1.- Sean los vectores: $u = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$, $w = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$. Calcular las siguientes cantidades: $w \cdot w$, $x \cdot w$, $\frac{x \cdot w}{w \cdot w}$, $\frac{1}{u \cdot u} u$, $\frac{x \cdot w}{x \cdot x} x$, $||x||$.

2.- Sean los vectores: $v = \begin{bmatrix} -6 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$, $w = \begin{bmatrix} 8/3 \\ 2 \end{bmatrix}$. Encontrar vectores unitarios en su misma dirección.

3.- Considerar $u = [5, -6, 7]^T$ y sea W el conjunto de todos los vectores $x \in \mathbb{R}^n$ tales que $u \cdot x = 0$. Dar una interpretación geométrica de W y demostrar que es un subespacio vectorial.

4.- Determinar si los siguientes conjuntos de vectores son ortogonales:

$$S_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad S_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ -3 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

5.- Demostrar que $u_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ forman una base ortogonal. Expresar el vector $x = [5, -3, 1]^T$ en término de los vectores anteriores.

6.- Sea $\{v_1, v_2\}$ un conjunto ortogonal y c_1 y c_2 dos escalares no nulos. Demostrar que $\{c_1\ v_1, c_2\ v_2\}$ también es un conjunto ortogonal.

7.- Usar el proceso de Gram-Schmidt para calcular bases ortonormales de los subespacios generados por los siguientes vectores:

$$\text{a)} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ -7 \end{bmatrix} \quad \text{b)} \quad \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -5 \\ 9 \\ -9 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

8.- Usar el proceso de Gram-Schmidt para calcular bases ortonormales de los espacios columna de las siguientes matrices:

$$\text{a)} \quad \begin{bmatrix} -1 & 6 & 6 \\ 3 & -8 & 3 \\ 1 & -2 & 6 \\ 1 & -4 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{b)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 5 & 8 \end{bmatrix}.$$

9.- En los siguientes ejercicios sea W el subespacio generado por los vectores u_1 y u_2. Escriba en cada caso el vector y como la suma de un vector de W y un vector ortogonal a W.

1.

$$y = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \quad , \quad u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \quad , \quad u_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

2.

$$y = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \quad , \quad u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

3.

$$y = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \quad , \quad u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad u_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad , \quad u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

4.

$$y = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \quad , \quad u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad , \quad u_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

10.- En los siguientes ejercicios sea W el subespacio generado por los vectores u_1 y u_2. Halle en cada caso el vector de W más próximo al vector y.

1.

$$y = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad u_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

2.

$$y = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 13 \end{bmatrix} \quad , \quad u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad , \quad u_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

11.- Sea $y = [7, 9]^T$, $u_1 = [1/\sqrt{10}, -3/\sqrt{10}]^T$, y $W = \mathrm{Gen}\{u_1\}$.

1. Sea U la matriz 2×1 cuya única columna es u_1. Calcule $U^T U$ y UU^T.
2. Calcule $\mathrm{proy}_W y$ y $(UU^T)y$.

12.- En todos los apartados de este ejercicio los vectores y subespacios que se mencionan están en $\mathbb{R}^n$. Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas justificando las respuestas.

1. Si W es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ y si v está tanto en W como en $W^\perp$, entonces v debe ser el vector cero.
2. En la fórmula de la proyección ortogonal de un vector y sobre un subespacio W cada término es a su vez la proyección ortogonal de y sobre un subespacio de W.
3. Si $y = z_1 + z_2$, donde z_1 es un vector de un subespacio W y z_2 un vector de $W^\perp$, entonces z_1 debe ser la proyección ortogonal de y sobre W.
4. La mejor aproximación de un vector y por elementos de un subespacio W está dado por el vector $y - \mathrm{proy}_W y$.
5. Si U es una matriz $n \times p$ con columnas ortonormales, entonces $U\,U^T x = x$ para todo x en $\mathbb{R}^n$.

13.- Sea W un subespacio de $\mathbb{R}^n$ con una base ortogonal $\{w_1, \ldots, w_p\}$ y sea $\{v_1, \ldots, v_q\}$ una base ortogonal de $W^\perp$.

1. Explique por qué $\{w_1, \ldots, w_p, v_1, \ldots, v_q\}$ es un conjunto ortogonal.
2. Explique por qué $\{w_1, \ldots, w_p, v_1, \ldots, v_q\}$ genera $\mathbb{R}^n$.
3. Demuestre que $\dim W + \dim W^\perp = n$.

14.- Resuelva en sentido mínimos cuadrados mediante las ecuaciones normales los siguientes sistemas $Ax = b$.

1. $$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

2. $$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad b = \begin{bmatrix} -5 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3. $$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \quad , \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

15.- En los siguientes ejercicios encuentre la proyección ortogonal de b sobre el espacio columna de A, y utilizando esta proyección resuelva en sentido mínimos cuadrados los correspondientes sistemas $Ax = b$.

1. $$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \quad , \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

2. $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

3. $$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad , \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

16.- En este problema A es una matriz $m \times n$ y b es una vector de $\mathbb{R}^m$. Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y justifique su respuesta.

1. Si b está en el espacio columna de A, entonces cada solución de $Ax = b$ es una solución en sentido mínimos cuadrados.
2. La solución en sentido mínimos cuadrados de $Ax = b$ es el elemento del espacio columna de A más cercano a b.
3. Una solución en sentido mínimos cuadrados de $Ax = b$ es un vector $\hat{x}$ que cuando se multiplica por la matriz A producen la proyección ortogonal de b sobre $\mathrm{col}(A)$.
4. Si $\hat{x}$ es una solución en sentido mínimos cuadrados de $Ax = b$ entonces $\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T b$.

17.- Determine la ecuación de la recta $y = \beta_0 + \beta_1 x$ que mejor aproxime en sentido mínimos cuadrados los siguientes conjuntos de puntos:

1. $(0, 1), (1, 1), (2, 2), (3, 2)$.
2. $(2, 3), (3, 2), (5, 1), (6, 0)$.

18.- Determine cuáles de las siguientes matrices son ortogonales, y halle su inversa en los casos afirmativos:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} .$$

19.- Diagonalice ortogonalmente las siguientes matrices, hallando una matriz ortogonal P y una matriz diagonal D:

$$\begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

20.- Supongamos que A y B son matrices ortogonalmente diagonalizables y que $A\,B = B\,A$. Demuestre que $A\,B$ también es ortogonalmente diagonalizable.

21.- Demuestre que si A es una matriz simétrica $n \times n$, entonces $Ax \cdot y = x \cdot Ay$ para cualesquiera x, y en $\mathbb{R}^n$.

22.- Sea B una matriz simétrica $n \times n$ tal que $B^2 = B$. Cualquier matriz que verifique lo anterior se llama matriz de proyección ortogonal. Dado cualquier vector y de $\mathbb{R}^n$, sean $\hat{y} = By$ y $z = y - \hat{y}$:

1. Demuestre que z es ortogonal a $\hat{y}$.
2. Sea W el espacio columna de B. Demuestre, usando el apartado anterior, que y es la suma de un vector de W y de un vector ortogonal al anterior.

```
Ejercicios adicionales:
Libro ‘‘Álgebra lineal y sus aplicaciones’’ de D.C. Lay. Capítulos 6.1--6.5 y 7.1
```