INGENIEROS INDUSTRIALES Y DE TELECOMUNICACIONES

PROBLEMAS DEL CURSO CERO DE MATEMATICAS

Elaborados por Domingo Pestana Galván

y José Manuel Rodríguez García

UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID

Escuela Politécnica Superior

Departamento de Matemáticas

5. Derivadas

Halla las derivadas de las siguientes funciones:

5.1. $f(x) = 2x^3 - x^2 - 5x + 21\pi$.

Solución: $f'(x) = 6x^2 - 2x - 5$.

5.2. $g(x) = (\log x)^7$.

Solución: $g'(x) = \dfrac{7(\log x)^6}{x}$.

5.3. $h(x) = e^x \operatorname{sen} x$.

Solución: $h'(x) = e^x(\operatorname{sen} x + \cos x)$.

5.4. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$.

Solución: $f'(x) = \dfrac{-4x}{(x^2-1)^2}$.

5.5. $g(x) = xe^x \cos x$.

Solución: $g'(x) = e^x(\cos x + x\cos x - x \operatorname{sen} x)$.

5.6. $f(x) = \sqrt{\cos x - e^{2x}}$.

Solución: $f'(x) = \dfrac{-\operatorname{sen} x - 2e^{2x}}{2\sqrt{\cos x - e^{2x}}}$.

5.7. $g(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$.

Solución: $g'(x) = \dfrac{1}{(x-1)^{1/2}(x+1)^{3/2}}$.

5.8. $g(x) = \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$.

Solución: $g'(x) = \dfrac{1}{(\sqrt{x}+1)^2\sqrt{x}}$.

5.9. $h(x) = \sec \sqrt{x}$.

Solución: $h'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \sec \sqrt{x} \tan \sqrt{x}$.

5.10. $u(x) = \log \operatorname{sen} x$.

Solución: $u'(x) = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \operatorname{cotan} x$.

5.11. $v(x) = \dfrac{\operatorname{arc\,sen} x}{\log x}$.

Solución: $v'(x) = \dfrac{x \log x - \sqrt{1-x^2}\ \operatorname{arc\,sen} x}{x\sqrt{1-x^2}\,(\log x)^2}$.

5.12. $w(x) = \operatorname{arc\,sen} e^x$.

Solución: $w'(x) = \dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$.

5.13. $y(x) = \arccos(\sqrt{x})$.

Solución: $y'(x) = \dfrac{-1}{2\sqrt{x-x^2}}$.

5.14. $a(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\operatorname{sen} x + \cos x}$.

Solución: $a'(x) = \dfrac{2}{(\operatorname{sen} x + \cos x)^2}$.

5.15. $b(x) = 3^{\operatorname{arc\,sen} \sqrt{1-x^2}}$.

Solución: $b'(x) = \dfrac{-\log 3}{\sqrt{1-x^2}}\, 3^{\operatorname{arc\,sen}\sqrt{1-x^2}}$, si $x > 0$;
$b'(x) = \dfrac{\log 3}{\sqrt{1-x^2}}\, 3^{\operatorname{arc\,sen}\sqrt{1-x^2}}$, si $x < 0$.

5.16. $f(x) = \sqrt[7]{(e^x + \log x)^{13}}$.

Solución: $f'(x) = \dfrac{13}{7}\Big(e^x + \dfrac{1}{x}\Big)(e^x + \log x)^{6/7}$.

5.17. Halla la derivada de $f(x) = x^{\log x}$, calculando primero la derivada de $g(x) = \log f(x)$.

Solución: $g(x) = (\log x)^2$, $g'(x) = \dfrac{2\log x}{x}$, $f'(x) = 2x^{\log x - 1}\log x$.

5.18. Halla la recta tangente a la gráfica de la función $G(x) = e^x + \log(x+1)$ en el punto $x = 0$.

Solución: $y = G(0) + G'(0)(x-0) = 1 + 2(x-0) = 2x+1$.

5.19. Estudia la derivabilidad de las siguientes funciones y calcula su derivada en los puntos en que sean derivables:

$$1)\ \ f(x) = x^{1/7}. \qquad 2)\ \ g(x) = \arccos x\,. \qquad 3)\ \ h(x) = |x^2 - 4|\,.$$

Solución: 1) $f'(x) = \dfrac{1}{7}\,x^{-6/7}$ si $x \neq 0$. $f'(0) = \infty$. 2) $g'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ si $x \in (-1,1)$. $g'_+(-1) = g'_-(1) = -\infty$. 3) $h'(x) = 2x$ si $x \in (-\infty,-2) \cup (2,\infty)$; $h'(x) = -2x$ si $x \in (-2,2)$. No existen $h'(-2)$ ni $h'(2)$.

5.20. Estudia la derivabilidad de las siguientes funciones definidas a trozos y calcula su derivada en los puntos en que sean derivables:

$$1)\ \ f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x\,, & \text{si } x \leq 0\,, \\ x\,, & \text{si } 0 < x < 2\,, \\ e^x, & \text{si } x \geq 2\,. \end{cases} \qquad 2)\ \ g(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{si } x \leq 0\,, \\ e^{-1/x}, & \text{si } x > 0\,. \end{cases}$$

Solución: 1) $f'(x) = \cos x$ si $x \in (-\infty,0)$; $f'(x) = 1$ si $x \in (0,2)$; $f'(x) = e^x$ si $x \in (2,\infty)$. $f'(0) = 1$ y no existe $f'(2)$. 2) $g'(x) = x^{-2}e^{-1/x}$ si $x \in (0,\infty)$; $g'(x) = 0$ si $x \in (-\infty,0)$. $g'(0) = 0$.

5.21. Halla las derivadas de las siguientes funciones usando la definición de derivada:

$$a)\ 7\,, \qquad b)\ 3x\,, \qquad c)\ 2x^2\,, \qquad d)\ x^3\,.$$

Solución: $a)$ 0 , $b)$ 3 , $c)$ $4x$, $d)$ $3x^2$.