1 & 9 \end{pmatrix}.$$

Indicación: ¿Qué vectores generan $N(A)$? ¿Son linealmente independientes?

> **Observación.** En un espacio vectorial hay infinitas bases, ¿tienen algo en común?

4.2. ***Dimensiones y Rango.*** Los subespacios vectoriales tienen infinitos elementos, pero quedan caracterizados por los elementos de una base. ¿Cuál es el "tamaño" de un subespacio?

Definición 9 La *dimensión* de un subespacio vectorial es el número de elementos de una base.

Ejemplo 14 $\mathbb{R}^n$ tiene dimensión n.

Ejemplo 15 Subespacios de $\mathbb{R}^3$ y su dimensión

Subespacio	**Dimensión**
$\{0\}$	0
Rectas que pasan por el origen	1
Planos que pasan por el origen	2
$\mathbb{R}^3$	3

Una matriz A tiene dimensión $m \times n$. Pero puede que no sea la dimensión "correcta" si pensamos en el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. ¿Por qué?

Definición 10 Dada una matriz A. El *rango de* A, $\mathrm{r}(A)$, es el número de entradas principales de A.

Ejercicio 16 Si A es $m \times n$, ¿por qué se tiene $\mathrm{r}(A) \leq \text{mín}\{m, n\}$?

¿Cuál es la dimensión de $C(A)$ y de $N(A)$?

> **Importante.** Las siguientes afirmaciones son equivalentes:
>
> - Las columnas de A de dimensión $m \times n$ son linealmente independientes
> - el rango de A es n

Ejercicio 17 Dada la matriz

$$A \begin{pmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{pmatrix}.$$

Calcular la dimensión de $C(A)$ y de $N(A)$. ¿Cuál es el rango?

> **Importante.** Dada una matriz A de $m \times n$ y rango r, se tiene
>
> $$\dim(C(A)) + \dim(N(A)) = r + (n - r) = n.$$

5 *Cambio de base*

Idea. Un mismo vector $\mathbf{v}$ se puede representar de muchas maneras en función de la base que elijamos para describir el espacio. El vector es único, pero su representación es distinta.

Ejemplo 18 Dadas las bases de $\mathbb{R}^2$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad \text{y} \qquad \mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

y el vector $\mathbf{v} = (2,1)^T$ tenemos las siguientes representaciones

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{y} \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto las coordenadas de $\mathbf{v}$ son

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

Definición 11 Sea $\mathcal{B} = \{\mathbf{b_1}, \dots, \mathbf{b_n}\}$ una base de V y $\mathbf{v} \in V$. Las *coordenadas* de $\mathbf{v}$ es la base $\mathcal{B}$ son los escalares $x_1, \dots, x_n$ tales que

$$\mathbf{v} = x_1 \mathbf{b_1} + \cdots + x_n \mathbf{b_n}$$

Se denota por $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ y se entiende que si no se especifica base se trata de las coordenadas en la base canónica.

Ejemplo 19 Dada las base de $\mathbb{R}^2$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

para hallar las coordenadas del vector $\mathbf{v} = (4,5)^T$ es términos de esta base planteamos el sistema

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \rightsquigarrow \qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

El sistema tiene solución única (¿Por qué?) y obtenemos

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Importante. Dadas las bases $\mathcal{B} = \{\mathbf{b_1}, \dots, \mathbf{b_n}\}$ y $\mathcal{B}' = \{\mathbf{b'_1}, \dots, \mathbf{b'_n}\}$ de un espacio vectorial V y $\mathbf{v} \in V$ se tiene

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}'} = P(\overleftarrow{\mathcal{B}', \mathcal{B}})[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}},$$

donde $P(\overleftarrow{\mathcal{B}', \mathcal{B}})$ es la matriz de cambio de base y viene dada por

$$P(\overleftarrow{\mathcal{B}', \mathcal{B}}) = ([\mathbf{b_1}]_{\mathcal{B}'} | \dots | [\mathbf{b_n}]_{\mathcal{B}'}).$$

Además

$$P(\overleftarrow{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}) = P(\overleftarrow{\mathcal{B}', \mathcal{B}})^{-1}$$

Ejercicio 20 Dadas las bases de $\mathbb{R}^2$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad \text{y} \qquad \mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

hallar las matrices de cambio de base $P(\overleftarrow{\mathcal{C}, \mathcal{B}})$ y $P(\overleftarrow{\mathcal{B}, \mathcal{C}})$.