

INGENIERÍAS TÉCNICAS INDUSTRIALES

PROBLEMAS DE CÁLCULO I

UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID

Escuela Politécnica Superior

Departamento de Matemáticas

1 Números complejos.

Problema 1.1 Calcúlese:

$$\begin{array}{ll} a) & [(5 + 5i)/(3 - 4i)] + [20/(4 + 3i)] \\ b) & (3i^{30} - i^{19})/(2i - 1) \\ c) & [(1 - i)/(1 + i)]^5 \\ d) & i^{1/5} \\ e) & (-2\sqrt{3} - 2i)^{1/4} \\ f) & \sqrt{-25} \end{array}$$

Soluciones: a) $3 - i$; b) $1 + i$; c) $-i$; d) las cinco raíces son $e^{i\pi/10}$, $e^{i\pi/2}$, $e^{9i\pi/10}$, $e^{13i\pi/10}$, $e^{17i\pi/10}$; e) las cuatro raíces son $\sqrt{2}e^{7i\pi/24}$, $\sqrt{2}e^{19i\pi/24}$, $\sqrt{2}e^{31i\pi/24}$, $\sqrt{2}e^{43i\pi/24}$; f) $\pm 5i$.

Problema 1.2 Encuéntrense los valores de n que verifican la identidad $(1 + i)^n = (1 - i)^n$

Solución: $n = 4k$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Problema 1.3 Expresar los siguientes números complejos en la forma binómica $(a + ib)$:

$$\begin{array}{llll} a) & (1 + i)^2 & b) & \frac{1}{i} \\ c) & \frac{1}{1 + i} & d) & (2 + 3i)(3 - i4) \\ e) & i^5 + i^{16} & f) & \frac{1 + i}{1 - 2i} \\ g) & 1 + i + i^2 + i^3 & h) & e^{i\pi/2} \\ i) & e^{-i\pi/2} & j) & -e^{-i\pi} \\ k) & i + e^{2\pi i} & l) & e^{i\pi/4} \\ m) & e^{i\pi/6} - e^{-i\pi/6} & & \end{array}$$

Soluciones: a) $2i$; b) $-i$; c) $(1 - i)/2$; d) $18 + i$; e) $1 + i$; f) $(-1 + 3i)/5$; g) 0 ; h) i ; i) $-i$; j) 1 ; k) 2 ; l) $(1 + i)/\sqrt{2}$; m) i .

Problema 1.4 Calcular los módulos de los siguientes números complejos:

$$\begin{array}{lll} a) & 1 + i & b) \frac{1 + i}{1 - i} \\ c) & 3 + 4i & \\ d) & 1 + i + i^2 & e) 2(1 - i) + 3(2 + i) \\ f) & i^7 + i^{10} & \end{array}$$

Soluciones: a) $\sqrt{2}$; b) 1 ; c) 5 ; d) 1 ; e) $\sqrt{65}$; f) $\sqrt{2}$.

Problema 1.5 Calcular el módulo y el argumento principal de:

$$\begin{array}{llll} a) & 2i & b) & -3i \\ c) & 3 - i & d) & \frac{1}{1 + i} \\ e) & -3 + \sqrt{3}i & f) & \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i) \\ g) & (-1 + i)^3 & h) & \frac{1}{1 + i} \end{array}$$

Soluciones: a) $r = 2$, $\theta = \pi/2$; b) $r = 3$, $\theta = -\pi/2$; c) $r = \sqrt{10}$, $\theta = -\arctan(1/3)$; d) $r = 1$, $\theta = 0$; e) $r = 2\sqrt{3}$, $\theta = 5\pi/6$; f) $r = 1$, $\theta = \pi/4$; g) $r = 2\sqrt{2}$, $\theta = \pi/4$; h) $r = \sqrt{2}/2$, $\theta = -\pi/4$.

Problema 1.6 Determinar todos los números reales x, y que satisfacen:

$$\begin{array}{ll} a) & x + iy = x - iy \\ b) & |x + iy| = |x - iy| \\ c) & x + iy = |x + iy| \\ d) & (x + iy)^2 = (x - iy)^2 \\ e) & \frac{x + iy}{x - iy} = x - iy \end{array}$$

Soluciones: a) $x \in \mathbb{R}$, $y = 0$; b) $x, y \in \mathbb{R}$; c) $x \geq 0$, $y = 0$; d) $x \in \mathbb{R}$, $y = 0$ ó $x = 0$, $y \in \mathbb{R}$; e) $x = -1/2$, $y = \pm\sqrt{3}/2$ ó $x = 1$, $y = 0$.

Problema 1.7 Encontrar los z del plano complejo que satisfacen:

$$a) \quad |z| < 1 \quad b) \quad z + \bar{z} = 1 \quad c) \quad |z - 1| = 1 \quad d) \quad |z - 1| > 3$$

Soluciones: a) $x^2 + y^2 < 1$; b) $z = 1/2 + iy$; c) $(x - 1)^2 + y^2 = 1$; d) $(x - 1)^2 + y^2 > 9$.

Problema 1.8 Determinar todas las soluciones de las siguientes ecuaciones:

$$a) \quad z^3 = i \quad b) \quad z^4 = 1 \quad c) \quad z^4 = i \quad d) \quad z^n = 1 \quad (n \text{ entero})$$

Soluciones: a) $e^{i\pi/6}, e^{5i\pi/6}, e^{9i\pi/6}$; b) $1, i, -1, -i$; c) $e^{i\pi/8}, e^{5i\pi/8}, e^{9i\pi/8}, e^{13i\pi/8}$; d) $1, e^{2i\pi/n}, e^{4i\pi/n}, e^{6i\pi/n}, \dots, e^{2(n-1)i\pi/n}$.

Problema 1.9 Comprobar las siguientes igualdades:

$$a) \quad \log(-1) = i\pi \quad b) \quad \log(i) = i\frac{\pi}{2} \quad c) \quad \log 1 = 0$$

Problema 1.10 Calcular

$$a) \quad 1^i \quad b) \quad (-1)^i$$

Soluciones: a) 1 ; b) $e^{-\pi}$.

Problema 1.11 Comprobar si es cierto: $i^i = e^{-\pi/2} \in \mathbb{R}$.

Problema 1.12 Aplicar el teorema de De Moivre en las siguientes potencias:

$$a) \quad (1 + i)^{20} \quad b) \quad (2\sqrt{3} + 2i)^5$$