

**INGENIEROS INDUSTRIALES Y DE TELECOMUNICACIONES**

**PROBLEMAS DEL CURSO CERO DE MATEMATICAS**

**Elaborados por Domingo Pestana Galván  
y José Manuel Rodríguez García**

**UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID  
Escuela Politécnica Superior  
Departamento de Matemáticas**

## 4. Continuidad

4.1. Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

- 1)  $f(x) = -5x^7 + 8x^4 + 189 - 5 \operatorname{sen} x$ .
- 2)  $g(x) = -x^5 + 81x^3 - \arctan e^x - 3 \operatorname{sen}^3(\cos^2 x)$ .
- 3)  $h(x) = \frac{x^3 - 5x^2 - x + 8}{x^4 + 5}$ .
- 4)  $u(x) = \frac{2^{5x^2+x-3} \cos(x^2 - x + 8)}{x^4 + 5 \operatorname{sen}^2 x + 1}$ .
- 5)  $v(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 5} + 7^{x+e^x} \arctan(e^{\cos x}) + \cos(\operatorname{sen}(2^x - 5))$ .

**Solución:** Todas son continuas en  $\mathbb{R}$ .

4.2. Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

- 1)  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 5}}{(x^2 - 4x + 3)\sqrt{x^2 + 3}}$ .
- 2)  $g(x) = x^7 - 4 + \cos(-5/x)$ .
- 3)  $h(x) = \cos x \operatorname{cotan}(7x - 5)$ .
- 4)  $u(x) = \sqrt{x^2 - 9x + 8}$ .
- 5)  $v(x) = (\arccos x)^2 - 7 \arccos x - 5x + 3$ .
- 6)  $w(x) = e^{\cos x} \log(2x + 1)$ .
- 7)  $y(x) = \cos(3x + 9\pi) \log x - 5 \operatorname{arc} \operatorname{sen} x$ .

**Solución:** 1)  $f$  es continua en  $\mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$ . 2)  $g$  es continua en  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . 3)  $h$  es continua en los puntos que no son de la forma  $(5 + \pi k)/7$ , con  $k$  un número entero. 4)  $u(x)$  es continua en  $(-\infty, 1] \cup [8, \infty)$ . 5)  $v(x)$  es continua en  $[-1, 1]$ . 6)  $w$  es continua en  $(-1/2, \infty)$ . 7)  $y$  es continua en  $(0, 1]$ .

4.3. Prueba que si  $f(x)$  es continua en  $\mathbb{R}$ , entonces  $g(x) = \arctan(f(x))$  es continua en  $\mathbb{R}$ .

4.4. Prueba que si  $f(x)$  es continua en  $\mathbb{R}$  y  $f(x) > 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , entonces  $g(x) = 1/\sqrt{f(x)}$  es continua en  $\mathbb{R}$ .

4.5. Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

$$1) f(x) = \log \cos x, \quad 2) g(x) = \log \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 1}.$$

**Solución:** 1) es continua en su dominio  $\cup_{k \in \mathbb{Z}} (-\pi/2 + 2k\pi, \pi/2 + 2k\pi)$ ; 2) es continua en su dominio  $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ .

4.6. Estudia la continuidad de las siguientes funciones, indicando cuándo tienen discontinuidades evitables.

$$\begin{aligned}
1) \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{x^2 - 11x + 18}{x^3 - 2x^2 + 3x - 6}, & \text{si } x \neq 2, \\ -1, & \text{si } x = 2. \end{cases} \\
2) \quad g(x) &= \begin{cases} 5 + \frac{x^2 + 6x + 9}{x + 3}, & \text{si } x \neq -3, \\ -2, & \text{si } x = -3. \end{cases} \\
3) \quad h(x) &= \begin{cases} x^2 \arctan \frac{8}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases} \\
4) \quad u(x) &= \begin{cases} -|\operatorname{sen} x| - 4, & \text{si } x < \pi, \\ |\operatorname{cos} x| - 5, & \text{si } x \geq \pi. \end{cases} \\
5) \quad v(x) &= \begin{cases} \operatorname{cos} x, & \text{si } x < 0, \\ |x^2 + 5x - 1|, & \text{si } x \geq 0. \end{cases} \\
6) \quad w(x) &= \begin{cases} x^2 - x + \arctan x, & \text{si } x < 0, \\ \operatorname{cos}(3x^2 - 5x) + 2^x, & \text{si } x \geq 0. \end{cases} \\
7) \quad y(x) &= \begin{cases} \arctan x, & \text{si } x \leq 0, \\ \operatorname{sen}(\pi x), & \text{si } 0 < x < 1, \\ |x^2 - 5x + 4|, & \text{si } x \geq 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

**Solución:** 1)  $f(x)$  es continua en  $\mathbb{R}$ . 2)  $g(x)$  es continua en  $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$  y tiene en  $-3$  una discontinuidad evitable. 3)  $h(x)$  es continua en  $\mathbb{R}$ . 4)  $u(x)$  es continua en  $\mathbb{R}$ . 5)  $v(x)$  es continua en  $\mathbb{R}$ . 6)  $w(x)$  es continua en  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  7)  $y(x)$  es continua en  $\mathbb{R}$ .

**4.7.** Halla

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \operatorname{arc} \operatorname{sen} \left( \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 7x + 6} \right). \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{cos} \left( (1 + x^2)^{-7/x^3} \right).$$

**Solución:** 1)  $\operatorname{arc} \operatorname{sen} 0 = 0$ . 2)  $\operatorname{cos} 0 = 1$ .

**4.8.** Prueba que la función  $F(x) = g(f(x))$  es continua en  $\mathbb{R}$ , donde

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(\pi x) + 1, & \text{si } x < 5, \\ x^2 - 24, & \text{si } x \geq 5, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} e^x, & \text{si } x < 0, \\ |x - 1|, & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

**4.9.** Prueba que la siguiente función es continua en  $\mathbb{R}$ :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0, \\ e^{-1/x}, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$