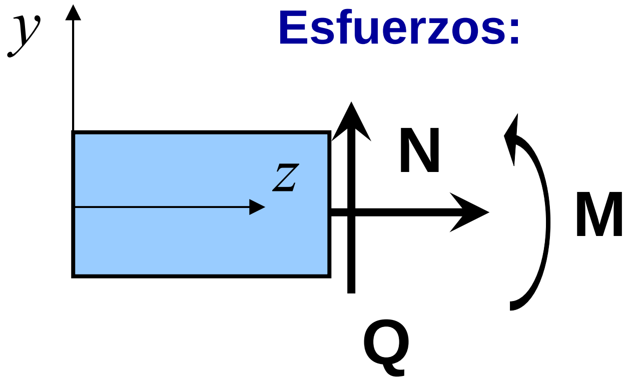
CAPÍTULOS 9, 10 Y 11

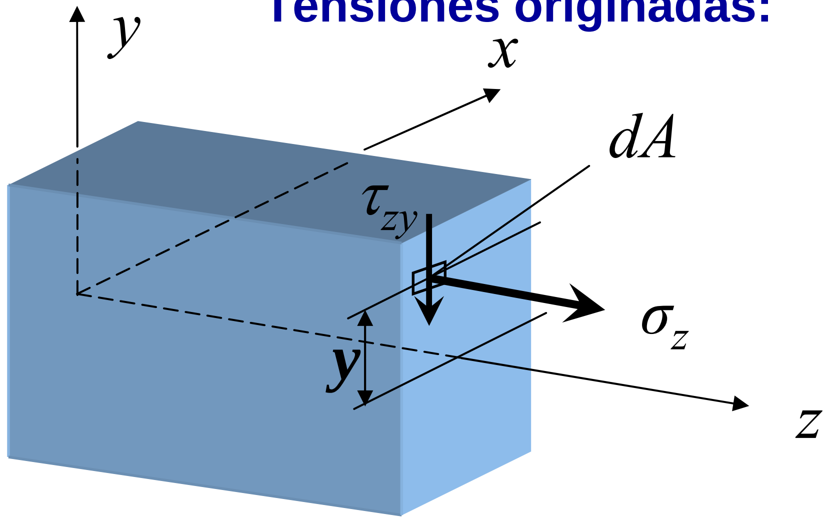
DISTRIBUCIÓN DE TENSIONES ORIGINADAS POR LOS DIFERENTES ESFUERZOS

¿Qué pretendemos en esta lección?

Esfuerzos:



Tensiones originadas:



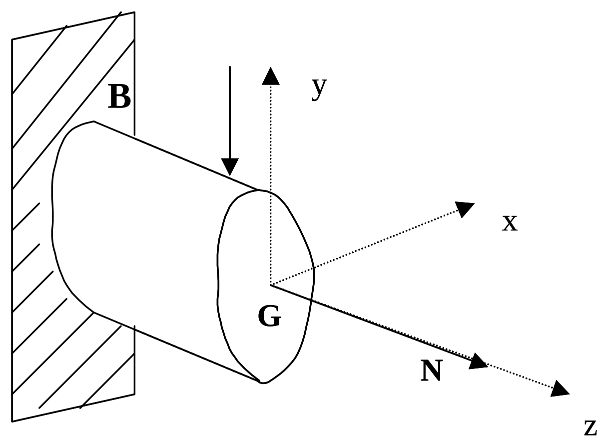
Equivalencia mecánica de los sistemas de esfuerzos, por un lado, y de las tensiones generadas, por otro:

$$N = \int_{Area} \sigma_z dA$$

$$Q = \int_{Area} \tau_{zy} dA$$

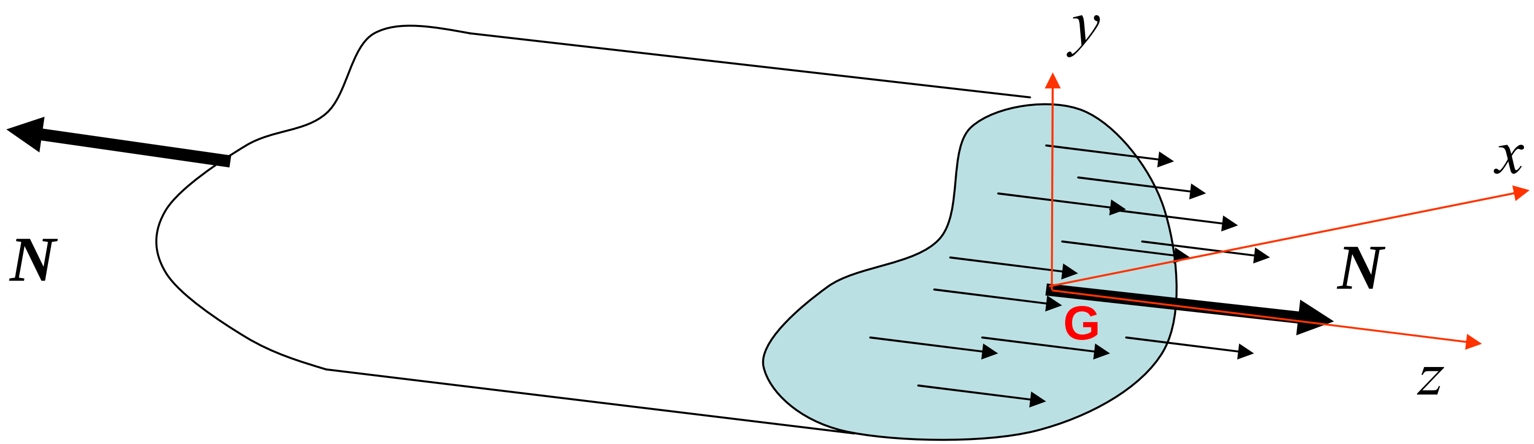
$$M = -\int_{Area} y \sigma_z dA$$

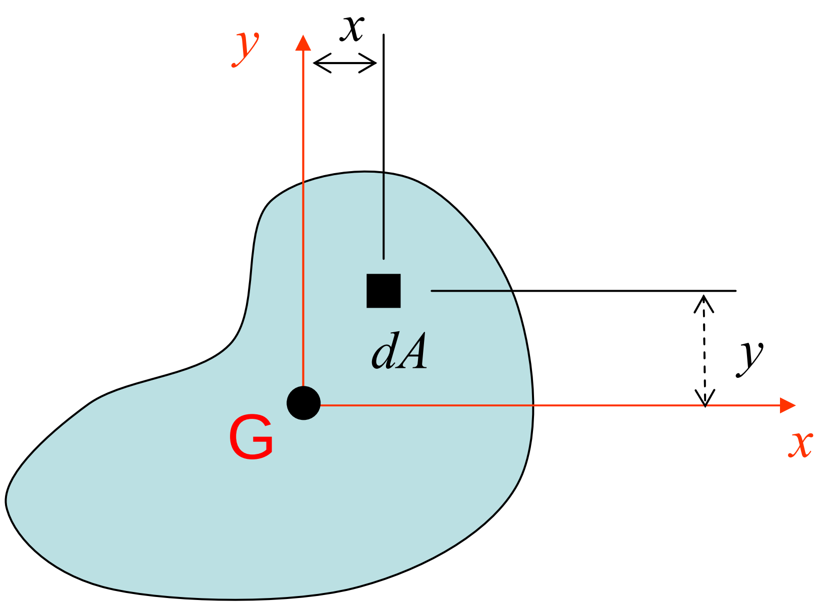
ESFUERZO AXIL:
TRACCIÓN O COMPRESIÓN PURA



Consideremos una barra prismática de sección arbitraria sometida a un esfuerzo axil ***N*** cuya recta de acción pasa por el centro de gravedad de la sección de la barra.

<u>Las tensiones normales, σ, producidas por el esfuerzo axil son constantes en cualquier punto de la sección.</u>





EQUIVALENCIA ENTRE *N* Y LA DISTRIBUCIÓN DE TENSIONES:

Momentos en *G*:

$$M_x = 0 = \int \sigma\, y dA$$

$$M_y = 0 = -\int \sigma\, x dA$$

N pasa por G

Igualdad de resultantes:

$$N = \int \sigma\, dA = \sigma \int dA = \sigma A \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma = \frac{N}{A}}$$

ESTADO DE DEFORMACIONES EN LA PIEZA PRISMÁTICA:

$$\boxed{\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} \quad \varepsilon_y = \varepsilon_x = -\nu\varepsilon_z \quad \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0}$$

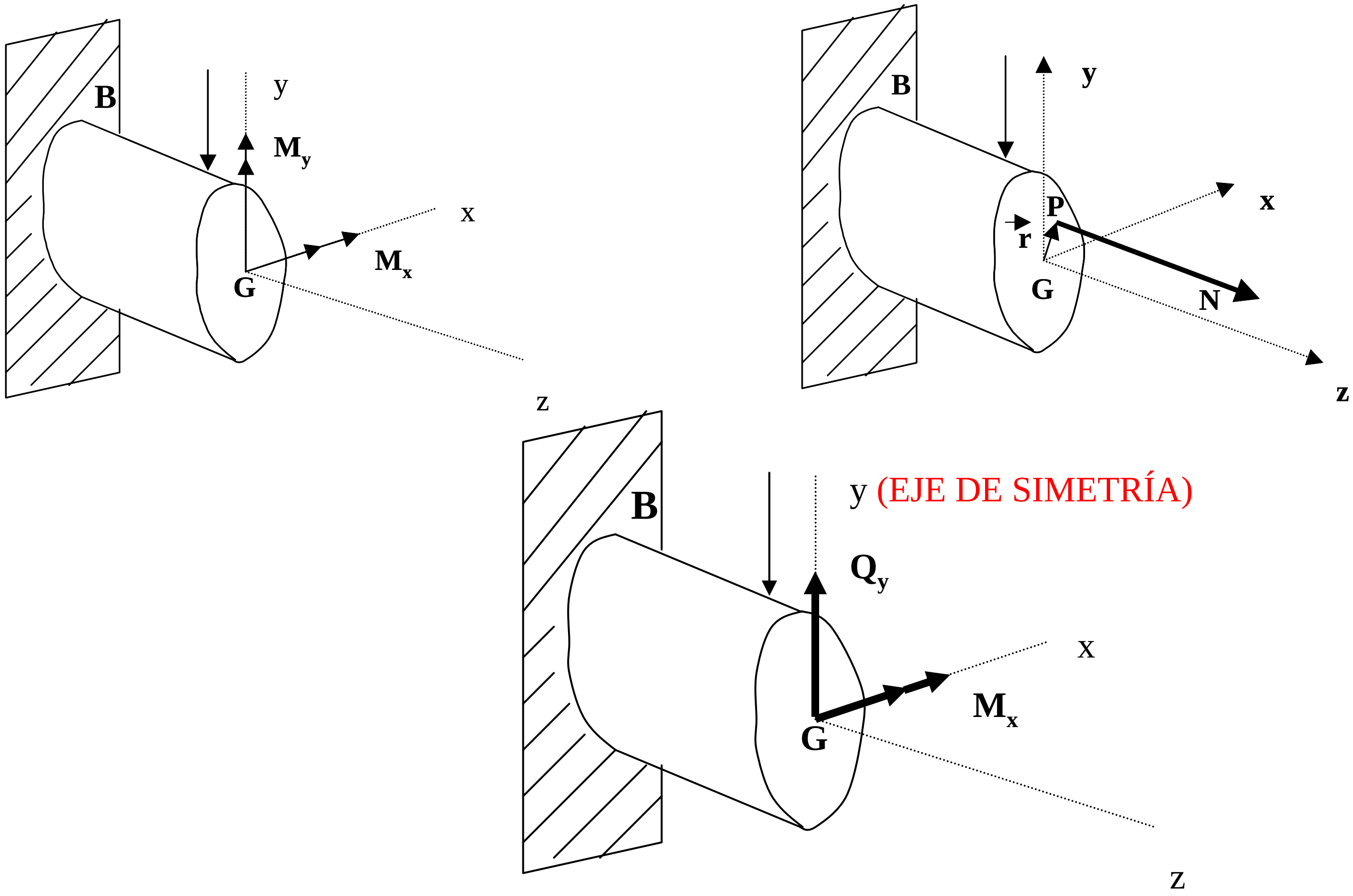
TRACCIÓN PURA

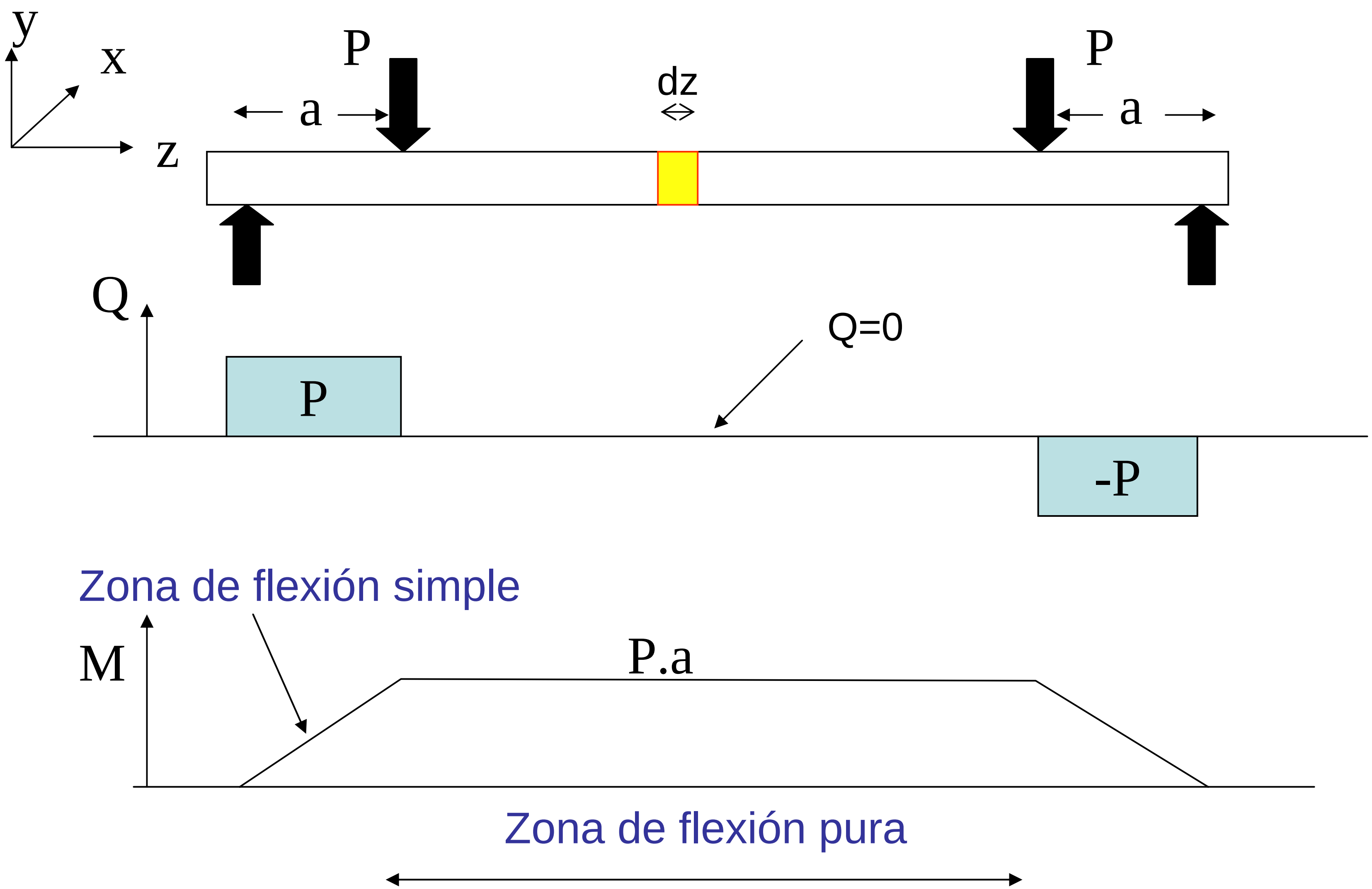
COMPRESIÓN PURA

En ambos casos, el esfuerzo axil pasa por el c.d.g de la sección

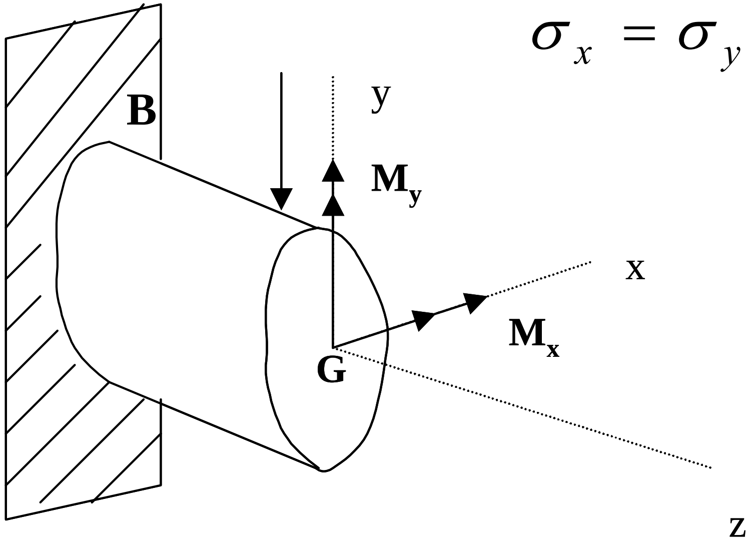
FLEXIÓN

FLEXIÓN PURA, FLEXIÓN COMPUESTA Y FLEXIÓN SIMPLE




y
x
z
P
P
a
a
dz
Q
Q=0
P
-P
Zona de flexión simple
M
P.a
Zona de flexión pura

FLEXIÓN PURA



$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \qquad \sigma_z \neq 0$$

$$\sigma_z = \sigma_z(x, y)$$

$$\boxed{\sigma_z = Ax + By + C}$$

EQUIVALENCIA ENTRE ***M$_x$* y *M$_y$*** Y LA DISTRIBUCIÓN DE TENSIONES:

Igualdad de resultantes:

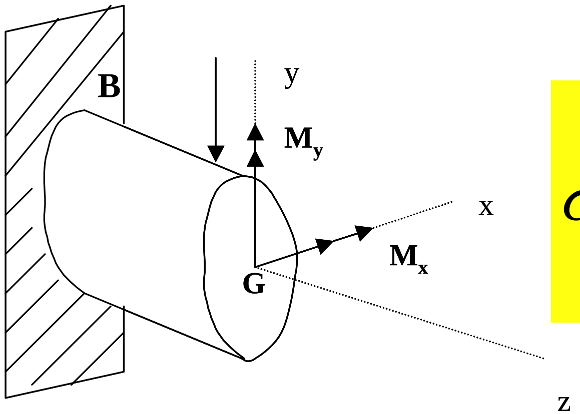
$$\boxed{\iint_\Omega \sigma_z \, d\Omega = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 0}$$

Igualdad de momentos en *G*:

$$\iint_{\Omega} \vec{r} \wedge \vec{\sigma}_z \, d\Omega = M_x \vec{i} + M_y \vec{j}$$

$$\sigma_z = Ax + By$$

$$\begin{cases} A = -\dfrac{M_x P_{xy} + M_y I_x}{I_x I_y - P_{xy}^2} \\ B = \dfrac{M_x I_y + M_y P_{xy}}{I_x I_y - P_{xy}^2} \end{cases}$$



$$\sigma_z = M_x \left[\frac{y I_y - x P_{xy}}{I_x I_y - P_{xy}^2} \right] + M_y \left[\frac{y P_{xy} - x I_x}{I_x I_y - P_{xy}^2} \right]$$

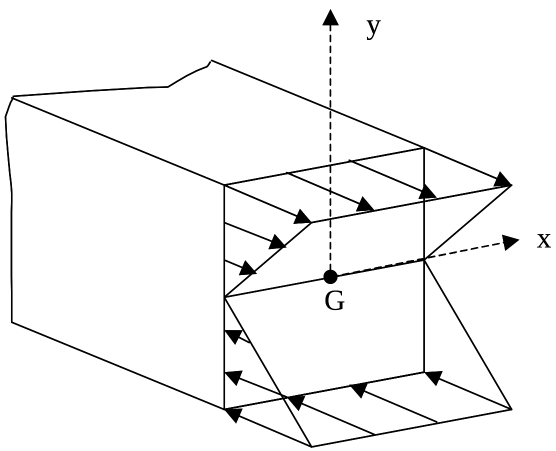
$$\sigma_z = M_x\left[\frac{yI_y - xP_{xy}}{I_xI_y - P_{xy}^2}\right] + M_y\left[\frac{yP_{xy} - xI_x}{I_xI_y - P_{xy}^2}\right]$$

Si los ejes *{x,y}* fueran principales de inercia de la sección, *Pxy=0*, por lo que la expresión anterior se reduciría a:

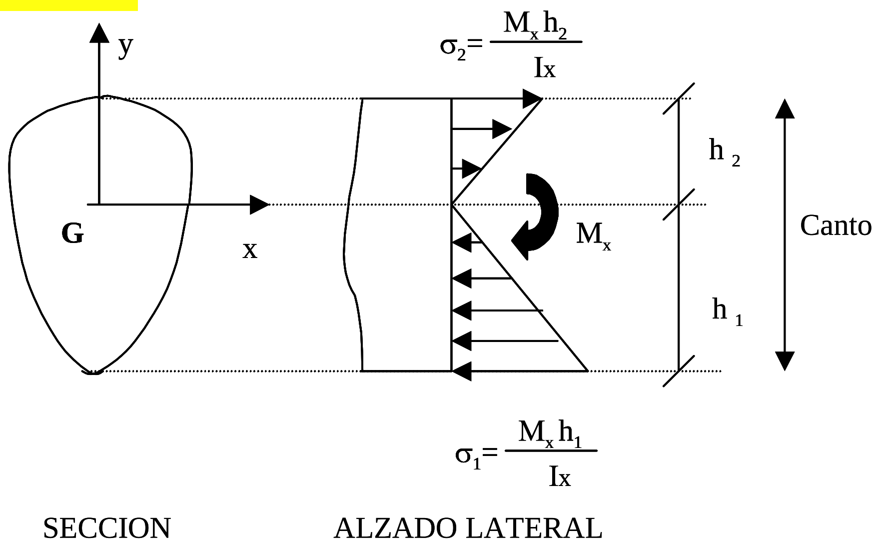
$$\sigma_z = \frac{M_x y}{I_x} - \frac{M_y x}{I_y}$$

y si $M_y = 0$, se obtendría:

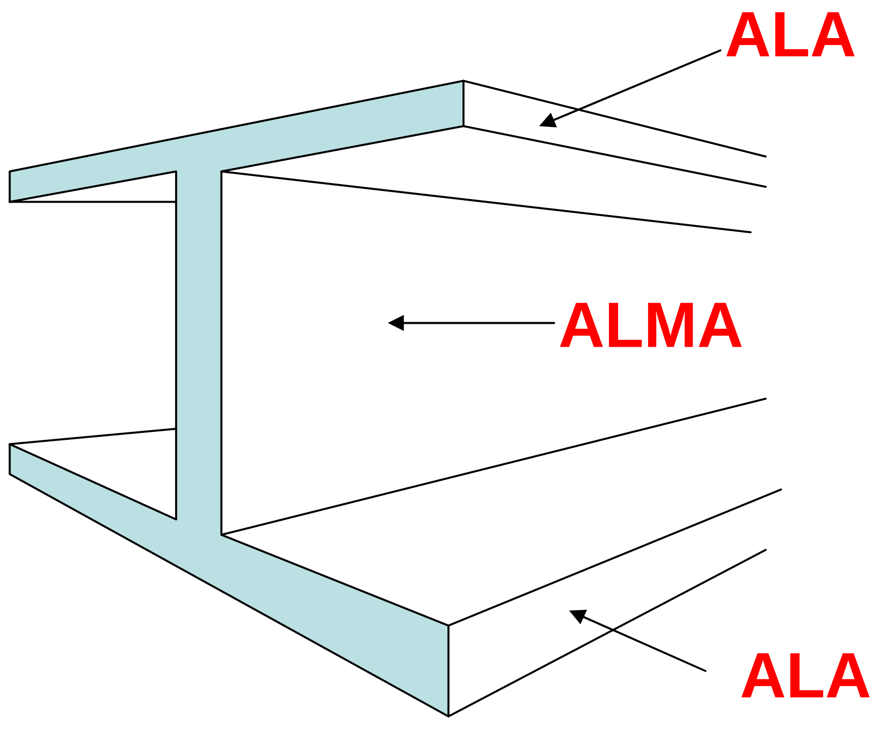
$$\sigma_z = \frac{M_x y}{I_x}$$



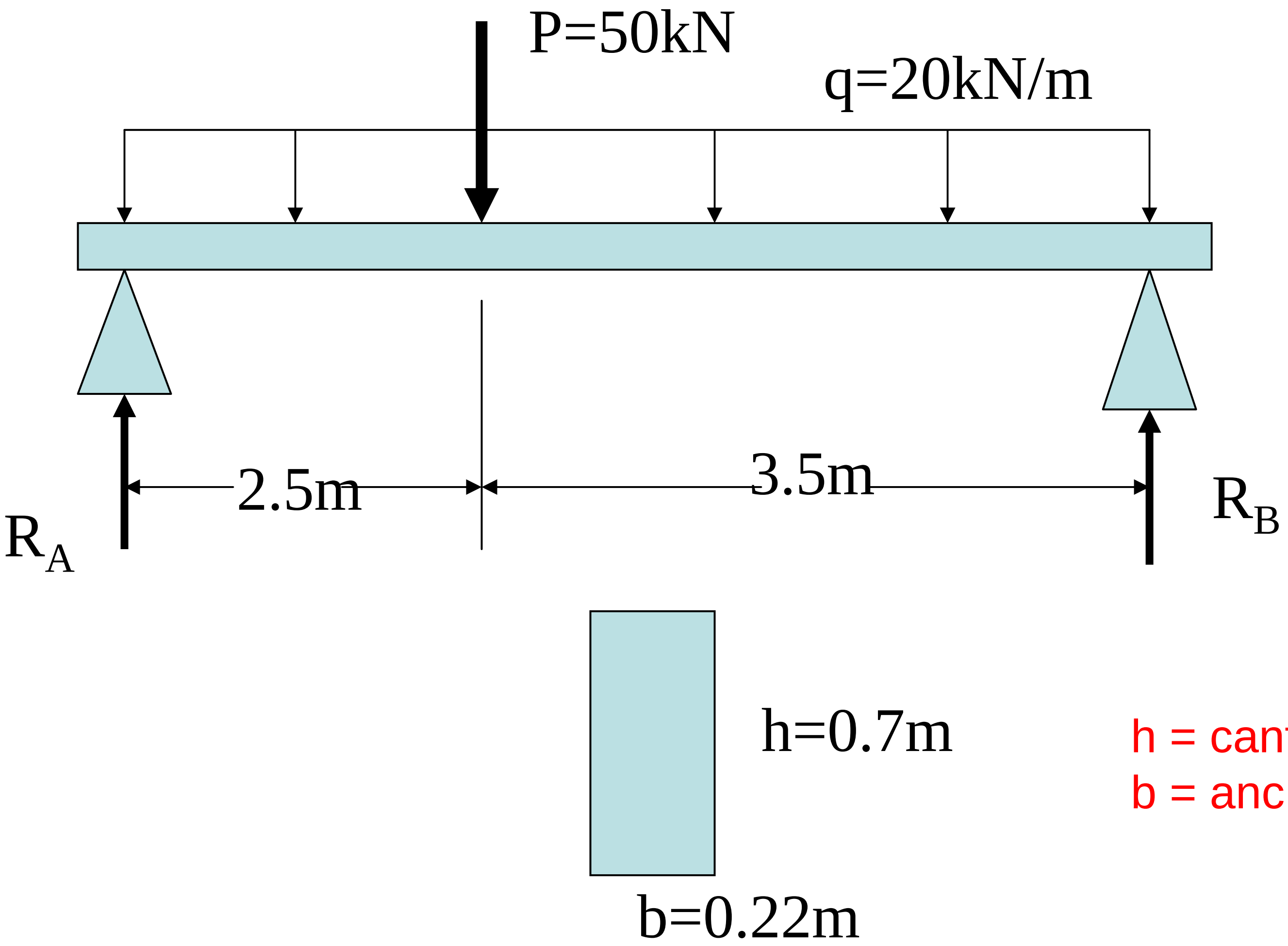
Sección rectangular



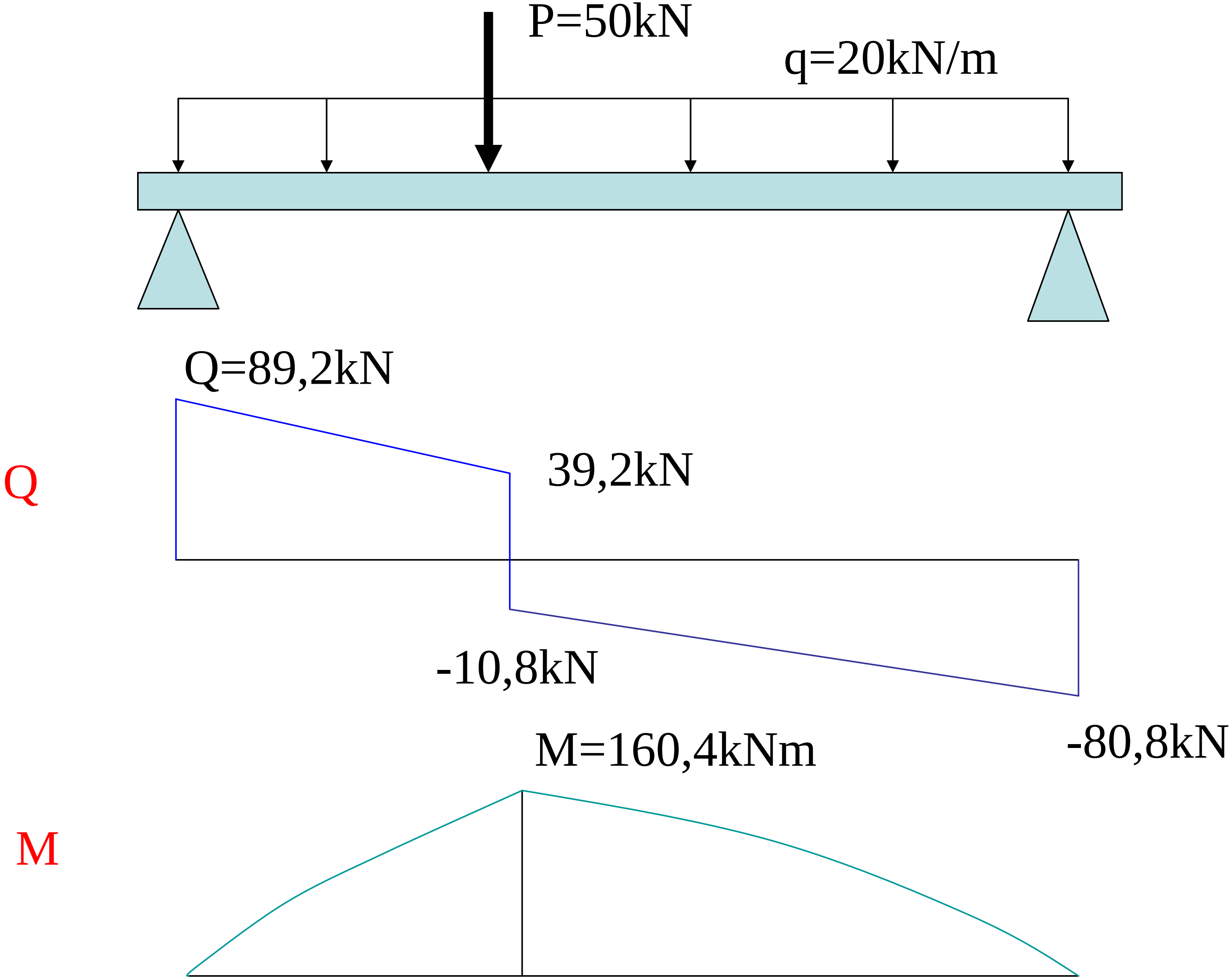
NOMENCLATURA EN PERFILES LAMINADOS:



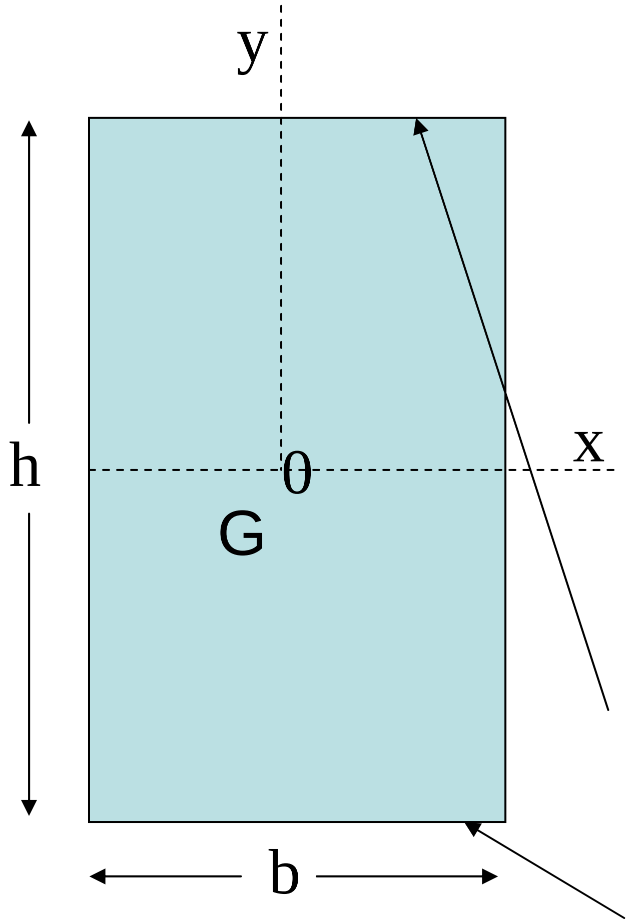
EJEMPLO: CALCULO DE LAS MÁXIMAS TENSIONES NORMALES EN LA VIGA DE LA FIGURA



h = canto
b = ancho


P=50kN
q=20kN/m
Q=89,2kN
Q
39,2kN
-10,8kN
-80,8kN
M=160,4kNm
M

$$I_x = \frac{1}{12} b \cdot h^3$$



$$\sigma_{máx.} = \frac{M_x \cdot \frac{h}{2}}{I_x} = \frac{M_x}{W}$$

Módulo resistente de la sección

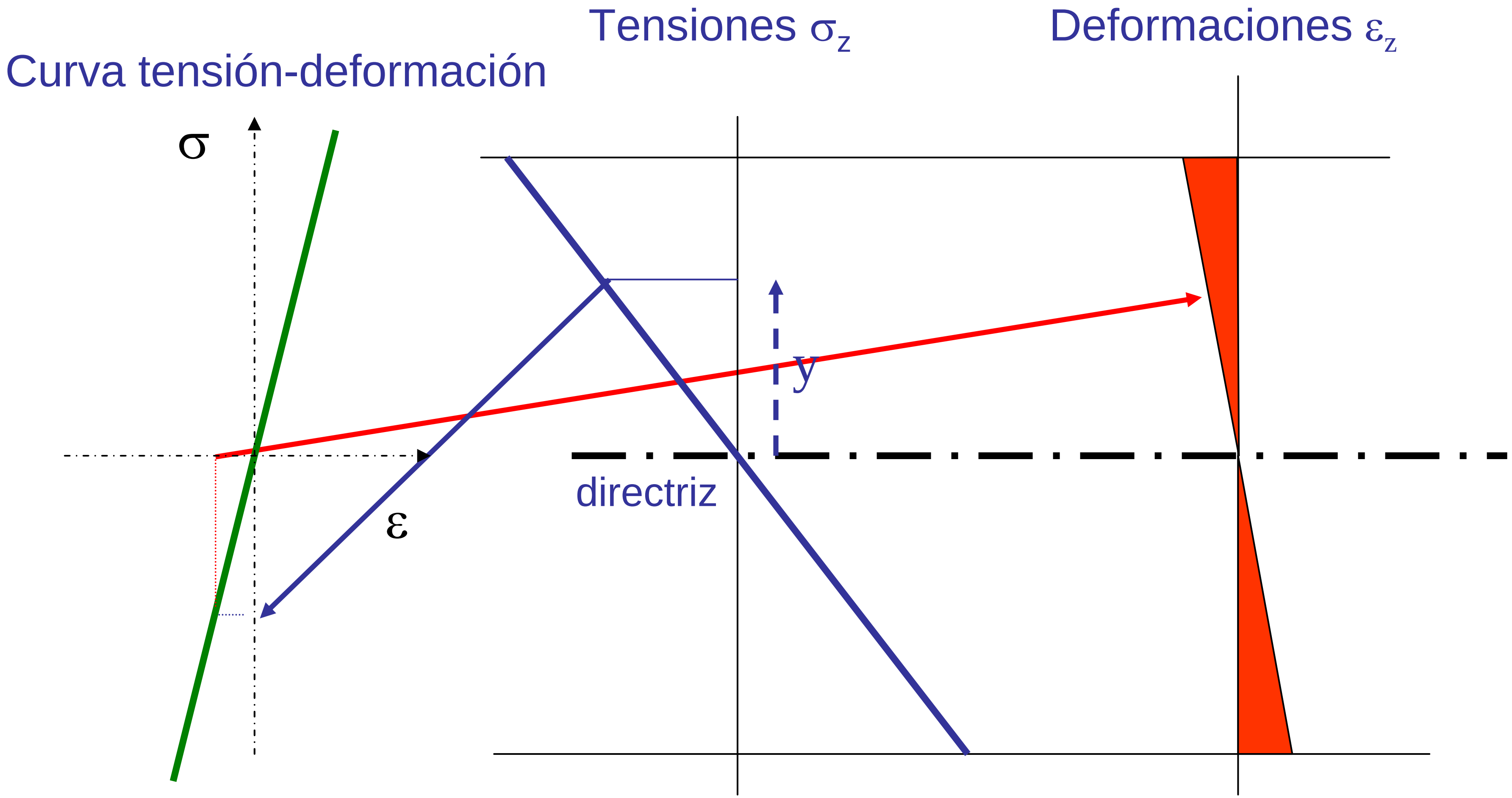
$$W = \frac{b.}{6} h^2 = \frac{0,22x0,7^2}{6} = 0,018m^3$$

TENSIONES NORMALES MÁXIMAS:

$$\sigma_C = -\frac{M_{\max}}{W} = -\frac{160,4kNm}{0,018m^3} = -8,9MPa$$

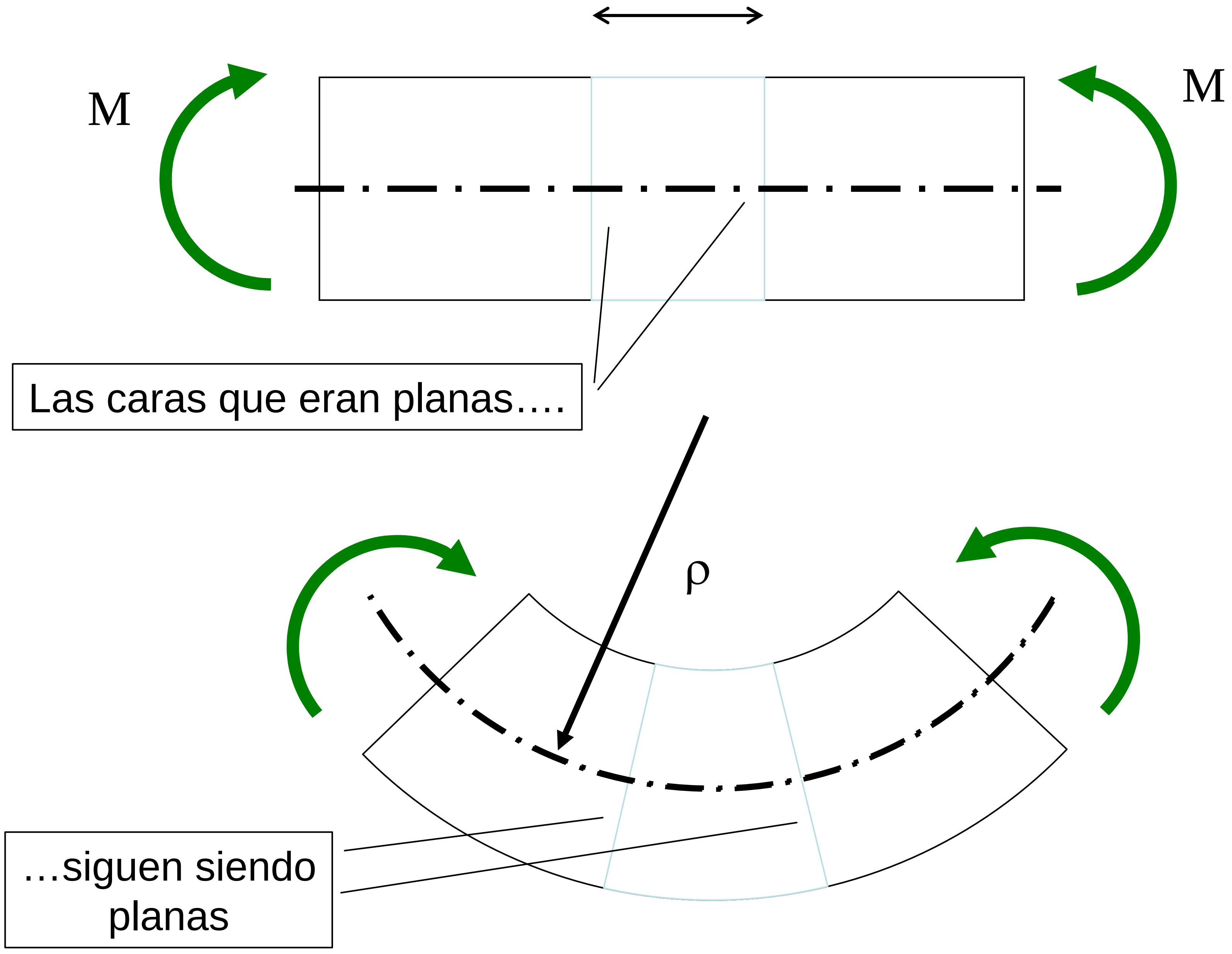
$$\sigma_T = +8,9MPa$$

TENSIONES Y DEFORMACIONES EN FLEXIÓN PURA



Las deformaciones ε_z también varían linealmente

FLEXIÓN PURA:



FIBRA O EJE NEUTRO EN FLEXIÓN PURA

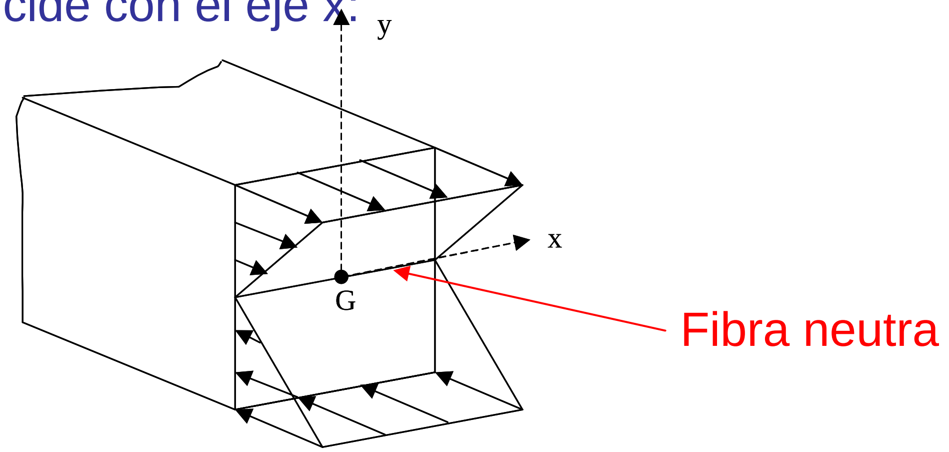
Se denomina **fibra o eje neutro** al lugar geométrico de los puntos de la sección en los que σ_z es nula

$$\sigma_z = M_x\left[\frac{yI_y - xP_{xy}}{I_xI_y - P_{xy}^2}\right] + M_y\left[\frac{yP_{xy} - xI_x}{I_xI_y - P_{xy}^2}\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{y}{x} = \frac{M_xP_{xy} + M_yI_x}{M_xI_y + M_yP_{xy}}}$$

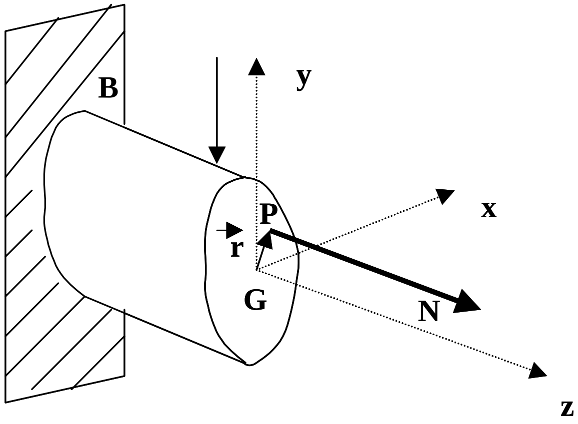
Si los ejes $\{x,y\}$ fueran principales de inercia:

$$\boxed{\frac{y}{x} = \frac{M_yI_x}{M_xI_y}}$$

que corresponde a una recta que pasa por el c.d.g de la sección. Si, además, M_y=0, la fibra neutra coincide con el eje x:

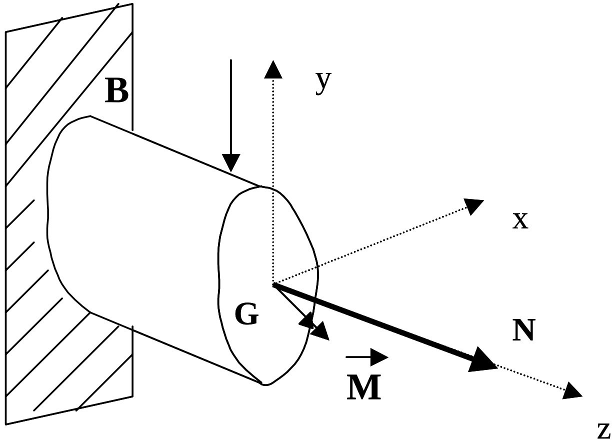


FLEXIÓN COMPUESTA



esfuerzo axil *N* en un punto P de coordenadas *(a,b)*

Reduciendo N al c.d.g.:



$$\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & 0 \\ 0 & 0 & N \end{vmatrix} = bN\vec{i} - aN\vec{j} = M_x\vec{i} + M_y\vec{j}$$

Aplicando el Principio de superposición:

$$\sigma_z = \frac{N}{\Omega} + b\,N\left[\frac{yI_y - xP_{xy}}{I_xI_y - P_{xy}^2}\right] - a\,N\left[\frac{yP_{xy} - xI_x}{I_xI_y - P_{xy}^2}\right]$$

FIBRA O EJE NEUTRO EN FLEXIÓN COMPUESTA

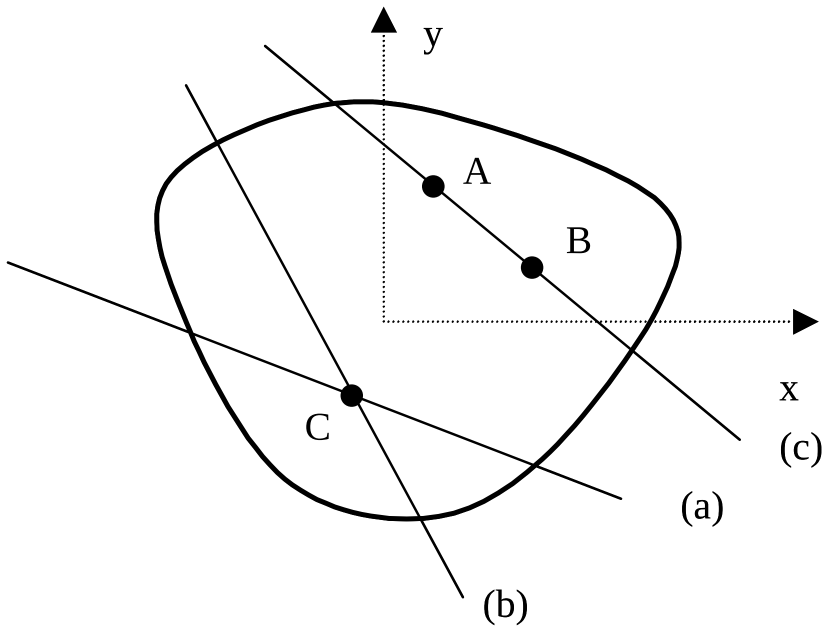
$$\sigma_z = \frac{I_x I_y - P_{xy}^2}{\Omega} + x\left(aI_x - bP_{xy}\right) + y\left(bI_y - aP_{xy}\right) = 0$$

En el caso de flexión compuesta, la fibra neutra no pasa por el c.d.g de la sección.

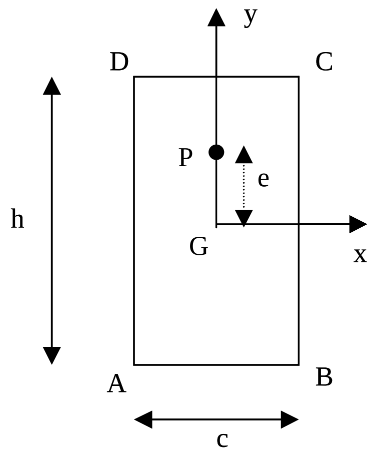
NUCLEO CENTRAL DE UNA SECCION TRABAJANDO A FLEXIÓN COMPUESTA

Región de la sección en la que puede actuar un esfuerzo axil de compresión *N* sin que se produzcan tensiones de tracción en ningún punto de la sección. El centro de gravedad de la sección G debe pertenecer al núcleo central pues, si en él se aplicara un esfuerzo axil de compresión toda la sección se encontraría trabajando a compresión.

Si el esfuerzo axil de compresión actuase en el punto A de la sección, la recta *(a)* sería la correspondiente fibra neutra. Supongamos ahora que el esfuerzo axil actuase en el punto B y que *(b)* es la correspondiente fibra neutra. Si C es el punto de corte de las rectas *(a)* y *(b)*, se puede demostrar que si el esfuerzo axil actuase en C la correspondiente fibra neutra *(c)* pasaría por los puntos A y B.



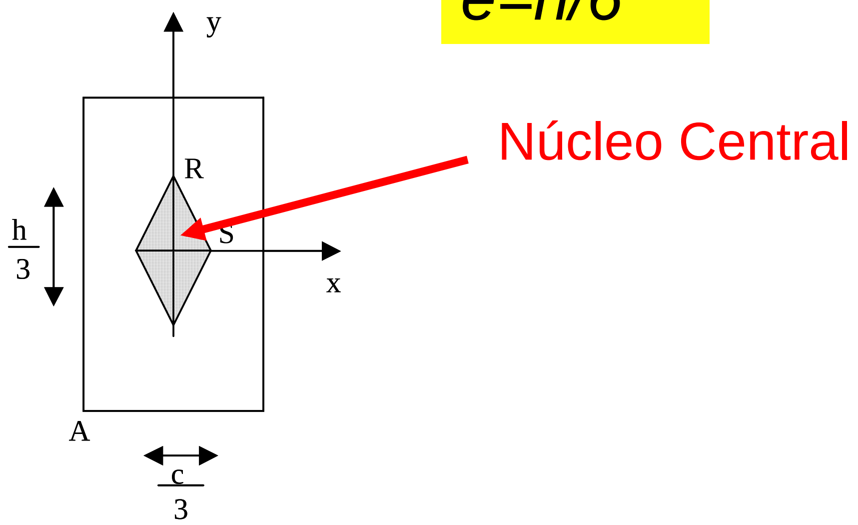
EJEMPLO: NÚCLEO CENTRAL DE UNA SECCIÓN RECTANGULAR



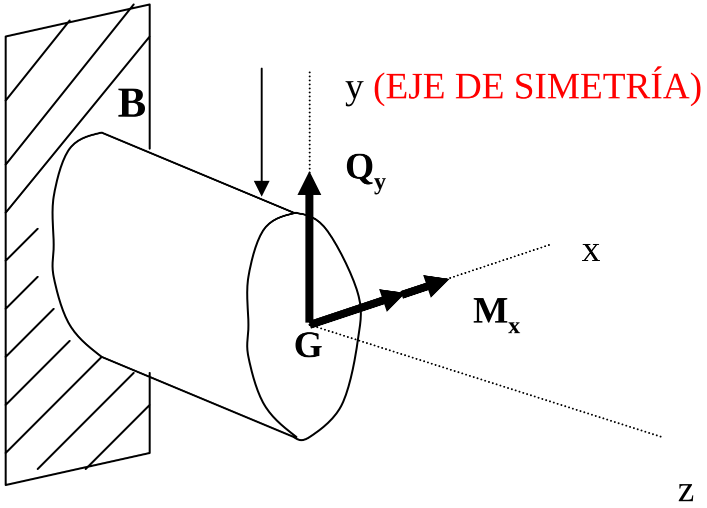
Supongamos actuando un esfuerzo axil *N* de compresión en el punto P de la sección, que se encuentra situado sobre el eje *y* a una distancia *e* del eje *x.*
Reduciendo el esfuerzo *N* al centro de gravedad G, obtendríamos un esfuerzo axil del mismo valor y un momento flector de eje x de valor *N.e*

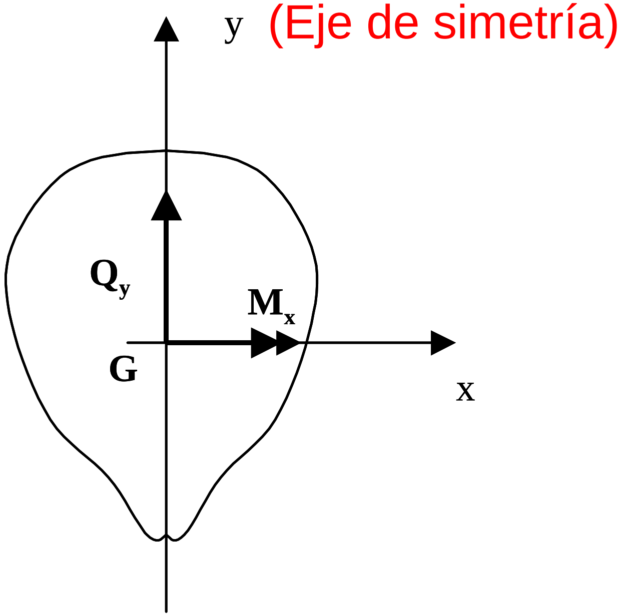
Si aplicásemos *N* en G (*e=0*), toda la sección estaría sometida a compresión uniforme. Si va creciendo *e*, las tensiones de compresión van creciendo en el lado DC y disminuyendo en el AB. Cabría preguntarse: ¿Para qué valor de la distancia *e* la fibra neutra coincidiría con al lado *AB*?

e=h/6



FLEXIÓN SIMPLE



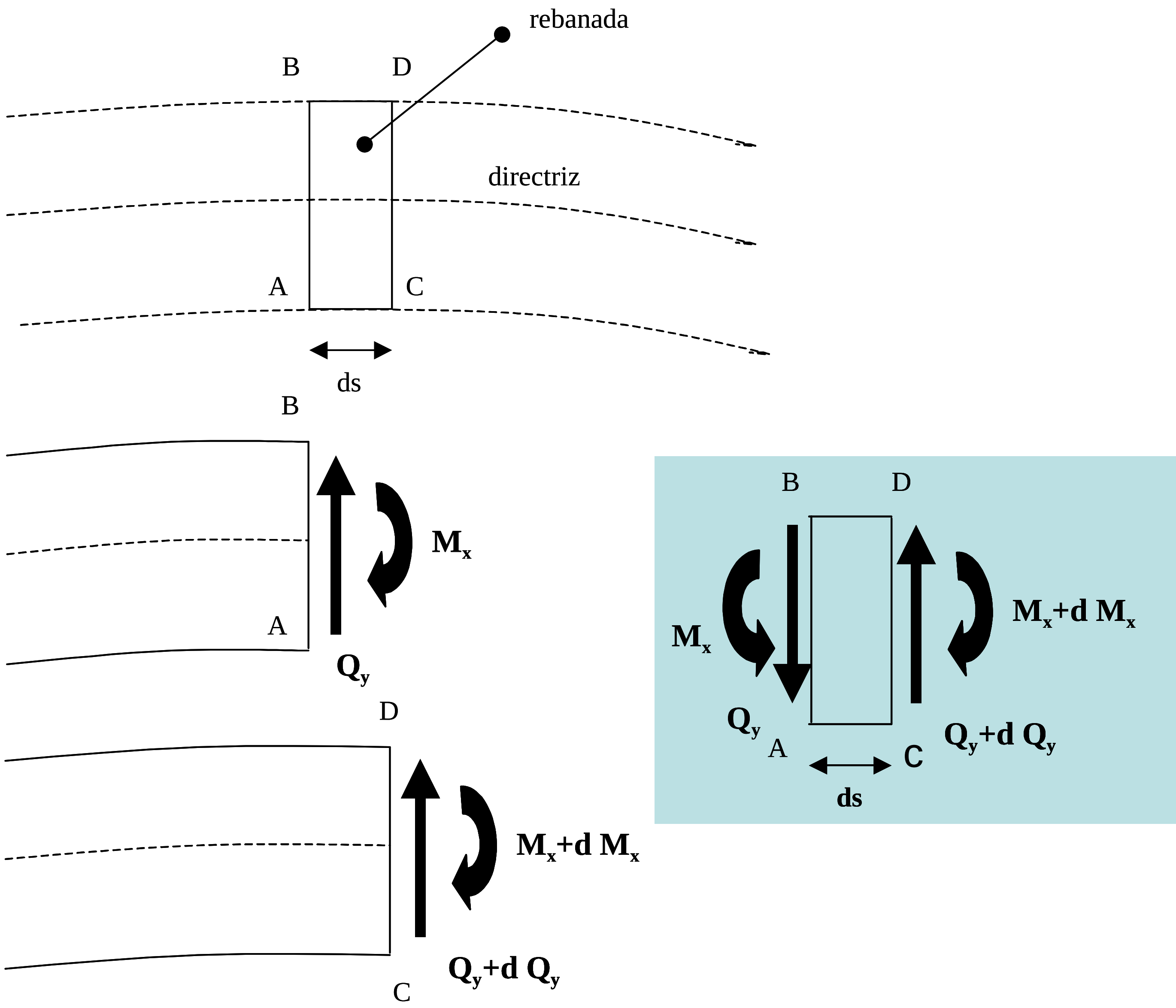


Las tensiones normales producidas por el momento flector ya han sido estudiadas con anterioridad, pero: ¿cuáles serán las tensiones tangenciales (contenidas en el plano de la sección) a que da lugar el esfuerzo cortante que estamos aplicando?

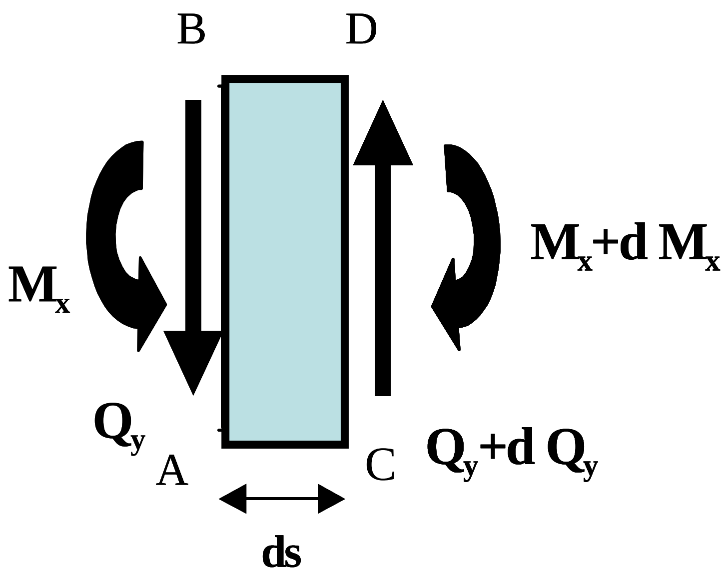
Supondremos que dichas tensiones tangenciales sólo dependen de la ordenada "*y*":

$$\tau = \tau(y)$$

REBANADA DE UNA PIEZA PRISMÁTICA



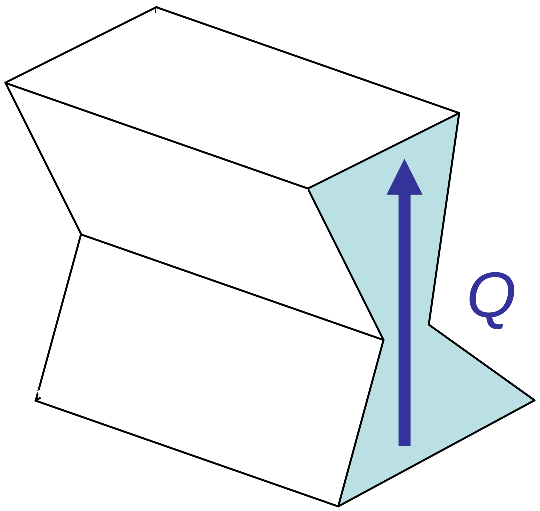
EQUILIBRIO DE LA REBANADA

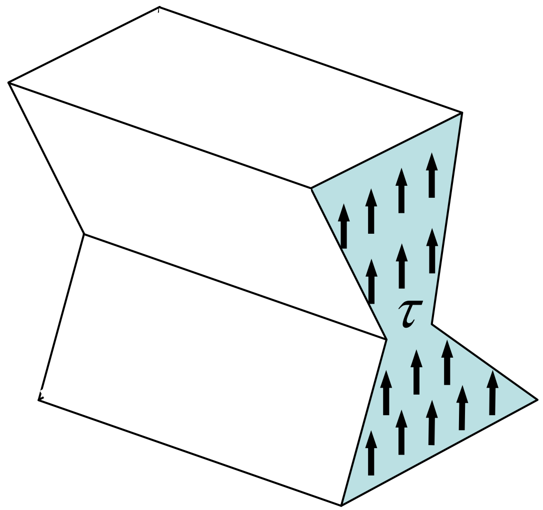


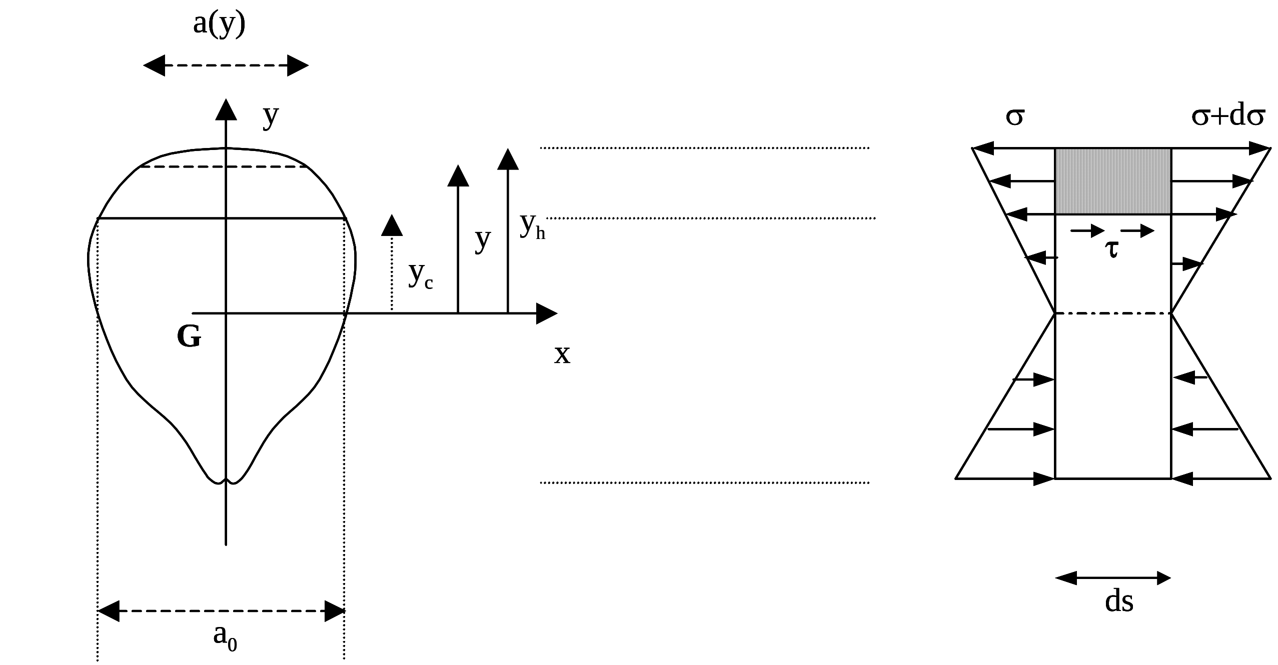
$$M_x - (M_x + dM_x) + Q_y ds + dQ_y ds = -dM_x + Q_y ds = 0$$

$$\boxed{Q_y = \frac{dM_x}{ds}}$$

TENSIONES TANGENCIALES INDUCIDAS POR EL ESFUERZO CORTANTE



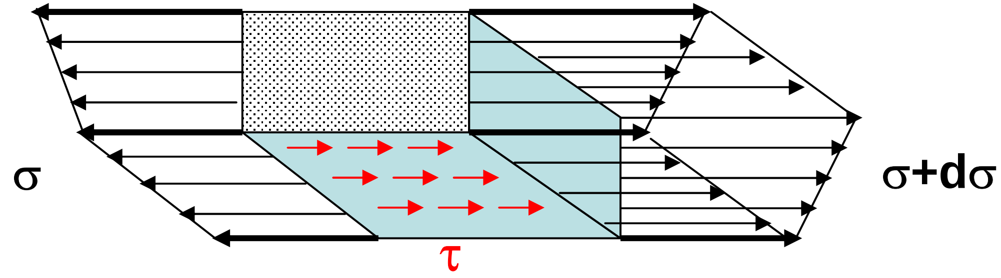




$$\sigma_z = \frac{M_x y}{I_x}$$

$$d\sigma = \frac{dM_x\, y}{I_x}$$

EQUILIBRIO HORIZONTAL:

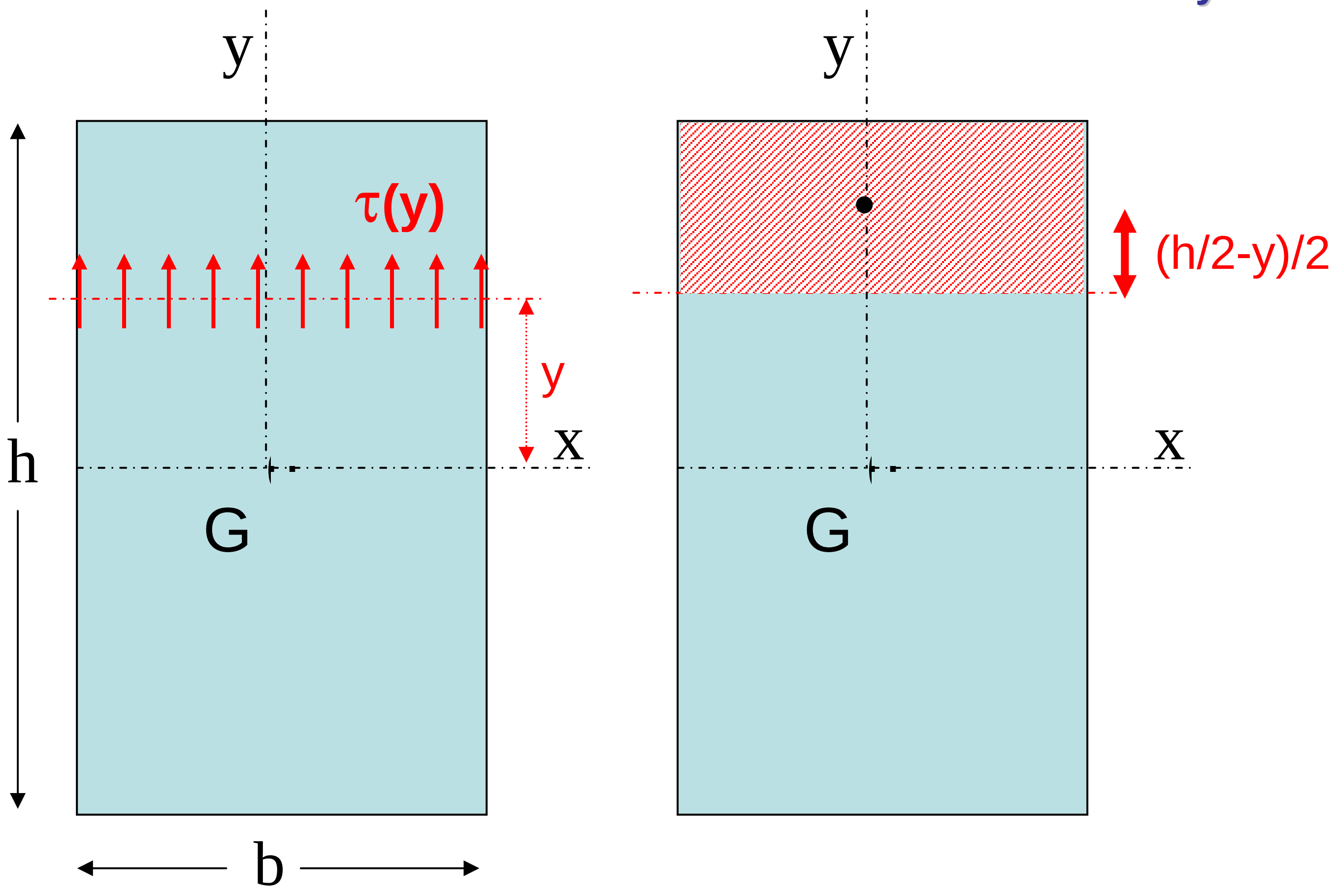


$$\int_{y=y_c}^{y=y_h} d\sigma\,(a(y).dy) = \tau\,(ds \cdot a_0)$$

$$\int_{y_c}^{y_h} \frac{dM_x}{I_x} y\,(ady) = \frac{dM_x}{I_x} \int_{y_c}^{y_h} y\,(ady) = \tau \cdot ds \cdot a_0$$

$$\tau = \frac{dM_x}{ds} \frac{M_e}{I_x a_0} = \frac{Q_y M_e}{I_x a_0}$$

Ejemplo: Distribución de tensiones cortantes sobre una sección rectangular sometida a Q_y

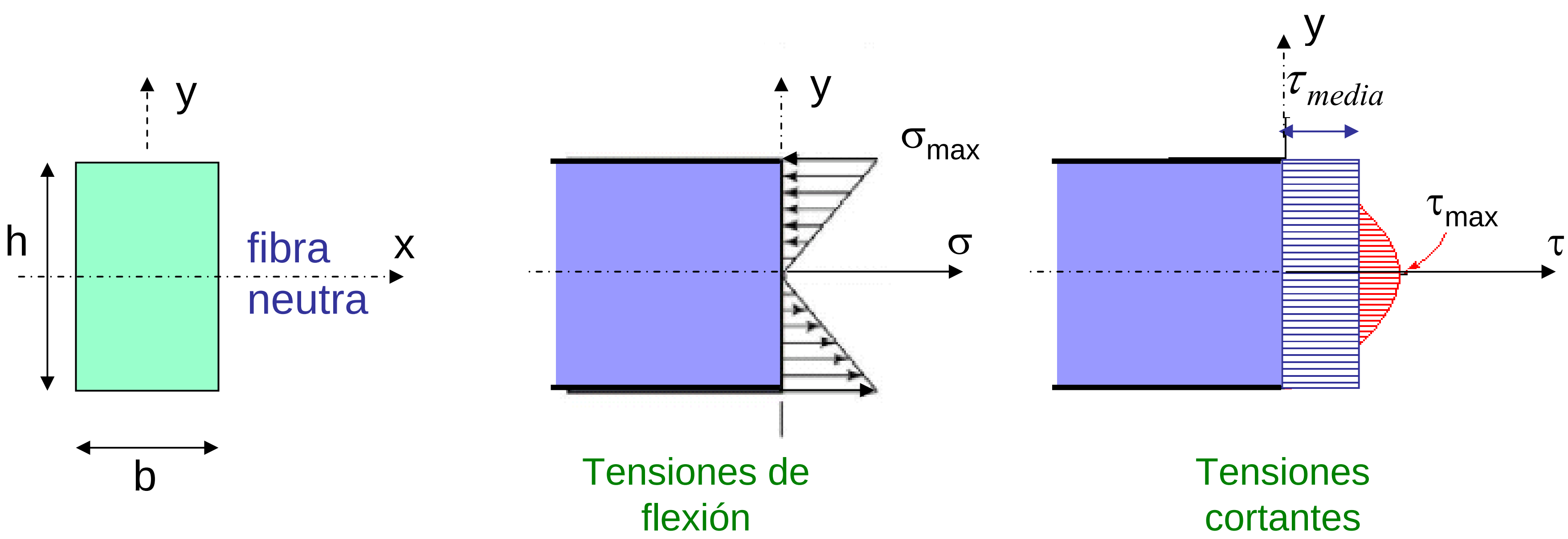


$$\tau = \frac{Q_y M_e}{I_x a_0}$$

$$M_e = \left(\frac{h}{2} - y\right) \cdot b \cdot \left(\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} - y\right) + y\right)$$

$$I_x = \frac{1}{12} b \cdot h^3$$

$$a_0 = b$$



$$(\mathrm{M_e})_{\max} = \left(\frac{bh}{2}\right)\left(\frac{h}{4}\right) = \frac{bh^2}{8}$$

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2}\left(\frac{Q_y}{bh}\right) = 1{,}5\,\tau_{\mathrm{media}}$$