1.- Encontrar los autovalores y los autovectores de las matrices:

$$a)\ \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad b)\ \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad c)\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad d)\ \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 7 & -2 \end{pmatrix}.$$

2.- Encontrar una base de autovectores para el autovalor λ dado en las siguientes matrices:

$$a)\ \begin{pmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad \lambda = 4, \qquad b)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 4 & -13 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda = -2.$$

3.- Demostrar que si A es invertible y λ es un autovalor de A, entonces λ^{-1} es un autovalor de A^{-1}.

4.- Demostrar que si $A^2 = 0$, entonces el único autovalor de A es cero.

5.- Demostrar que si λ es un autovalor de A, entonces también lo es de A^T.

6.- Conociendo que A es diagonalizable, es decir que $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$, donde D es una matriz diagonal y P invertible, calcular A^k, para $k = 1, 2, \ldots$ un número natural cualquiera.

$$a)\ D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}, \qquad b)\ \begin{pmatrix} -2 & 12 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

7.- Diagonalizar si es posible las siguientes matrices: (Escribir las matrices D y P tales que $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$).

$$a)\ \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad b)\ \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad c)\ \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

$$d)\ \begin{pmatrix} 0 & -4 & -6 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad e)\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad f)\ \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

8.- Sea A es una matriz 3×3 con dos autovalores diferentes y cuyos correspondientes autoespacios son unidimensionales. ¿Es A diagonalizable? ¿Por qué?

9.- Sea A es una matriz 7×7 con tres autovalores diferentes y uno de los correspondientes autoespacios es bidimensional y otro tridimensional. ¿Es A diagonalizable siempre? ¿Por qué?

10.- Sea A es una matriz invertible y diagonalizable. Demuestre que A^{-1} también es diagonalizable.

11.- Determine si la matriz de la aplicación de las siguientes transformaciones lineales es diagonalizable:

$$a)\ F(x,y) = (2y, x-y), \qquad b)\ G(x,y) = (2x-y, x), \qquad c)\ H(x,y,z) = (2(x+z), x-z, x+3z).$$

12.- Determine una base de $\mathbb{R}^3$ tal que la matriz asociada a la aplicación $H(x,y,z) = (2(x+z), x-z, x+3z)$, en dicha base, sea diagonal.

```
Ejercicios adicionales:
Libro ‘‘Álgebra lineal y sus aplicaciones’’ de D.C. Lay. Capítulos 5.1--5.3
```