INGENIEROS INDUSTRIALES Y DE TELECOMUNICACIONES

PROBLEMAS DEL CURSO CERO DE MATEMATICAS

Elaborados por Domingo Pestana Galván

y José Manuel Rodríguez García

UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID

Escuela Politécnica Superior

Departamento de Matemáticas

6. Representaciones gráficas

6.1. Representa $f(x) = x^4 - x^2$.

Solución: Decreciente en $(-\infty, -1/\sqrt{2}\,)$ y en $(0, 1/\sqrt{2}\,)$, creciente en $(-1/\sqrt{2}\,, 0)$ y en $(1/\sqrt{2}\,, \infty)$; punto máximo local $x = 0$, puntos mínimos absolutos $x = \pm 1/\sqrt{2}$; convexa en $(-\infty, -1/\sqrt{6}\,)$ y en $(1/\sqrt{6}\,, \infty)$, cóncava en $(-1/\sqrt{6}\,, 1/\sqrt{6}\,)$; puntos de inflexión $x = \pm 1/\sqrt{6}$.

6.2. Representa $f(x) = \dfrac{x+2}{(x-1)^3}$.

Solución: Asíntota horizontal $y = 0$ para $x \to \pm\infty$, asíntota vertical en $x = 1$; creciente en $(-\infty, -7/2)$, decreciente en $(-7/2, 1)$ y en $(1, \infty)$; punto máximo local $x = -7/2$; cóncava en $(-5, 1)$, convexa en $(-\infty, -5)$ y en $(1, \infty)$; punto de inflexión $x = -5$.

6.3. Representa gráficamente $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.

Solución: Asíntota horizontal $y = 1$ para $x \to \pm\infty$; decreciente en $(-\infty, 0)$ y creciente en $(0, \infty)$; punto mínimo absoluto $x = 0$; cóncava en $(-\infty, -1/\sqrt{3}\,)$ y en $(1/\sqrt{3}\,, \infty)$, convexa en $(-1/\sqrt{3}\,, 1/\sqrt{3}\,)$; puntos de inflexión $x = \pm 1/\sqrt{3}$.

6.4. Representa gráficamente $y = \dfrac{1}{1+e^x}$.

Solución: Asíntotas horizontales $y = 0$ para $x \to \infty$, $y = 1$ para $x \to -\infty$, decreciente en todo $\mathbb{R}$, cóncava en $(-\infty, 0)$, convexa en $(0, \infty)$, punto de inflexión $x = 0$.

6.5. Representa gráficamente $y = x^2 e^x$.

Solución: Asíntota horizontal $y = 0$ para $x \to -\infty$; creciente en $(-\infty, -2)$ y en $(0, \infty)$, decreciente en $(-2, 0)$; punto máximo local $x = -2$, punto mínimo absoluto $x = 0$; convexa en $(-\infty, -2-\sqrt{2})$ y en $(-2+\sqrt{2}, \infty)$, cóncava en $(-2-\sqrt{2}, -2+\sqrt{2})$; puntos de inflexión $x = -2 \pm \sqrt{2}$.

6.6. Representa gráficamente $y = (x-2)x^{2/3}$.

Solución: No es derivable en $x = 0$; creciente en $(-\infty, 0)$ y en $(4/5, \infty)$, decreciente en $(0, 4/5)$; punto máximo local $x = 0$, punto mínimo local $x = 4/5$; convexa en $(-2/5, 0)$ y en $(0, \infty)$, cóncava en $(-\infty, -2/5)$; punto de inflexión $x = -2/5$.

6.7. Dibuja la gráfica de $y = \log[(x-1)(x-2)]$.

Solución: $\mathrm{Dom}(y) = (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$; asíntotas verticales $x = 1$, $x = 2$; creciente en $(2, \infty)$, decreciente en $(-\infty, 1)$; cóncava en cada intervalo del dominio.

6.8. Dibuja la gráfica de $y = 2 \operatorname{sen} x + \cos 2x$.

Solución: Como es una función periódica de periodo 2π, basta con estudiarla en el intervalo $[0, 2\pi]$. Es creciente en $(0, \pi/6)$, $(\pi/2, 5\pi/6)$ y $(3\pi/2, 2\pi)$, decreciente en $(\pi/6, \pi/2)$ y $(5\pi/6, 3\pi/2)$; puntos máximos locales $x = \pi/6$, $5\pi/6$, 2π, puntos máximos absolutos $x = \pi/6$, $x = 5\pi/6$; puntos mínimos locales $x = 0$, $\pi/2$, $3\pi/2$, punto mínimo absoluto $x = 3\pi/2$.

6.9. Traza la gráfica de $f(x) = \sqrt{x^2 + x - 2}$.

Solución: $\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, -2] \cup [1, \infty)$; decreciente en $(-\infty, -2)$, creciente en $(1, \infty)$; puntos mínimos absolutos $x = -2$ y $x = 1$; cóncava en $(-\infty, -2)$ y en $(1, \infty)$.