INGENIERÍAS TÉCNICAS INDUSTRIALES

PROBLEMAS DE CÁLCULO I

UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID

Escuela Politécnica Superior

Departamento de Matemáticas

6 Examenes de cursos anteriores.

Examen del 3 de Febrero de 1995

1. Considérese la función $f(x) = 2\,x - 3\,x^{2/3}$.

(a) Estúdiese su continuidad y derivabilidad.

(b) ¿Cumple esta función las hipótesis del Teorema del valor medio en el intervalo $[-1, 1]$?

(c) Hallar los máximos y mínimos absolutos de esta función en el intervalo $[-5, 5]$.

(2 puntos)

---

2. (a) Enúnciese el Teorema Fundamental del Cálculo. Aplicar este Teorema para encontrar la derivada de la función

$$F(x) = \int_0^{x^9} \operatorname{sen} t^{2/4}\,dt\,.$$

(b) Hallar $\lim\limits_{x\to 0} x^{-5/2}\,F(x)$.

(c) Calcular

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x + \cos x}\,.$$

(3 puntos)

---

3. Sea la función $f(x) = x\,e^{-n}$.

(a) Represéntela gráficamente, estudiando el crecimiento, cofcavidad, y asíntotas.

(b) Calcular el volumen del sólido de revolución obtenido al hacer girar en torno del eje OX, el área contenida en el primer cuadrante que limitan la gráfica de $f(x) = x\,e^{-x}$ y el propio eje OX.

(3 puntos)

---

4. Aproximar la función $f(x) = \log(1 + \cos x)$ alrededor del origen mediante un polinomio de grado dos. Encontrar también una expresión para el término de error (Resto de Taylor).

(1 punto)

---

5. Considérese la sucesión definida por recurrencia de la siguiente forma:

$$3\,a_{n+1} = 2 + a_n^3\,, \qquad a_1 = -\frac{3}{2}\,.$$

Pruébese que tal sucesión es monótona creciente y acotada superiormente por $K = 1$. Calcúlese su límite.

Examen del 15 de Septiembre de 1995

1. Calcular:

(a) $$\int_2^\infty \frac{1+x}{x^3-2x^2+x}\, dx\,.$$

(b) $$\lim_{x\to 1} \frac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}\,.$$

(3 puntos)

---

2. Demostrar que la ecuacion $f(x)=0$, donde

$$f(x)=x^3-2x^2+3x-5=0\,,$$

tiene una única raíz real. Explique en qué teoremas se apoya para asegurarlo.

(2 puntos)

---

3. Sea la función $f(x)=1/(1+e^{-x})$.

(a) Represéntela gráficamente, estudiando el crecimiento, concavidad, y asíntotas.

(b) Calcúlese el área del conjunto determinado por la curva $y=f(x)$ y las rectas $y=1$, $x=0$.

(3 puntos)

---

4. Sea $\{x_n\}$ la sucesión de números reales definida por recurrencia mediante la regla

$$x_{n+1}=\frac{x_n^2+2}{2x_n}\,, \qquad x_1=2\,.$$

(a) Probar que $\{x_n\}$ es decreciente y está acotada inferiormente por $\sqrt{2}$.

(b) Hallar $\lim_{n\to\infty} x_n$.

(2 puntos)

Exámen del 14 de Febrero de 1996

1. **(2.5 puntos)** Dada la función

$$f(x) = \left\{ \frac{1}{|x|} \qquad \text{si} \qquad |x| > 2; \qquad \alpha + \beta x^2 \qquad \text{si} \qquad |x| \leq 2 \right\},$$

calcular α y β para que dicha función sea continua y derivable en $\mathbb{R}$.

2. **(2.5 puntos)** Sea

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2}.$$

(a) Representar la gráfica de dicha función.

(b) ¿Es finita el área encerrada por esta curva en el intervalo $[2, 4]$? Razona la respuesta.

3. **(2.5 puntos)** (a) Enunciar el teorema fundamental del cálculo infinitesimal.

(b) Sea la función

$$F(x) = \int_0^x (1 - \sqrt{\cos t})\, dt.$$

Calcular su desarrollo de Taylor alrededor de $x = 0$ (McLaurin) hasta orden tercero inclusive.

(c) Calcular el límite

$$\lim_{x \to 0} \frac{F(x)}{x^3 + x^5}.$$

4. **(2.5 puntos)** Calcular:

(a) $\lim_{x \to 0} (1 + x^2)^{\frac{1}{1 - \cos x}}$.

(b) $\displaystyle\int_{ln2}^{ln3} \frac{1}{e^{2x} + e^x - 2}\, dx.$

Examen del 2 de Septiembre de 1996

1. **(3 puntos)** (a) Se considera la sucesión de números reales definida por

$$x_1 = 1, \qquad x_n = \frac{x_{n-1}(1 + x_{n-1})}{1 + 2x_{n-1}} .$$

   Demostrar que es convergente y calcular su límite.

   (b) Calcular

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(e^{\frac{1}{n}} - e^{\operatorname{sen}\frac{1}{n}})}{1 - n \operatorname{sen}\frac{1}{n}} .$$

2. **(3 puntos)** (a) Calcular el siguiente límite (si es que existe):

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{2 + \operatorname{sen}\frac{1}{x}} .$$

   (b) Hallar aproximadamente las raíces x_j ($j = 1, \ldots N$, donde N es el número de raíces) de $e^x + x = 0$ de tal manera que cada raíz esté situada dentro de un intervalo de longitud menor que 2.

   (c) Determinar el valor de $e^{-\frac{1}{4}}$ con error menor que 0.01 utilizando un desarollo de Taylor apropiado.

3. **(2 puntos)** Representar la gráfica de la función:

$$f(x) = \cos 2x + 2 \operatorname{sen} x \qquad [\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x].$$

4. **(2 puntos)** Calcular:

   (a) $\displaystyle\int x^3 \operatorname{sen} 2x \, dx$.

   (b) Calcular el área encerrada por las curvas: $y^2 = x$, $2y^2 = 3 - x$.

Control del 7 de Noviembre de 1996 (A)

Problema 1. Calcular: $\dfrac{2}{1-i} + e^{1+2\pi i}$

Problema 2. Calcular: $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + i\,\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{i}$

Calcular los siguientes límites:

Problema 3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+1)^2}{(3n-1)^2}$

Problema 4. $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^{2n-1}\,\dfrac{n^2-1}{2^n-1}$

Problema 5. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+3}-\sqrt{n})\,\dfrac{2n^{3/2}-1}{2n+1}$

Problema 6. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{3n^2+n-1}{3n^2+2}\right]^{\frac{n^2+1}{n-1}}$

Problema 7. Demostrar mediante el principio de inducción:

$$(1+x)^n \geq 1+nx \qquad \forall n \in \mathbb{Z}^+ \qquad\qquad (x \geq -1)$$

Problema 8. Demostrar que la siguiente sucesión $\{x_n\}$ es monótona y acotada.

$$\begin{cases} x_1 & = & \frac{1}{2} \\ x_{n+1} & = & x_n^2 - x_n + 1 \end{cases}$$

Problema 9. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, siendo $\{x_n\}$ la sucesión del problema 9.

Control del 7 de Noviembre de 1996 (B)

Problema 1. Calcular: $\dfrac{5}{2+i} + e^{2+\pi i}$

Problema 2. Calcular: $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} - i\,\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2i}$

Calcular los siguientes límites:

Problema 3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(3n+n)^3}{(2n-1)^3}$

Problema 4. $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n\, \dfrac{1-n^2}{n!-1}$

Problema 5. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n})\, \dfrac{n^{3/2}+2}{3n-1}$

Problema 6. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{2n^2+n-2}{2n^2-1}\right]^{\frac{2n^2+1}{n-1}}$

Problema 7. Demostrar mediante el principio de inducción:

$$3^n \geq 1 + 2n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

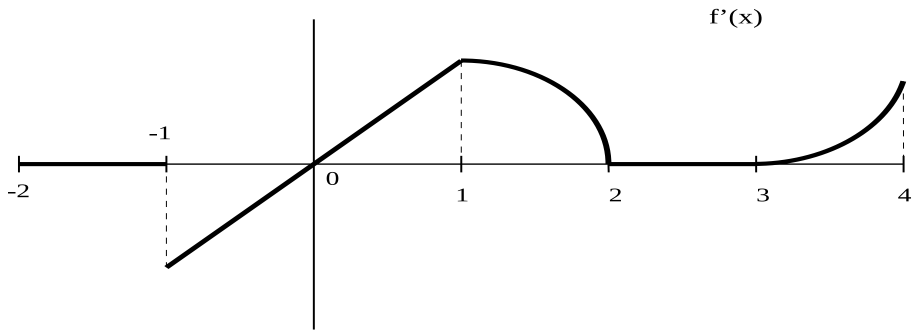
Problema 8. Demostrar que la siguiente sucesión $\{x_n\}$ es monótona y acotada.

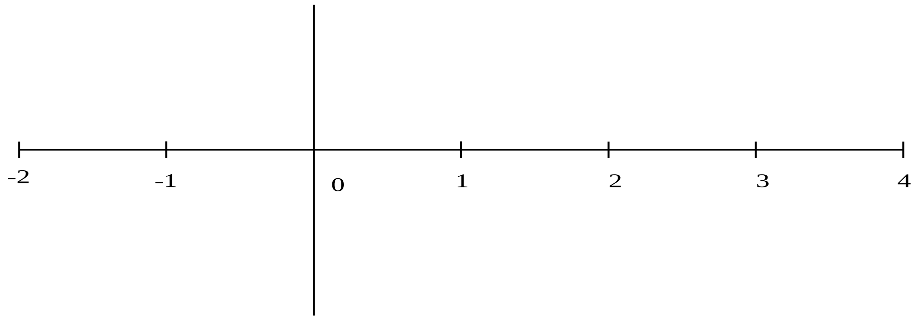
$$\begin{cases} x_1 & = & \frac{3}{2} \\ x_{n+1} & = & x_n^2 - 3x_n + 4 \end{cases}$$

Problema 9. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, siendo $\{x_n\}$ la sucesión del problema 9.

Control del 19 de Diciembre de 1996 (A)

1. Representar aproximadamente la función $f(x)$ tal que, $f(0) = 0$ y cuya derivada $f'(x)$ tiene por gráfica:





---

2. Calcular la derivada de: $f(x) = \operatorname{arctg}\,(\operatorname{sen} x^2)$

3. Calcular el siguiente límite: $\lim_{x\to 1} \left(\operatorname{tg}\, \dfrac{\pi x}{4}\right)^{\operatorname{tg}\, \frac{\pi x}{2}}$

4. Sea la función: $f(x) = x^4\, e^x$

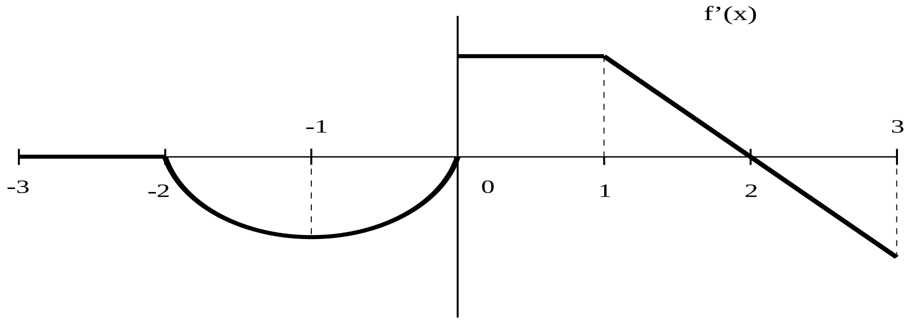
Determinar si $f(x)$ tiene un máximo, un mínimo o un punto de inflexión en $x = 0$

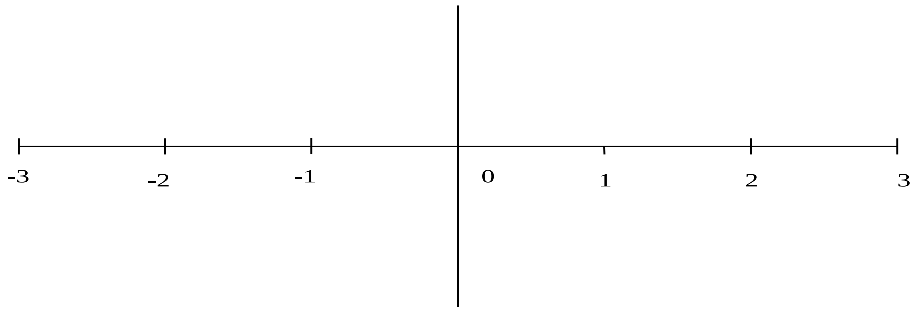
5. Calcular aproximadamente el valor de: $\operatorname{sen} 1$

mediante el polinomio de Taylor de grado 3 de alguna función y estimar el error cometido.

Control del 19 de Diciembre de 1996 (B)

1. Representar aproximadamente la función $f(x)$ sabiendo que: $f(x)$ es continua, $f(0) = 0$ y su derivada $f'(x)$ tiene por gráfica:





---

2. Calcular la derivada de: $f(x) = \text{arcsen } (\cos x^{-1})$

3. Calcular el siguiente límite: $\lim_{x\to\infty} x(b^{1/x} - 1)$; $(b > 0)$

4. Sea la función: $f(x) = x^3(x-2)^2$

Hallar los puntos críticos de $f(x)$ y determinar si son máximos, mínimos o puntos de inflexión.

5. Calcular aproximadamente el valor de: $e^{-0.1}$

mediante el polinomio de Taylor de grado 3 de alguna función y estimar el error cometido.

Examen del 31 de Enero de 1997

Problema 1. (2 Puntos)

- **(a) (0.5 Puntos)** Escribir el polinomio de Taylor de orden 4 en $x = 0$ de la función,

$$f(x) \,=\, \cos x \,+\, \frac{x^2}{2}$$

- **(b) (0.5 Puntos)** Escribir el polinomio de Taylor de orden 3 en $x = 0$ de la función,

$$g(x) \,=\, \operatorname{sen} x \,-\, x$$

- **(c) (1 Punto)** Calcular el siguiente límite,

$$\lim_{x \to 0} \left(\cos x \,+\, \frac{x^2}{2} \right)^{\frac{1}{x\,[\operatorname{sen} x \,-\, x]}}$$

Problema 2. (2 Puntos) Representar la función,

$$y \,=\, \frac{x^2}{\sqrt{x^2 \,-\, 1}}$$

Problema 3. (2 Puntos) Dada la integral,

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{(x^2 \,-\, 2\,x \,+\, 5)^{\alpha}}$$

- **(a) (1 Punto)** Estudiar la convergencia en función del parámetro α.
- **(b) (1 Punto)** Calcular dicha integral en el caso $\alpha = 1$.

Problema 4. (2 Puntos) Hallar el área de la región del plano limitada por la elipse,

$$\frac{x^2}{16} \,+\, \frac{y^2}{9} \,=\, 1$$

Cuestiones. (2 Puntos)

1. **(0.5 Puntos)** Definir,

   - (a) Límite de una función, $f(x)$, en un punto a: $\lim_{x \to a} f(x) = l$
   - (b) Continuidad de una función, $f(x)$, en un punto a
   - (c) Derivabilidad de una función, $f(x)$, en un punto a

   Para la función,

   $$f(x) = \begin{cases} x & x \leq 1 \\ b + c(x-1) + (x-1)^2 & x > 1 \end{cases}$$

   Calcular,

   - (d) Valor de b para que sea continua en $x = 1$
   - (e) Valor de c para que sea derivable en $x = 1$

2. **(0.5 Puntos)** Si el término independiente de un polinomio en x es -5, y el valor del polinomio en $x = 3$ es 7, razonar que existe algún punto del intervalo $[0, 3]$, en el que el polinomio toma el valor 2.

3. **(0.5 Puntos)** Calcular $F'(x)$ siendo,

   $$F(x) = \int_1^{a^{x^2}} \operatorname{sen} t \, dt$$

Examen del 5 de Septiembre de 1997

Problema 1. (1 Punto)

- **(a) (0.5 Puntos)** Dado el número complejo, $z = e^{i\pi/4}$, calcular $|e^{iz}|$
- **(b) (0.5 Puntos)** Calcular la parte real e imaginaria de

$$\ln{(-1 + i)}^{1+i}$$

Problema 2. (2 Puntos) Calcular los siguientes límites,

- **(a) (1 Punto)**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3/n}{\ln{(n/(n-1))}}$$

- **(b) (1 Punto)**

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$$

Problema 3. (1 Punto) Sea $\{x_n\}$ la sucesión de números reales definida por recurrencia mediante la regla,

$$x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}} \quad \text{si } n \geq 2, \qquad x_1 = 3$$

- **(a) (0.5 Puntos)** Demostrar por inducción que $\{x_n\}$ es monótona decreciente y acotada.
- **(b) (0.5 Puntos)** Demostrar que es convergente y calcular su límite.

Problema 4. (2 Puntos) Calcular las siguientes primitivas,

- **(a) (1 Punto)**:

$$\int e^x \cos 2x \, dx \, .$$

- **(b) (1 Punto)**:

$$\int \frac{x^2 + x + 10}{x^3 + x^2 - 5x + 3} \, dx \, .$$

Problema 5. (2 Puntos) Representar la función,

$$y = \frac{x^2 - 4}{x + 1}$$

Cuestiones. (2 Puntos)

1. **(0.5 Puntos)** Definir función integrable en $[a, b]$.
2. **(0.5 Puntos)** Enunciar el Teorema Fundamental del Cálculo (relación entre cálculo diferencial e integral)
3. **(0.5 Puntos)** Determinar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones
   - f no integrable $\Rightarrow$ f no está acotada
   - f no integrable $\Rightarrow$ f no es continua
   - f no integrable $\Rightarrow$ f no es monótona
4. **(0.5 Puntos)** Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1) \\ 1 - x, & x \in [1, 2] \end{cases}$$

   - ¿Posee primitivas en $[0, 2]$?
   - ¿Posee integrales indefinidas en $[0, 2]$?

Control del 20 de Noviembre de 1997 (A)

Problema 2. Demostrar por inducción la siguiente fórmula,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$$

Problema 3. Obtener el valor principal de,

$$z = \frac{i^{1+i}}{1+i}$$

Problema 4. Calcular el siguiente límite,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2}{n^3}$$

Problema 5. Se considera la sucesión de números reales definida por,

$$x_1 = 2, \qquad x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 3}{4}$$

demostrar que es convergente y calcular su límite.

Cuestiones.

1. Definir límite de una sucesión.
2. Enunciar el Teorema que relaciona convergencia, monotonía y acotación.
3. Demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{n!} = 0$$

Control del 20 de Noviembre de 1997 (B)

Problema 2. Demostrar por inducción la siguiente fórmula,

$$\sum_{k=1}^{n} k!\,k \;=\; (n+1)!\;-\;1$$

Problema 3. Obtener el valor principal de,

$$z \;=\; \frac{i^i}{1-i}$$

Problema 4. Calcular el siguiente límite,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+3+\ldots+n}{n} \;-\; \frac{n}{2}$$

Problema 5. Se considera la sucesión de números reales definida por,

$$x_1 \;=\; 4, \qquad x_{n+1} \;=\; \frac{x_n^2\;+\;6}{7}$$

demostrar que es convergente y calcular su límite.

Cuestiones.

1. Definir límite de una función en un punto.
2. Enunciar el Teorema del Valor Intermedio.
3. Demostrar que la ecuación,

   $$\operatorname{sen} x\;+x^2\;-\;1\;=\;0$$

   tiene al menos una raíz en el intervalo $[0,\pi/2]$.

Examen del 31 de Enero de 1998

Problema 1. (1 Punto) Calcular el límite de la siguiente sucesión,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{21\,\mathrm{sen}\left(\frac{3}{n}\right)\,\ln\left(1\,+\,\tan^2\left(\frac{5}{n}\right)\right)}{\arctan\left(\frac{7}{n}\right)\,\left(1\,-\,\cos\left(\frac{3}{n}\right)\right)}$$

Problema 2. (2 Puntos) Representar la función,

$$y\,=\,x^2\,e^{-x^2}$$

Problema 3. (2 Puntos) Calcular el volumen del sólido generado al girar la curva,

$$y\,=\,\frac{x^2}{\sqrt{x^2\,-\,2\,x\,+\,5}}, \qquad x\,\in\,[0,1]$$

en torno al eje OX.

Problema 4. (2 Puntos) Resolver los siguientes ejercicios:

1. **(0.5 Puntos)** Calcular $(1\,+\,i)\,e^{\ln(\sqrt{2})\,-\,(\pi/4)\,i}$
2. **(0.5 Puntos)** Calcular el valor de x donde se alcanza un mínimo de la función,

$$\int_0^x \frac{t\,-\,1}{t^2\,+\,1}\,dt$$

3. **(0.5 Puntos)** Calcular el área de un cono de radio R y altura h.

Cuestiones. (2 Puntos)

1. **(0.5 Puntos)** Definir el Polinomio de Taylor de grado n para la función $f(x)$ en el punto $x = a$.
2. **(0.5 Puntos)** Escribir la expresión de la forma de Lagrange del resto.
3. **(0.5 Puntos)** Calcular $e^{-0.2}$ utilizando el correspondiente Polinomio de Taylor de grado 2 para $a = 0$.
4. **(0.5 Puntos)** Acotar el error cometido en el cálculo anterior utilizando la forma de Lagrange del resto.

Examen del 7 de Septiembre de 1998

Problema 1. (2 Puntos) Representar la función

$$y = \frac{e^x\,(x + 1)}{x - 1}$$

indicando dominio de definición, asíntotas, ceros, máximos y mínimos.

Problema 2. (2 Puntos) Calcular las siguientes primitivas:

- **(a) (1 Punto)**: $\displaystyle\int \operatorname{sen}\left[\ln(x)\right] dx$.
- **(b) (1 Punto)**: $\displaystyle\int \operatorname{sen}(3x)\, \cos(2x)\, dx$.

Problema 3. (2 Puntos) Dada la función $F(x) = \displaystyle\int_1^{x^2} e^{\sqrt{t}\,-\,1}\, dt$, se pide

- **(1 Punto)** Escribir el polinomio de Taylor de grado dos en el punto $x = 1$.
- **(0.5 Puntos)** Calcular, utilizando el resultado anterior, un valor numérico aproximado de $F(5/4)$.
- **(0.5 Puntos)** Calcular una cota superior del error cometido en la aproximación.

Problema 4. (2 Puntos)

- **(1 Punto)** Calcular $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x - 1}{x + 1}\right)^x$.
- **(1 Punto)** Calcular las tres raíces cúbicas del valor principal del número complejo

$$z = \log\left[\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, i\right)^2\right]$$

Problema 5. (2 Puntos)

- **(1.5 Puntos)** Hallar, donde exista, la derivada de la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

  Indicar el dominio de existencia. ¿Es f' continua en $x = 0$? ¿Es derivable en $x = 0$?

- **(0.5 Puntos)** Utilizar el Teorema del Valor Intermedio para demostrar que $f(x) = x^2 - x \operatorname{sen} x - \cos x$, tiene dos raíces reales.