Autovalores y autovectores

1 *Autovalores y autovectores*

Idea. Una matriz A de $n \times n$ transforma un vector $\mathbf{x}$ de $\mathbb{R}^N$ en otro vector $A\mathbf{x}$ de $\mathbb{R}^N$. Buscamos los vectores $\mathbf{x} \neq 0$ (¿por qué distintos de cero? $\rightsquigarrow$ Ejercicio) que al ser transformados por A se mantienen en la misma dirección

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

Definición 1 Un *vector propio de A* es un vector $\mathbf{x}$ distinto de cero tal que $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$. A λ se le llama *valor propio* asociado a A.

¿Cómo encontramos $\mathbf{x}$ y λ? Despejando en la expresión $A\mathbf{x} = \lambda x$ tenemos

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = 0,$$

luego $\boxed{\mathbf{x} \in \mathrm{N}(A - \lambda I)}$.
Como $\mathbf{x} \neq 0$ necesitamos que el sistema tenga soluciones no triviales; es decir, $\boxed{\lambda \text{ es valor propio} \Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0}$

Definición 2 El *espacio propio* de A correspondiente a λ, $V(\lambda)$, es el conjunto de todas las soluciones de $(A-\lambda I)\mathbf{x} = 0$, es decir $V(\lambda) = \mathrm{N}(A - \lambda I)$.

Definición 3 El *polinomio característico* de A es $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.

Importante. λ son las raíces del polinomio característico, es decir $P_A(\lambda) = 0$.

Ejemplo 1 Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$$

formamos su polinomio característico para encontrar los valores propios. Son las soluciones de $\det(A-\lambda I) = (2-\lambda)(-6-\lambda)-9 = 0$. Es un polinomio de grado dos que tiene dos soluciones. Luego hay dos valores propios $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = -7$.

Para encontrar los vectores propios asociados a cada valor propio tenemos que buscar los vectores tales que $(A - \lambda I)\mathbf{x} = 0$. Es decir, buscamos $\mathbf{x} \in \mathrm{N}(A - \lambda I)$ para cada uno de los valores propios que hemos encontrado.

$\boxed{\lambda = 3}$

$$A - 3I = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow V(3) = \mathrm{Gen}\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$\boxed{\lambda = -7}$

$$A + 7I = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow V(-7) = \mathrm{Gen}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Ejercicio 2 $\lambda = 0$ es un valor propio válido (no así el vector propio $\mathbf{x} = 0$). Pero, ¿qué implica sobre la invertibilidad de la matriz el hecho de que 0 sea un valor propio?

Ejercicio 3 Encontrar los valores propios y vectores propios de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observación.

- λ es raíz simple $\rightsquigarrow$ 1 vector propio.
- λ es raíz doble $\rightsquigarrow$ 1 o 2 vectores propios.

Definición 4 La *multiplicidad algebraica*, n_λ, de un valor propio λ es la multiplicidad que tiene como raíz del polinomio característico. La *multiplicidad geométrica*, m_λ, de un valor propio λ es la dimensión de su espacio propio asociado $m_\lambda = \dim V(\lambda)$.

Importante.

$$m_\lambda \leq n_\lambda$$

2 *Diagonalización de matrices*

Ejemplo 4 Calculamos las potencias de

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad D^2 = \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad D^k = \begin{pmatrix} 5^k & 0 & 0 \\ 0 & 3^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}.$$

Idea. Queremos construir matrices diagonales, porque calcular sus potencias es muy fácil.

Definición 5 A y B son *matrices semejantes* si existe una matriz P invertible, tal que

$$A = PBP^{-1}$$

Definición 6 A es una *matriz diagonalizable* si es semejante a una matriz diagonal

$$A = PDP^{-1}$$

con D una matriz tal que todos los elementos que no están en la diagonal son cero.

¿Cuándo es una matriz A diagonalizable?

Importante.

- El conjunto $\{\mathbf{v_1}, \ldots \mathbf{v_r}\}$ es linealmente independiente si $\mathbf{v_1}, \ldots \mathbf{v_r}$ son los vectores propios asociados a valores propios $\lambda_1, \ldots \lambda_r$ diferentes.
- Los siguientes enunciados son equivalentes
  1. A es diagonalizable.
  2. A tiene n vectores propios linealmente independientes.
  3. $\sum_{i=1}^{k} n_{\lambda_i} = n$ y $n_{\lambda_i} = m_{\lambda_i}$, siendo k el número de vectores propios.
  4. existe una base de $\mathbb{R}^n$ formada por vectores propios.
- Si A tiene n valores propios distintos entonces es diagonalizable.

2.1. *Algoritmo para diagonalizar una matriz A.* Diagonalizar, si es posible, la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{PASO I:}}$ Encontrar los valores propios de A.

Resolvemos la ecuación característica, $\det(A - \lambda I) = 0$. Esta ecuación contiene un polinomio de grado n en λ.

El determinante de $(A - \lambda I)$ es en este ejemplo

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & 3 \\ -3 & -5-\lambda & -3 \\ 3 & 3 & 1-\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda - 1)(\lambda + 2)^2$$

y por tanto tenemos como valores propios $\lambda = 1$ y $\lambda = -2$ (doble).

¡CUIDADO! Si hay n autovalores distintos la matriz es diagonalizable. En caso contrario (como en el ejemplo) no podemos afirmar si es diagonalizable o no.

$\boxed{\text{PASO II:}}$ Encontrar los vectores propios asociados a los valores propios.

Este es el paso crítico. Necesitamos n vectores propios linealmente independientes para que la matriz sea diagonalizable. Para encontrar los vectores propios tenemos que encontrar una base de $N(A - \lambda I)$ para cada uno de los valores propios. Los vectores que formen esas bases serán los vectores propios asociados a A. Cada valor propio tiene como máximo tantos vectores propios asociados como multiplicidad tenga como raíz de la ecuación característica.

En nuestro caso, A será diagonalizable si tiene tres vectores propios linealmente independientes.

•$\lambda = 1$: Calculamos una base para $N(A - I)$:

$$(A - I) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -3 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & -6 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto la dimensión de $N(A - I)$ es 1 y una base para este espacio es

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

•$\lambda = -2$: Calculamos una base para $N(A + 2I)$:

$$(A + 2I) = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -3 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La dimensión de $N(A + 2I)$ es 2 (hay dos variables libres) y una base para este espacio es

$$v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Hay tres vectores propios linealmente independientes $\Longrightarrow$ la matriz A es diagonalizable

$\boxed{\text{PASO III:}}$ Escribir $A = PDP^{-1}$.

La matriz D es diagonal, tiene los valores propios colocados en la diagonal y 0 en el resto. Cada valor propio aparece tantas veces como sea su multiplicidad. El orden en que se colocan los valores propios no importa, determina el orden en el que hay que colocar los vectores propios en P. La columna en la que esté situado un valor propio en D tiene que corresponder a la columna en la que esté el vector propio asociado en P.

Formamos las matrices D y P con los datos del ejemplo:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad P = (v_1|v_2|v_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Conviene comprobar que $A = PDP^{-1}$ (si las cuentas están bien hechas, P tiene columnas linealmente independientes y por tanto es invertible).

Ejercicio 5 Diagonalizar, si es posible, la siguiente matriz

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$