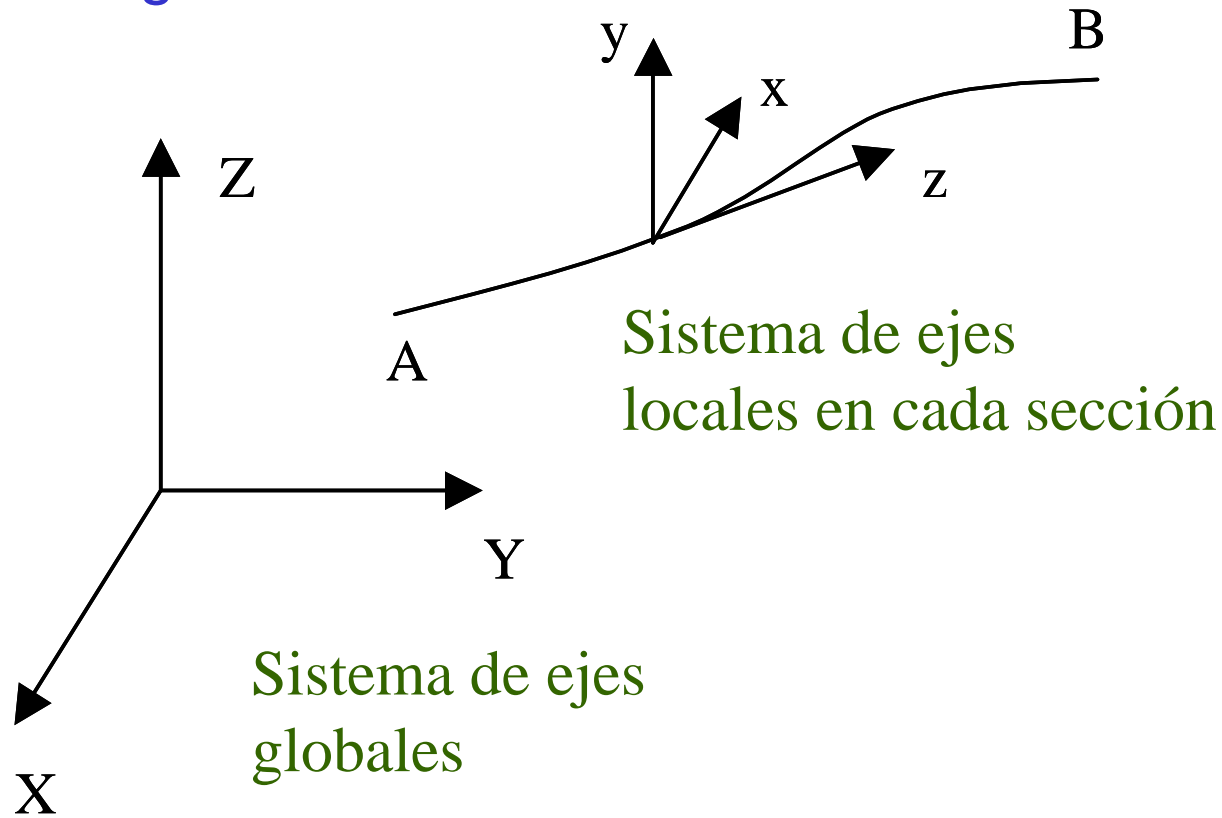


CAPITULO 13

DEFORMACIÓN DE PIEZAS PRISMÁTICAS

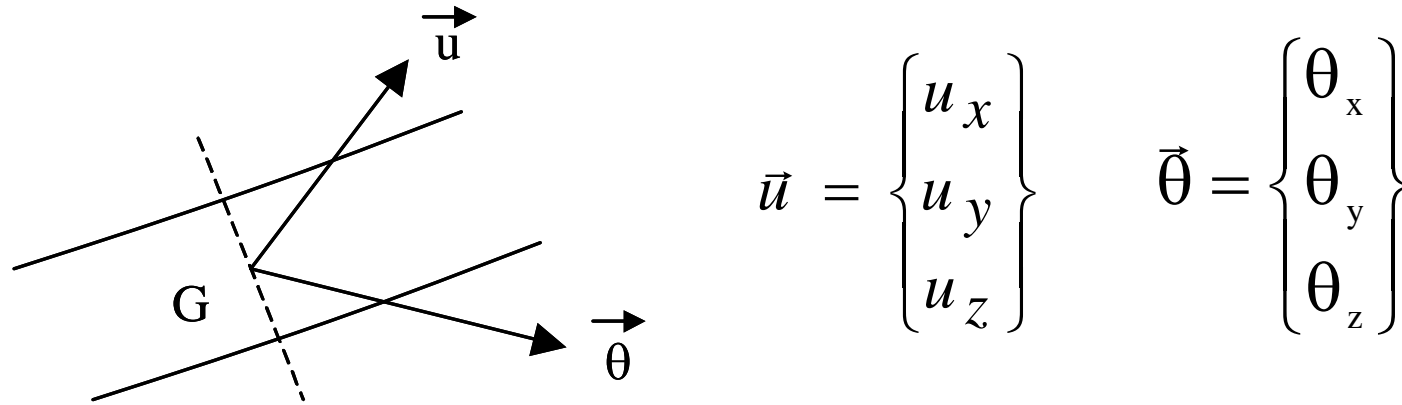
Planteamiento: Sea la pieza prismática AB que se encuentra sometida a la acción de cargas y ligaduras



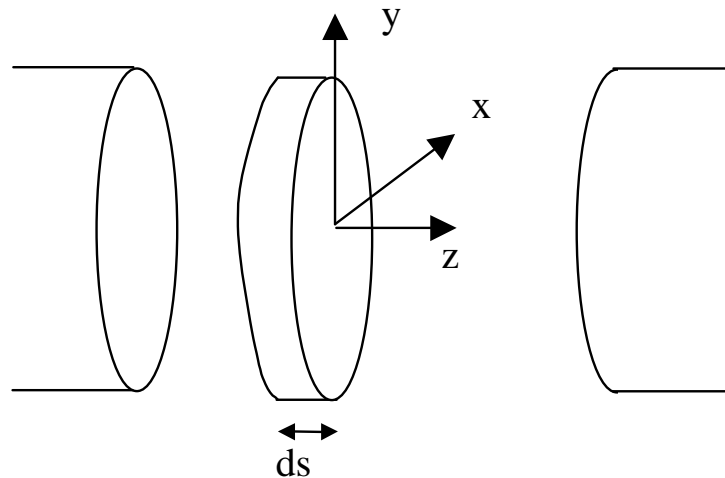
Objetivo: Determinar la nueva geometría que adquiere la pieza

Procedimiento: Vamos a ver como se deforma una rebanada genérica de la pieza y, luego, por integración, Obtendremos la deformada de la pieza prismática

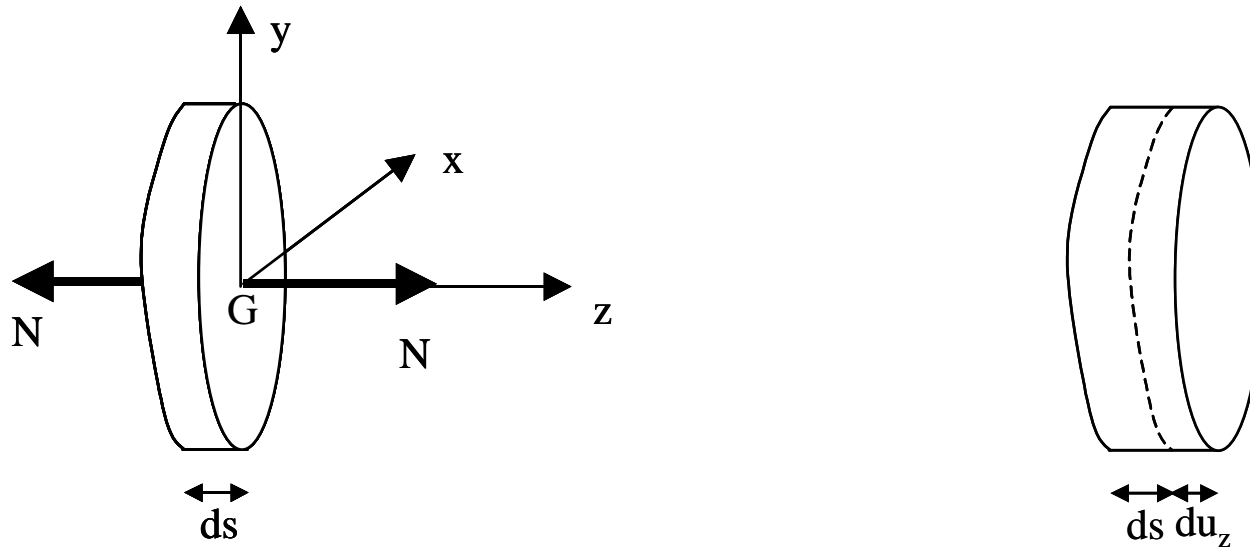
Los vectores de desplazamiento y de giro de una sección de la pieza prismática tendrán tres componentes cada uno en el sistema de referencia local



Consideremos una rebanada y analicemos su cambio de geometría para los diferentes tipos de esfuerzos:



DEFORMACIÓN DE UNA REBANADA POR ESFUERZO AXIL

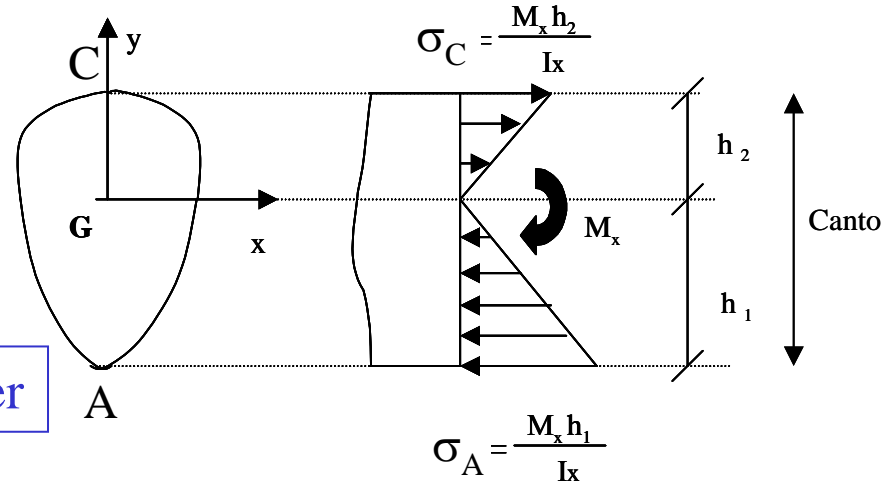
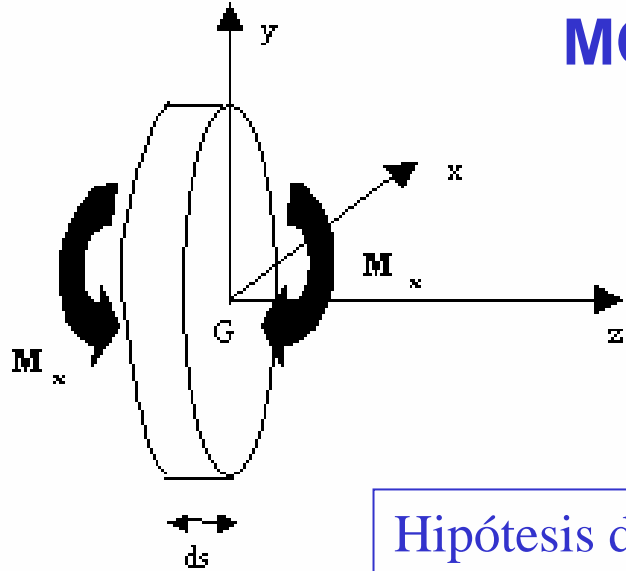


$$du_z = \varepsilon ds = \frac{\sigma}{E} ds = \frac{N}{AE} ds$$

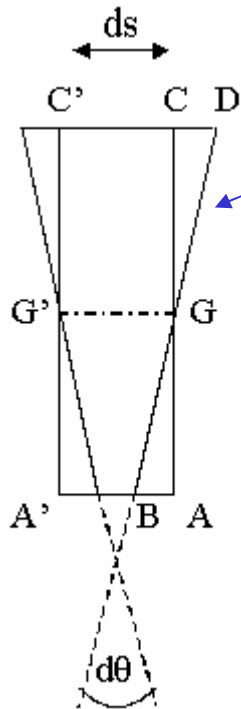
LA HIPÓTESIS DE NAVIER (FLEXIÓN)

Una cara de cualquier rebanada, que era plana antes de deformarse la pieza, sigue permaneciendo plana una vez que la pieza se ha deformado.

DEFORMACIÓN DE UNA REBANADA POR MOMENTO FLECTOR



Hipótesis de Navier



$$\sigma_A = \frac{M_x AG}{I_x} \quad (\text{compresión})$$

$$\sigma_C = \frac{M_x CG}{I_x} \quad (\text{tracción})$$

$$\frac{d\theta_x}{2} = \frac{AB}{AG} = \frac{CD}{CG} = \frac{M_x}{2EI_x} ds$$

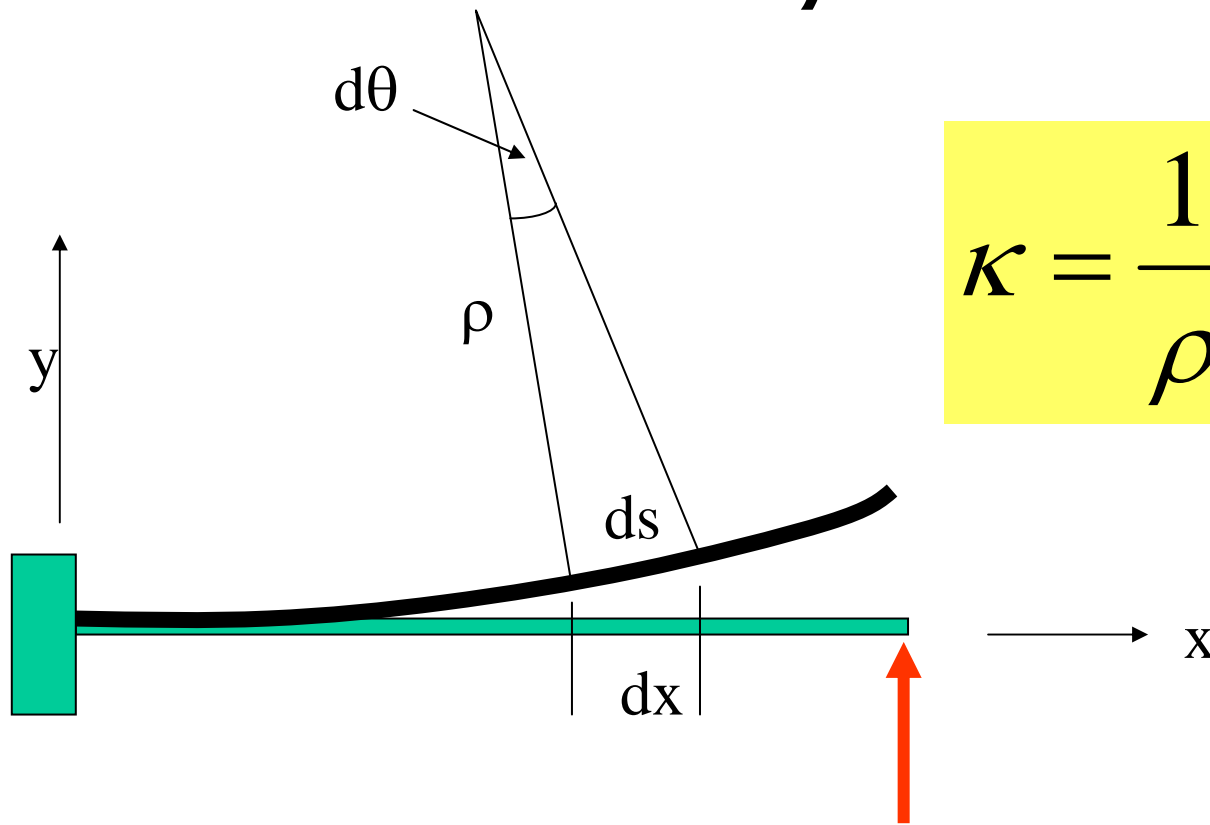
$$2AB = \varepsilon_{AA'} ds = \frac{\sigma_A}{E} ds = \frac{M_x AG}{EI_x} ds$$

$$2CD = \varepsilon_{CC'} ds = \frac{\sigma_C}{E} ds = \frac{M_x CG}{EI_x} ds$$

$$d\theta_x = \frac{M_x}{EI_x} ds$$

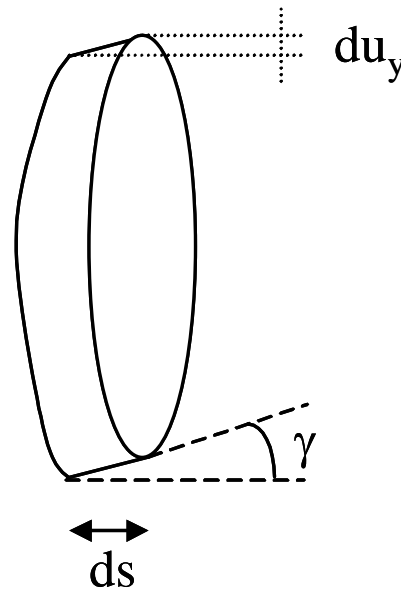
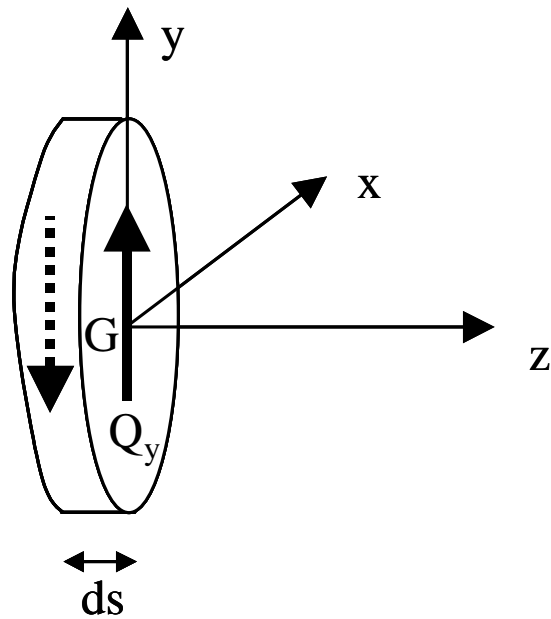
CURVATURA: $\kappa = 1/\rho$

$$\rho \cdot d\theta = ds = dx$$



$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI}$$

DEFORMACIÓN DE UNA REBANADA POR ESFUERZO CORTANTE



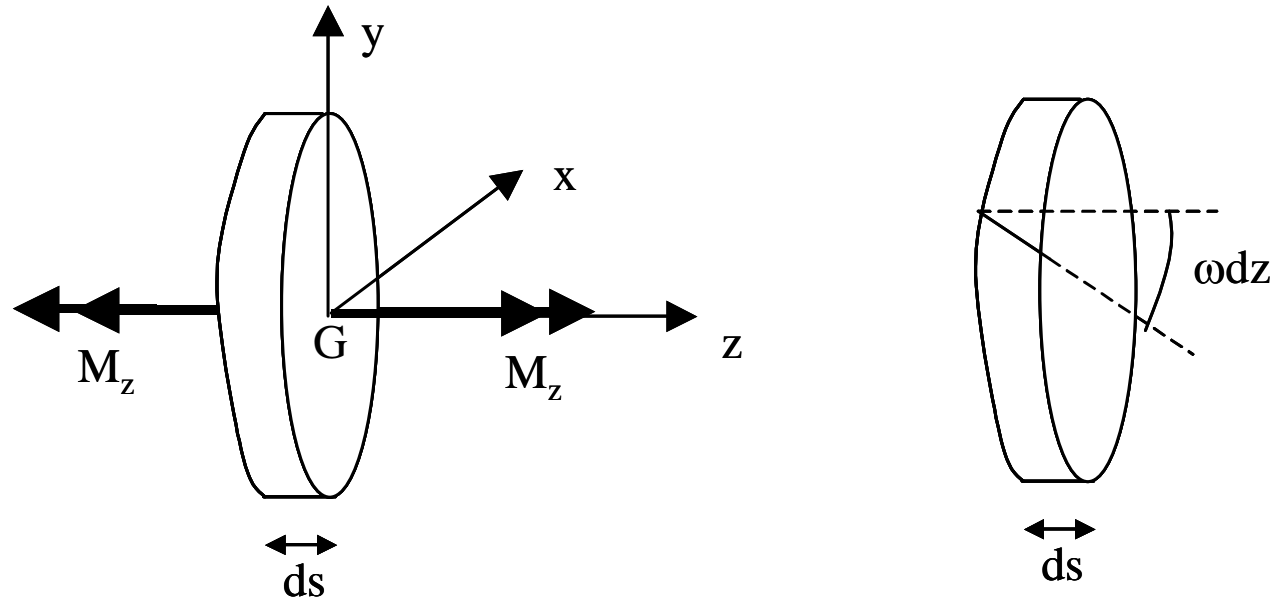
$$du_y = \gamma ds = \frac{\tau_m}{G} ds$$

$$\tau_m = \frac{Q_y}{\Omega_c}$$

El área a cortante Ω_c depende de la geometría de la sección y, en general, se puede escribir como: $\Omega_c = \Omega/k$. Para el caso de una sección rectangular $k=6/5$ (para el caso de una sección circular, por ejemplo, $k=10/9$)

$$du_y = \gamma ds = \frac{Q_y}{G\Omega_c} ds$$

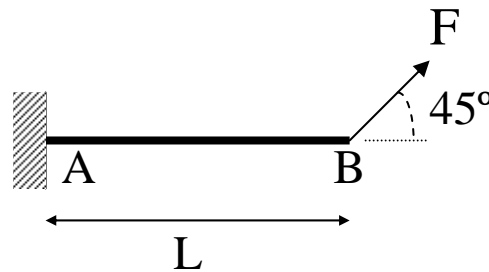
DEFORMACIÓN DE UNA REBANADA POR MOMENTO TORSOR



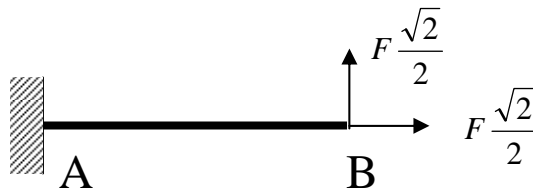
$$d\theta_z = \omega ds = \frac{M_z}{GK} ds$$

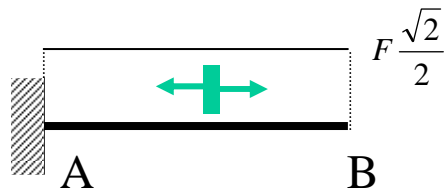
¿Podríamos calcular ya los desplazamientos en algún elemento estructural simple que se encuentre cargado?

Supongamos que nos piden los desplazamientos (horizontal y vertical) del extremo B de la ménsula de la figura sometida a la carga inclinada que se indica:

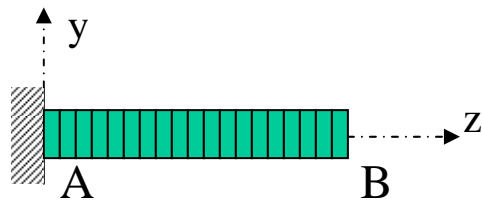


La carga anterior puede descomponerse en sus dos componentes:

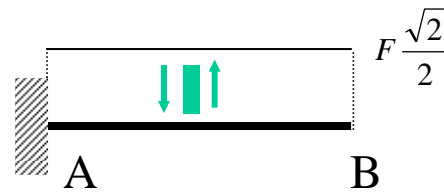




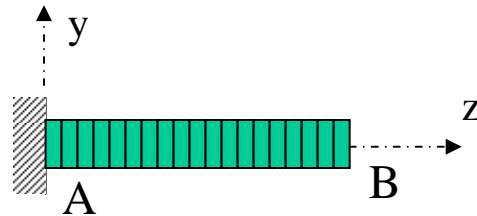
Ley de axiles



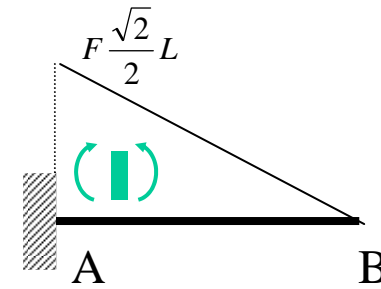
$$w_B = \int_0^L \left(\frac{F \sqrt{2}/2}{E\Omega} \right) dz = \frac{F \sqrt{2}/2 \cdot L}{E\Omega}$$



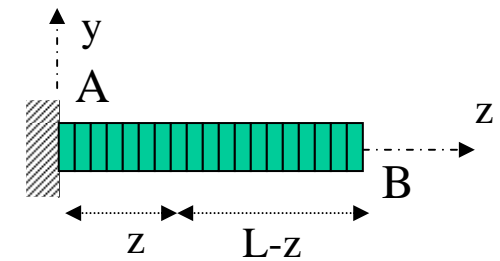
Ley de cortantes



$$v_B = \int_0^L \left(\frac{F \sqrt{2}/2}{G\Omega_c} \right) dz = \frac{F \sqrt{2}/2 \cdot L}{G\Omega_c}$$

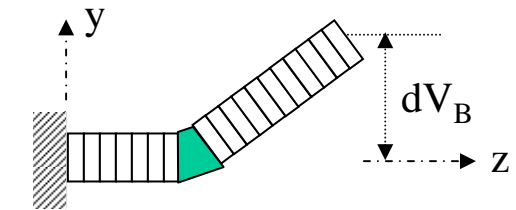
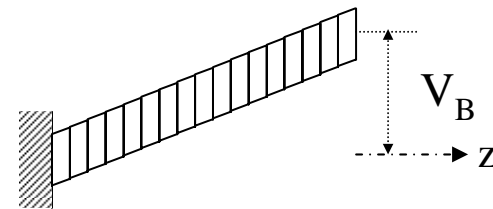
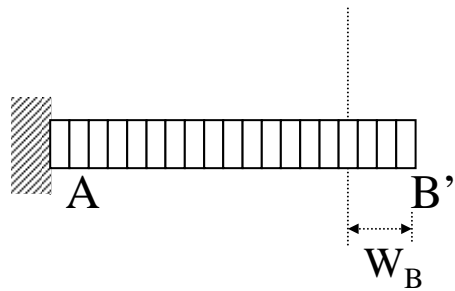


Ley de flectores

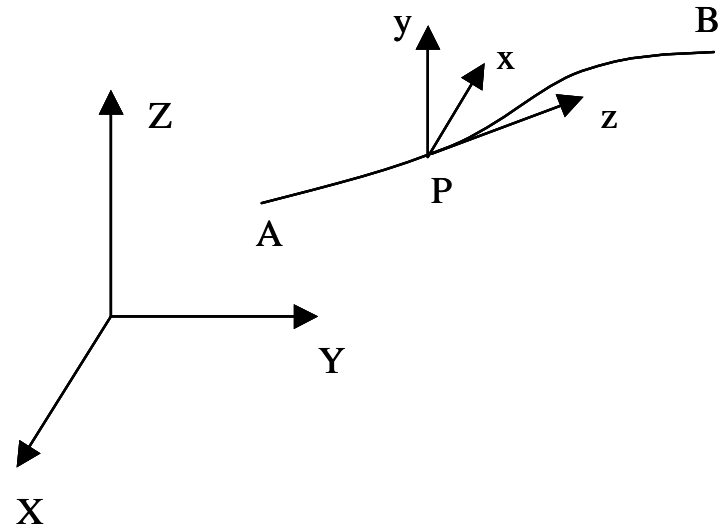


$$dV_B = d\theta \cdot (L-z) = \frac{M(z)}{EI} dz \cdot (L-z) = \frac{F \sqrt{2}/2 \cdot (L-z)}{EI} dz \cdot (L-z)$$

$$V_B = \frac{F \sqrt{2}/2}{EI} \int_0^L (L-z)^2 dz = \frac{F \sqrt{2}/2}{EI} \cdot \frac{L^3}{3}$$



FÓRMULAS DE NAVIER-BRESSE



$$\vec{r} = \overrightarrow{PB}$$

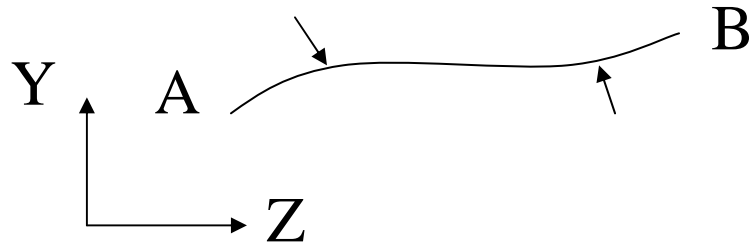
$$\vec{\theta}_B = \vec{\theta}_A + \int_A^B d\vec{\theta}$$

Giro sólido rígido Suma de giros de las rebanadas

$$\vec{u}_B = \vec{u}_A + \vec{\theta}_A \wedge \vec{r}_{AB} + \int_A^B d\vec{u} + \int_A^B d\vec{\theta} \wedge \vec{r}$$

Desplazamiento sólido rígido Desplazamiento inducido por los giros de las rebanadas Desplazamiento inducido por los propios de las rebanadas

PIEZA PLANA CON CARGAS EN SU PLANO



Esfuerzos y desplazamientos en ejes locales:

$$Q_x = M_z = M_y = 0$$

$$u_x = \theta_y = \theta_z = 0$$

$$M_x = M$$

$$u_y = v$$

$$Q_y = Q$$

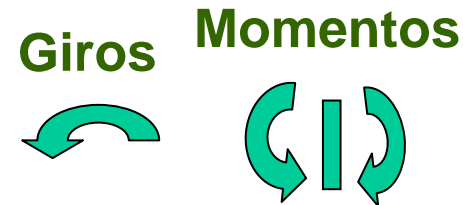
$$u_z = w$$

$$\theta_x = \theta$$

Giros y desplazamientos en ejes globales:

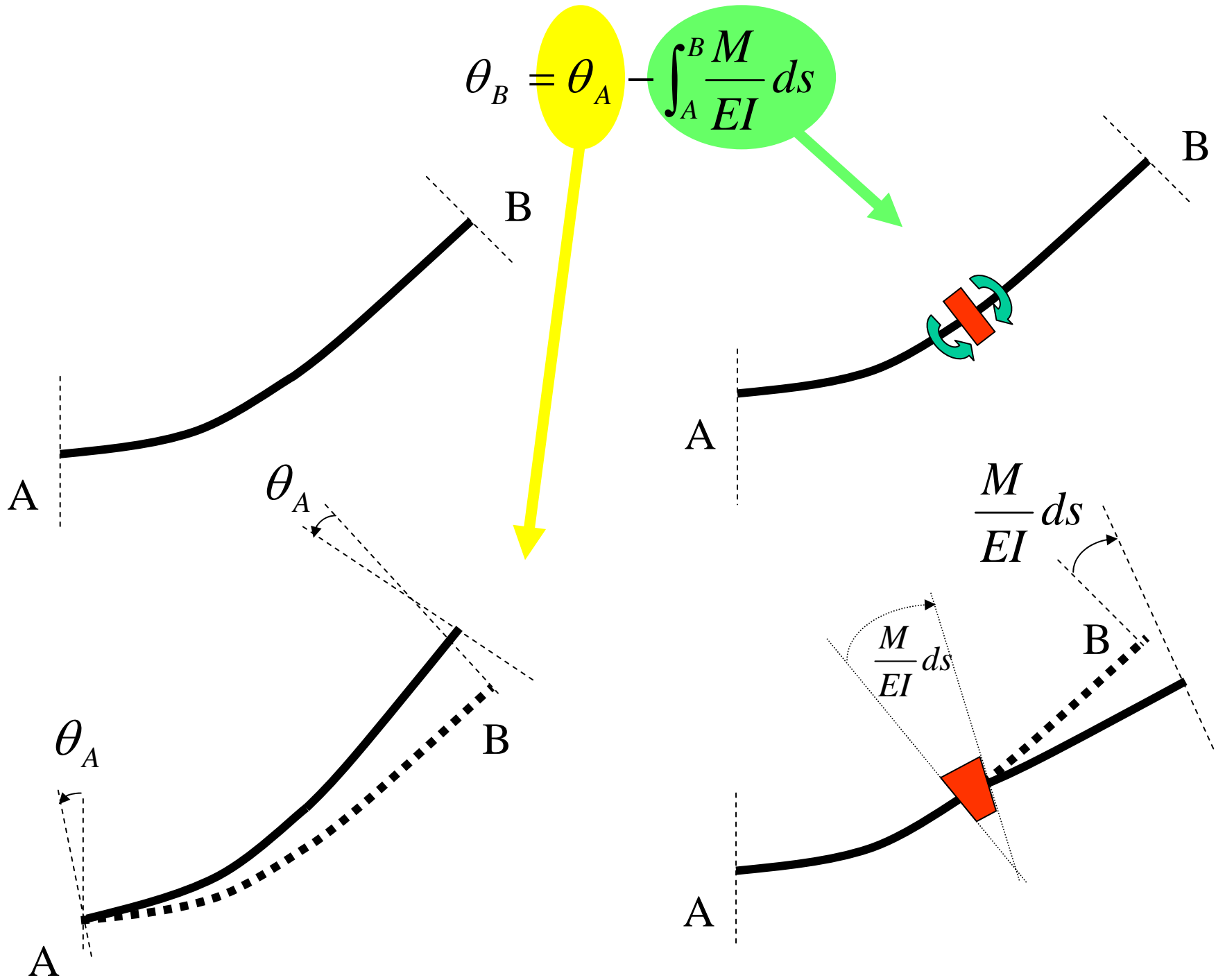
$$\theta_B = \theta_A - \int_A^B \frac{M}{EI} ds$$

Criterios de signos:



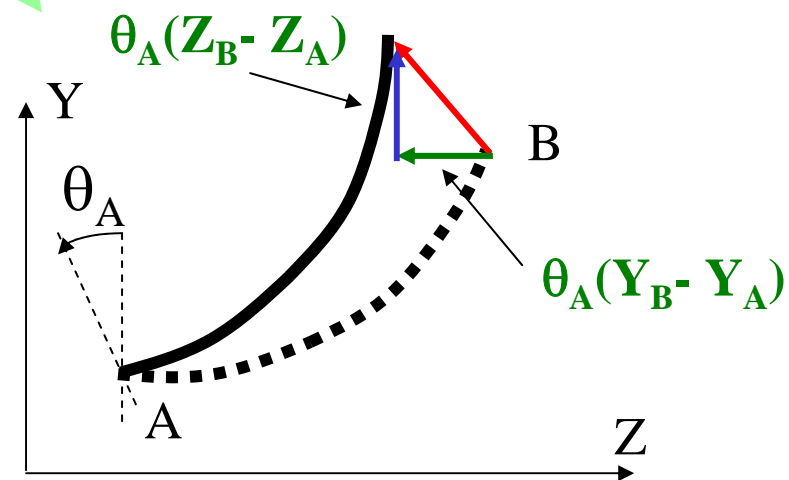
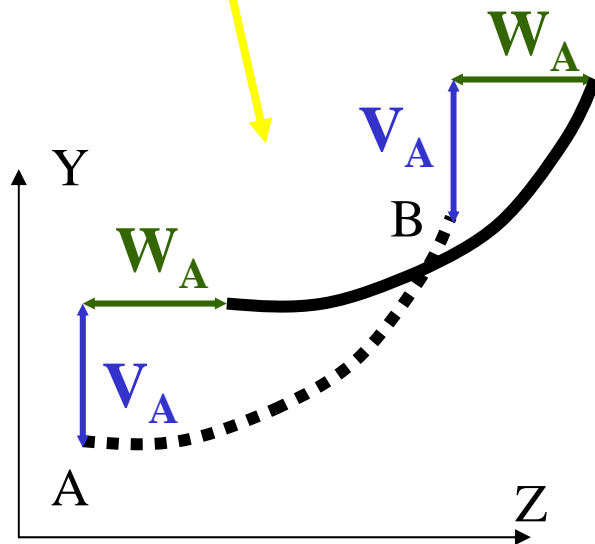
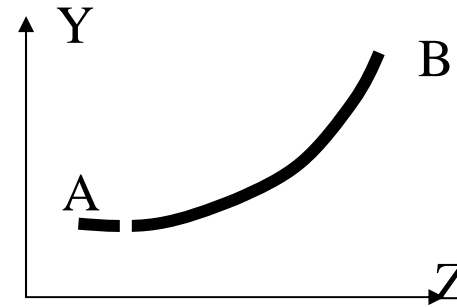
$$v_B = v_A + \theta_A (Z_B - Z_A) + \int_A^B \left(\frac{N}{E\Omega} dY + \frac{Q}{G\Omega_c} dZ \right) - \int_A^B \frac{M}{EI} (Z_B - Z) ds$$

$$w_B = w_A + \theta_A (Y_B - Y_A) + \int_A^B \left(\frac{N}{E\Omega} dZ - \frac{Q}{G\Omega_c} dY \right) + \int_A^B \frac{M}{EI} (Y_B - Y) ds$$



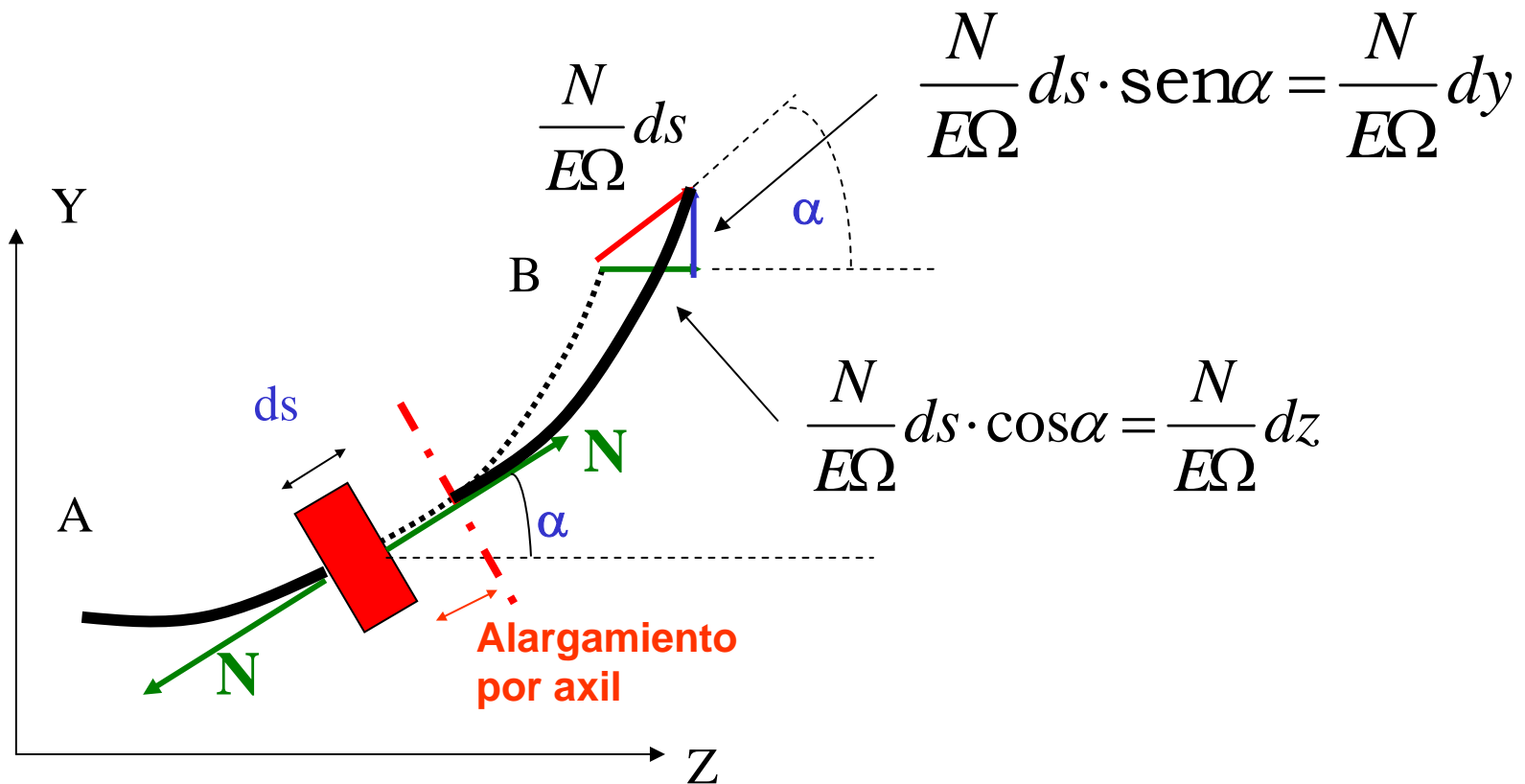
$$v_B = v_A + \theta_A(Z_B - Z_A) + \int_A^B \left(\frac{N}{E\Omega} dY + \frac{Q}{G\Omega_c} dZ \right) - \int_A^B \frac{M}{EI} (Z_B - Z) ds$$

$$w_B = w_A + \theta_A(Y_B - Y_A) + \int_A^B \left(\frac{N}{E\Omega} dZ - \frac{Q}{G\Omega_c} dY \right) + \int_A^B \frac{M}{EI} (Y_B - Y) ds$$



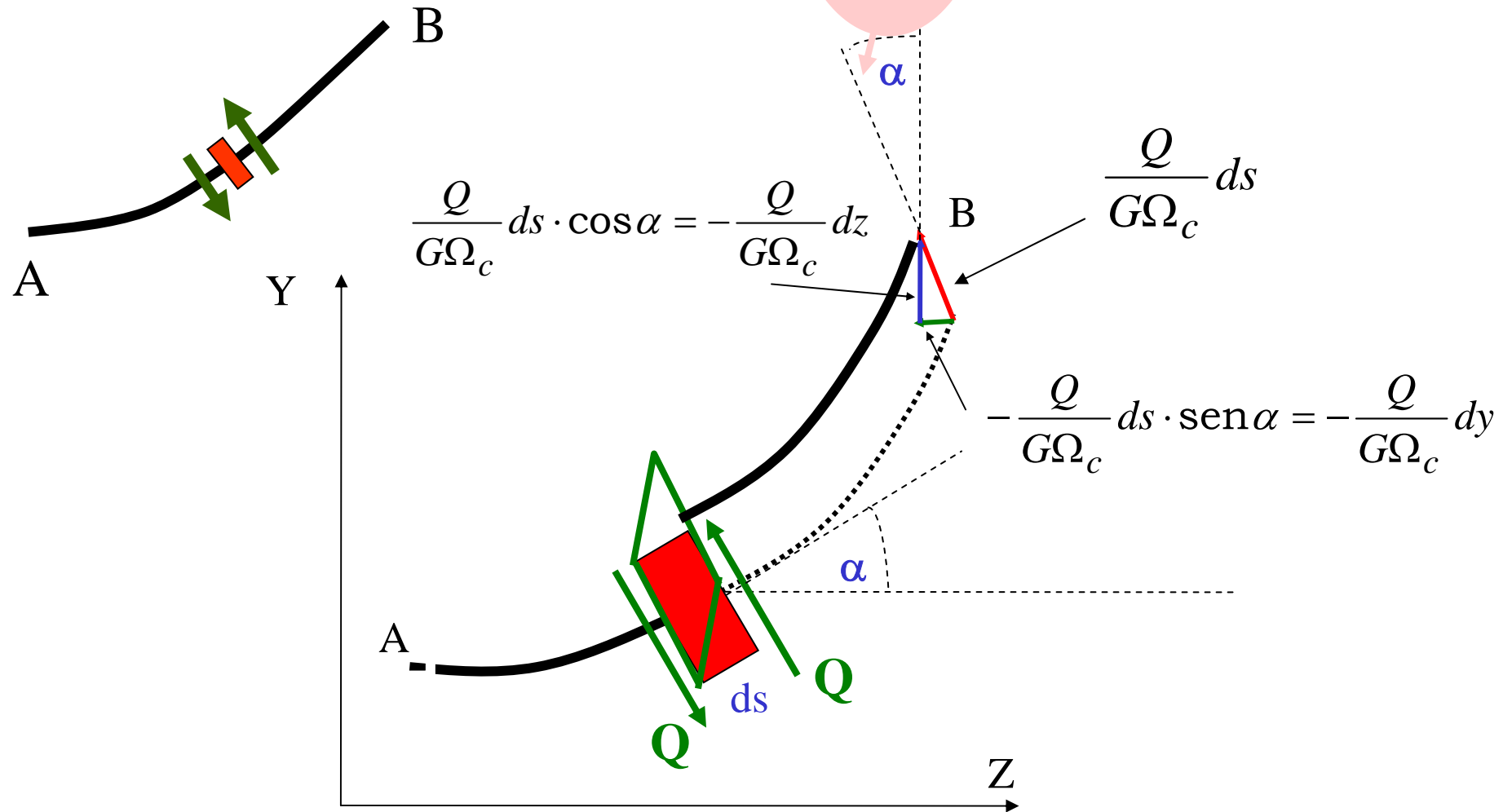
$$v_B = v_A + \theta_A(Z_B - Z_A) + \int_A^B \left(\frac{N}{E\Omega} dY + \frac{Q}{G\Omega_c} dZ \right) - \int_A^B \frac{M}{EI} (Z_B - Z) ds$$

$$w_B = w_A + \theta_A(Y_B - Y_A) + \int_A^B \left(\frac{N}{E\Omega} dZ - \frac{Q}{G\Omega_c} dY \right) + \int_A^B \frac{M}{EI} (Y_B - Y) ds$$



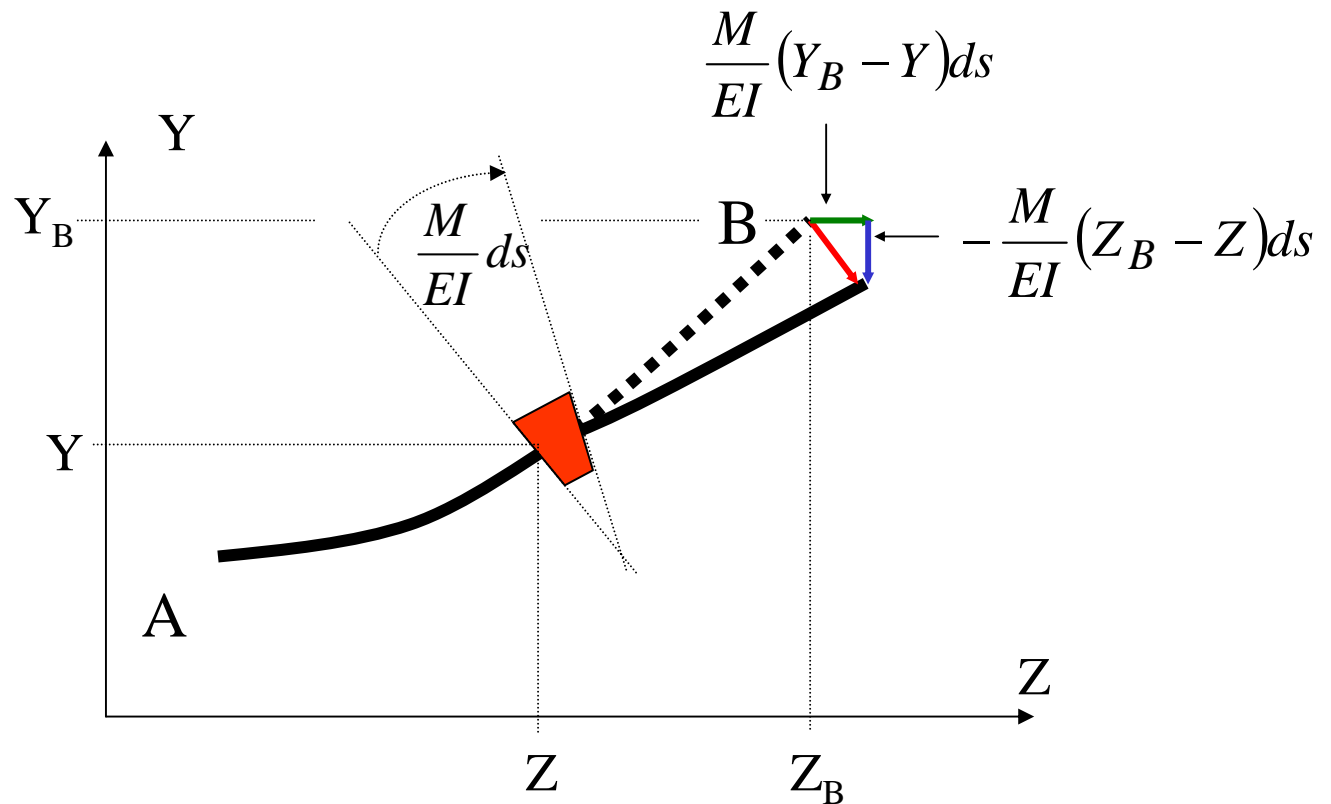
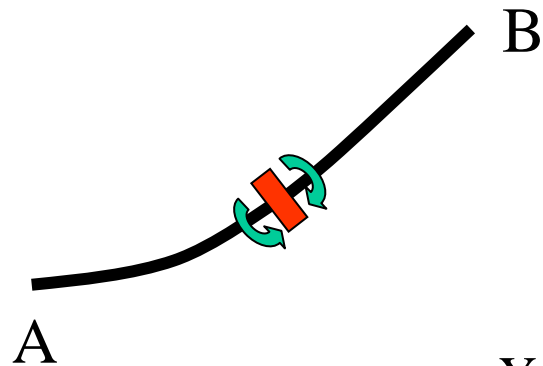
$$v_B = v_A + \theta_A (Z_B - Z_A) + \int_A^B \left(\frac{N}{E\Omega} dY + \frac{Q}{G\Omega_c} dZ \right) - \int_A^B \frac{M}{EI} (Z_B - Z) ds$$

$$w_B = w_A + \theta_A (Y_B - Y_A) + \int_A^B \left(\frac{N}{E\Omega} dZ - \frac{Q}{G\Omega_c} dY \right) + \int_A^B \frac{M}{EI} (Y_B - Y) ds$$

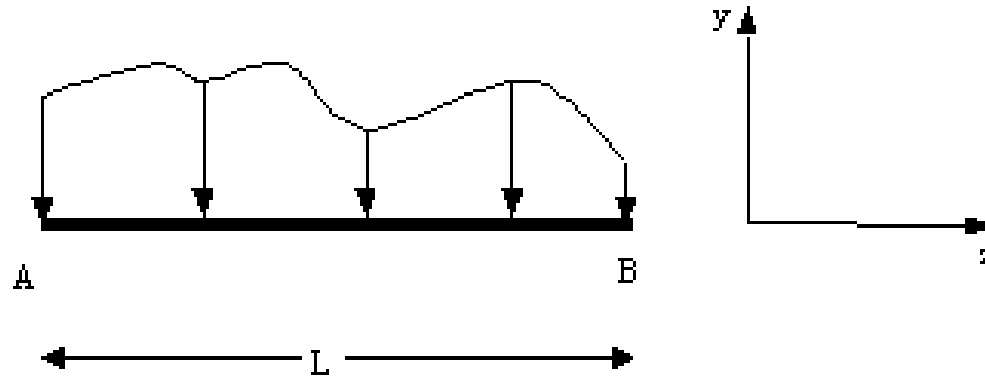


$$v_B = v_A + \theta_A(Z_B - Z_A) + \int_A^B \left(\frac{N}{E\Omega} dY + \frac{Q}{G\Omega_c} dZ \right) - \int_A^B \frac{M}{EI} (Z_B - Z) ds$$

$$w_B = w_A + \theta_A(Y_B - Y_A) + \int_A^B \left(\frac{N}{E\Omega} dZ - \frac{Q}{G\Omega_c} dY \right) + \int_A^B \frac{M}{EI} (Y_B - Y) ds$$



PIEZA RECTA CON CARGAS EN SU PLANO



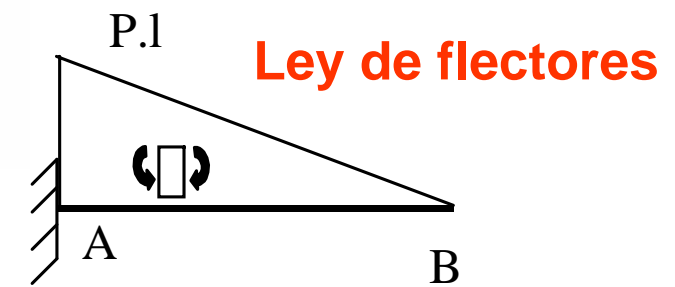
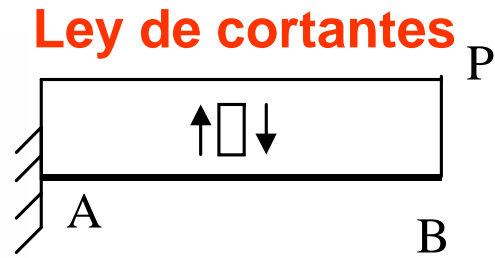
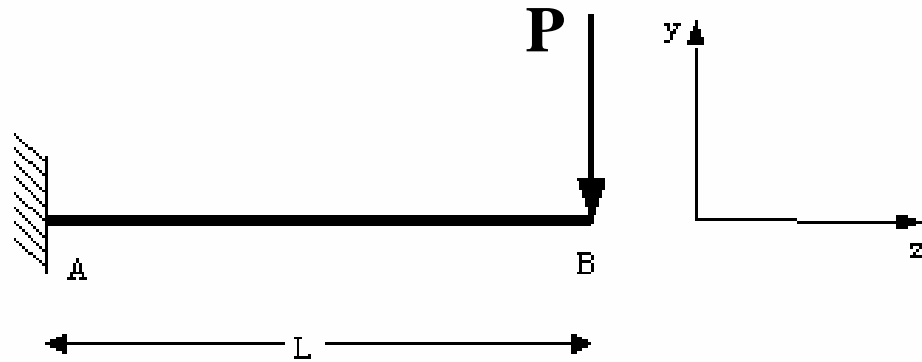
$$ds = dz \quad dy = 0 \quad y_A = y_B = 0$$

$$\theta_B = \theta_A - \int_A^B \frac{M}{EI} dz$$

$$v_B = v_A + \theta_A (z_B - z_A) + \int_A^B \frac{Q}{G\Omega_c} dz - \int_A^B \frac{M}{EI} (z_B - z) dz$$

$$w_B = w_A + \int_A^B \frac{N}{E\Omega} dz$$

Ejemplo: Determinar la flecha en B



$$W_A = W_B$$

$$v_B = \int_A^B \frac{-P}{G\Omega_c} dz - \int_A^B \frac{P(L-z)}{EI} (1-z) dz$$

$$v_B = -\frac{PL}{G\Omega_c} - \frac{P}{EI} \left[-\frac{(L-z)^3}{3} \right]_{z=0}^{z=L}$$

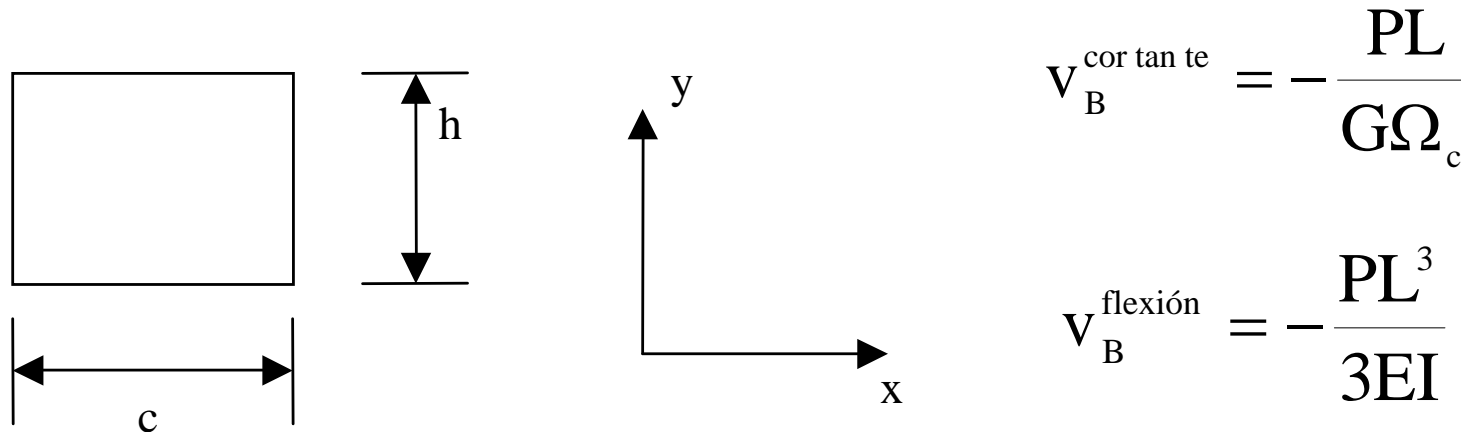
Cortante

$$v_B = -\frac{PL}{G\Omega_c}$$

$$-\frac{PL^3}{3EI}$$

Flexión

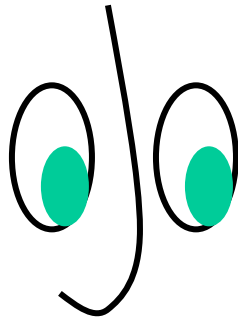
Pero, ¿qué sucede en la práctica?



$$\frac{V_B^{\text{cor tan te}}}{V_B^{\text{flexión}}} = \frac{PL/G\Omega_c}{PL^3/3EI} = \frac{3EI}{G\Omega_c L^2} = \frac{3E \frac{1}{12} ch^3}{\frac{E}{2(1+\nu)} \cdot \frac{ch}{1,2} L^2} = 0,6 \left(\frac{h}{L} \right)^2 (1+\nu)$$

Si hacemos, por ejemplo, $L/h = 50$, $\nu=0,2$, el cociente anterior resulta ser 0,000288.

La flecha debida al cortante es despreciable (0,03%) frente a la de flexión.



En Resistencia de Materiales suele despreciarse la contribución del esfuerzo cortante en el cálculo de las flechas del elemento estructural.

Esto, de ninguna manera, quiere decir que los esfuerzos cortantes sean nulos.

Pieza recta con cargas en su plano despreciando las deformaciones inducidas por esfuerzo cortante y esfuerzo axial

$$\theta_B = \theta_A - \int_A^B \frac{M}{EI} dz$$

$$v_B = v_A + \theta_A (z_B - z_A) + \int_A^B \frac{Q}{G\Omega_c} dz - \int_A^B \frac{M}{EI} (z_B - z) dz$$

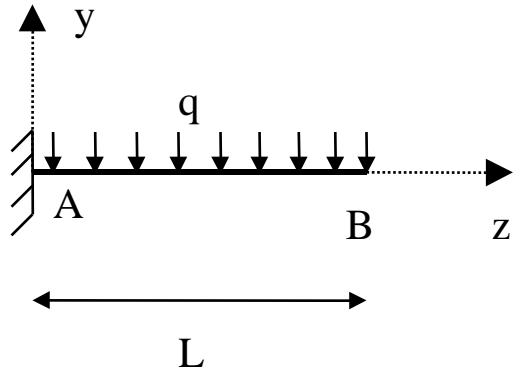
$$w_B = w_A + \int_A^B \frac{N}{E\Omega} dz$$

$$\theta_B = \theta_A - \int_A^B \frac{M}{EI} dz$$

$$v_B = v_A + \theta_A (z_B - z_A) - \int_A^B \frac{M}{EI} (z_B - z) dz$$

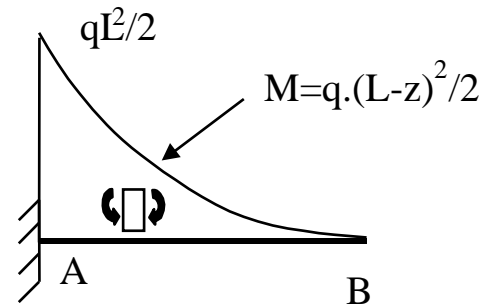
$$w_B = w_A$$

EJEMPLO:



¿Flecha y giro en B?

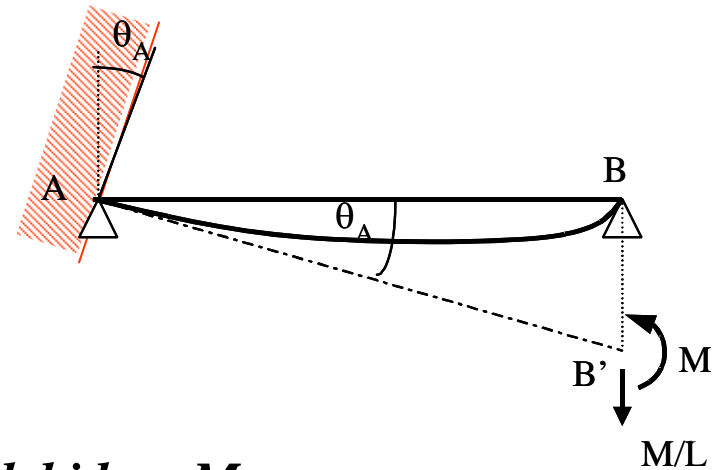
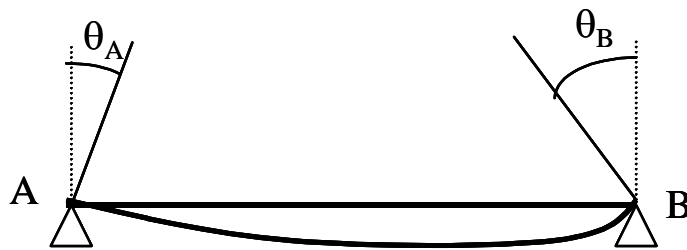
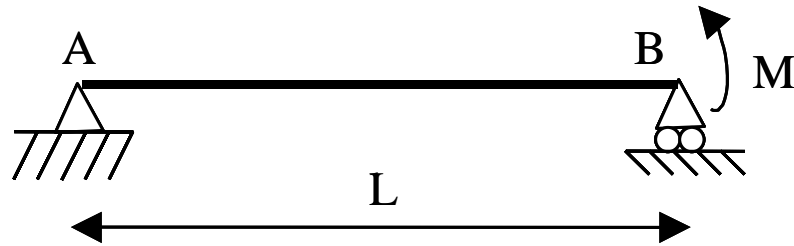
Ley de momentos flectores:



$$\theta_B = \int_A^B \frac{M}{EI} dz = \int_0^L \frac{q(L-z)^2}{2EI} dz = \frac{qL^3}{6EI}$$

$$v_B \downarrow = \int_A^B \frac{M \cdot (L-z)}{2EI} dz = \int_0^L \frac{q \cdot (L-z)^3}{2EI} dz = \frac{q \cdot L^4}{8EI}$$

Otras aplicaciones en problemas isostáticos:



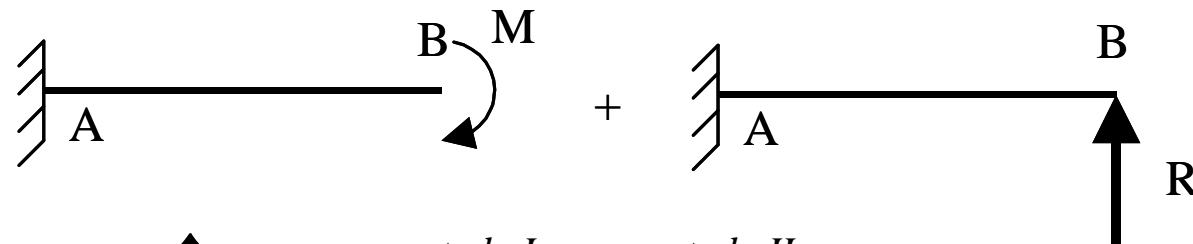
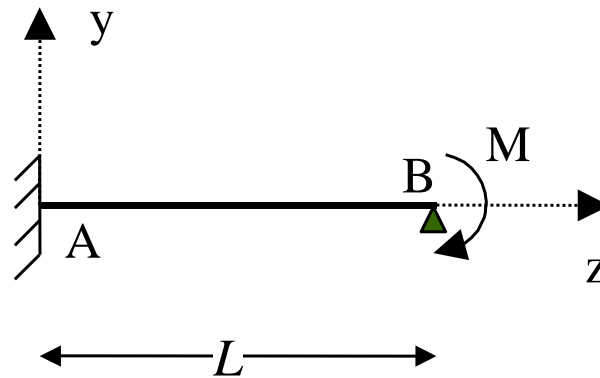
$$\theta_A \cdot L = \text{Flecha debida a } M/L + \text{Flecha debida a } M$$

$$\theta_A \cdot L = -\frac{M}{L} \frac{L^3}{3EI} + \frac{ML^2}{2EI} \Rightarrow \theta_A = \frac{ML}{6EI} \text{ en sentido horario}$$

$$\theta_B (\text{antihorario}) = \theta_B (\text{antihorario producido por } M / l) + \theta_B (\text{antihorario producido por } M) + \theta_A (\text{antihorario})$$

$$\theta_B (\text{antihorario}) = -\frac{Ml}{2EI} + \frac{Ml}{EI} - \frac{Ml}{6EI} \Rightarrow \theta_B (\text{antihorario}) = \frac{Ml}{3EI}$$

APLICACIÓN A PROBLEMAS HIPERESTÁTICOS



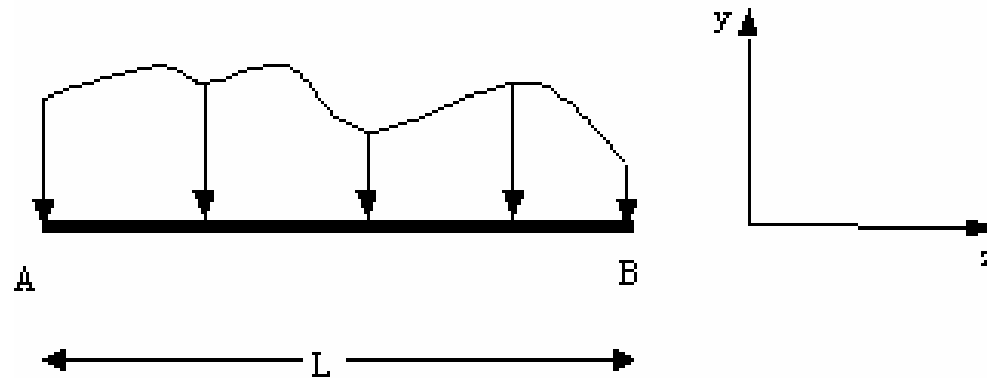
$$\uparrow v_B = v_B^{estado I} + v_B^{estado II} = 0$$

$$\uparrow v_B^{estado I} = -\int_A^B \frac{M(L-z)}{EI} dz = -\frac{ML^2}{2EI}$$

$$\uparrow v_B^{estado II} = \frac{RL^3}{3EI}$$

$$-\frac{ML^2}{2EI} + \frac{RL^3}{3EI} = 0 \Rightarrow R = \frac{3M}{2L}$$

ECUACIONES DE NAIER-BRESSE PARA UNA PIEZA RECTA CON CARGAS EN SU PLANO DESPRECIANDO LA CONTRIBUCION A LOS MOVIMIENTOS DE LOS ESFUERZOS CORTANTES Y AXILES



$$\theta_B = \theta_A - \int_A^B \frac{M}{EI} dz$$

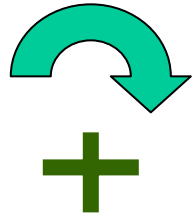
$$V_B = V_A + \theta_A (z_B - z_A) - \int_A^B \frac{M}{EI} (z_B - z) dz$$

$$W_B = W_A$$

TEOREMAS DE MOHR

Christian Otto Mohr
(1835-1918)

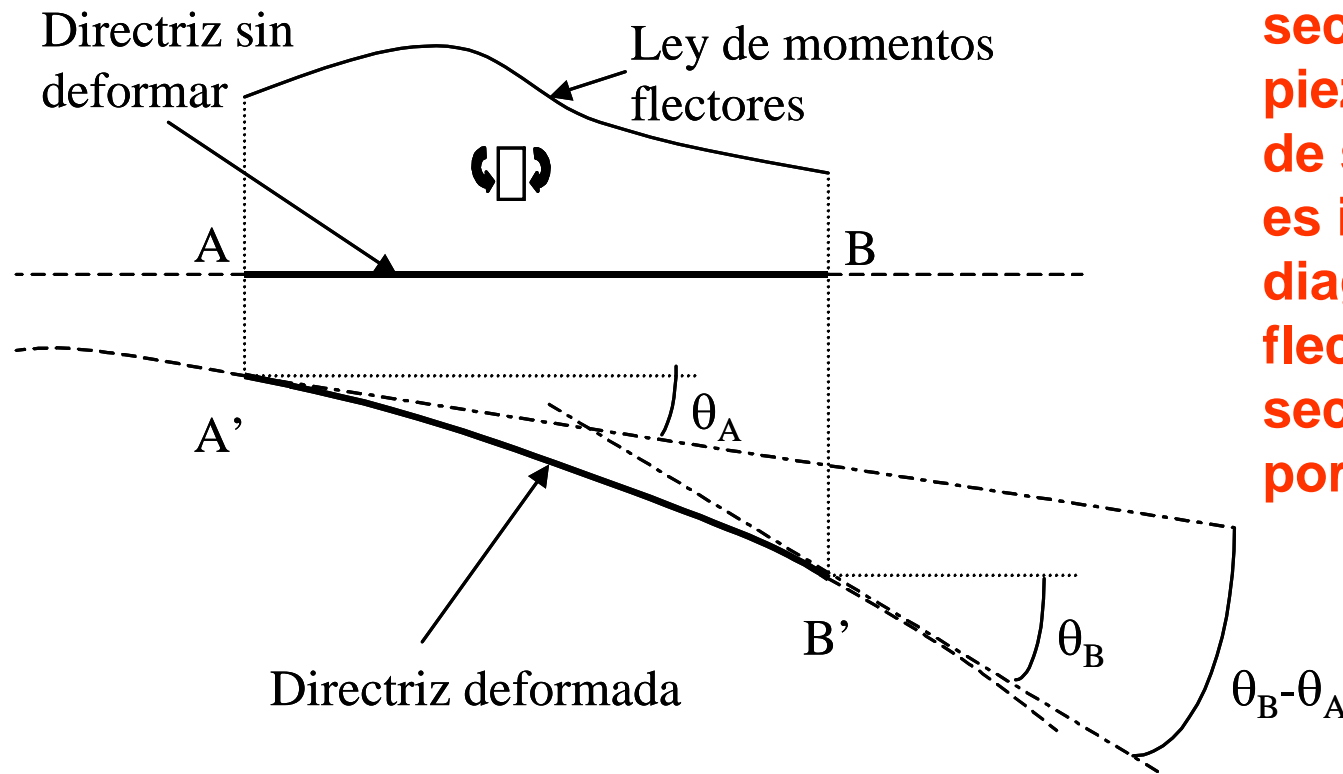
PRIMER TEOREMA DE MOHR



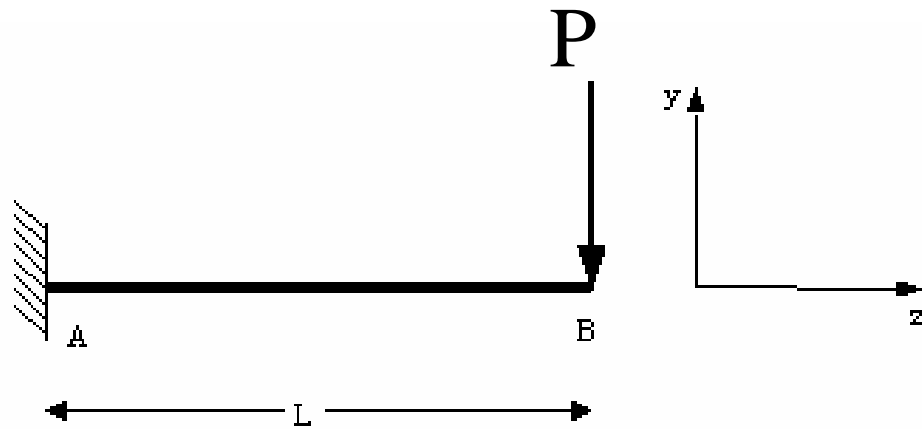
$$\theta_B = \theta_A + \int_A^B \frac{M}{EI} dz$$

$$\theta_B - \theta_A = \int_A^B \frac{M}{EI} dz$$

“El ángulo girado por la directriz entre dos secciones A y B de una pieza prismática recta de sección constante es igual al área del diagrama de momentos flectores entre ambas secciones dividido por el producto EI ”

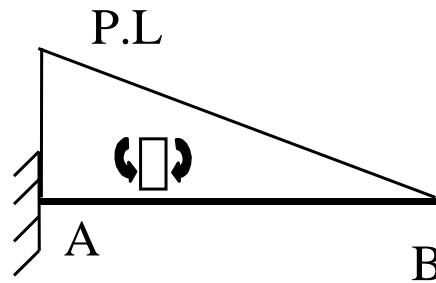


EJEMPLO DE APLICACIÓN DEL PRIMER TEOREMA DE MOHR



¿Giro en B?

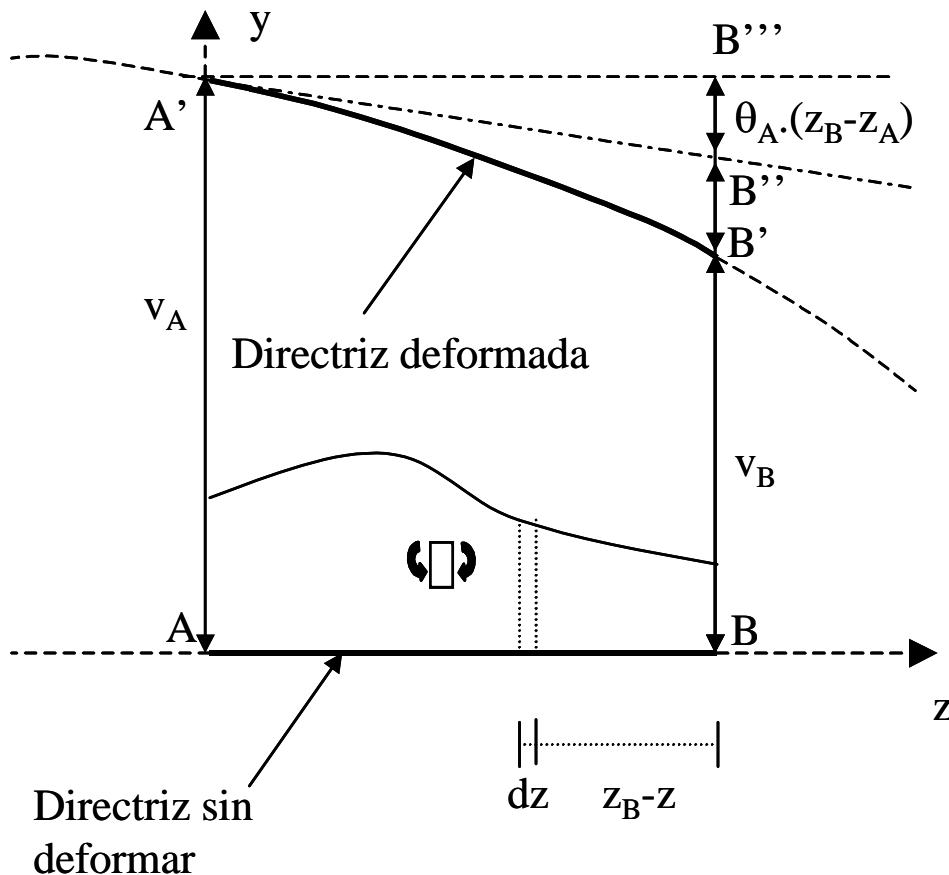
Ley de momentos flectores



$$\theta_B - \theta_A = \frac{\left(\frac{1}{2} L \cdot (PL) \right)}{EI} = \frac{PL^2}{2EI} \quad (\text{horario})$$

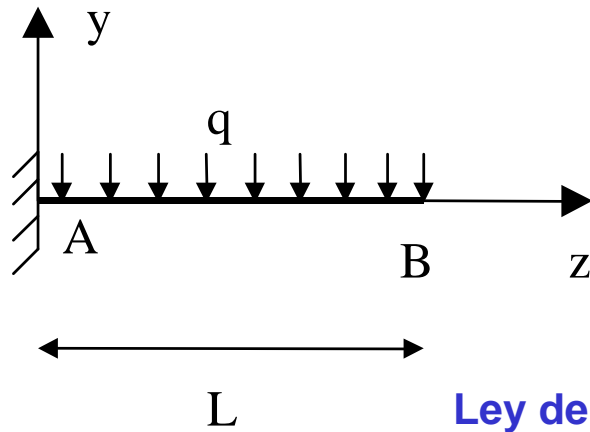
SEGUNDO TEOREMA DE MOHR

$$\uparrow v_B = \uparrow v_A - \theta_A(z_B - z_A) - \int_A^B \frac{M}{EI} (z_B - z) dz$$



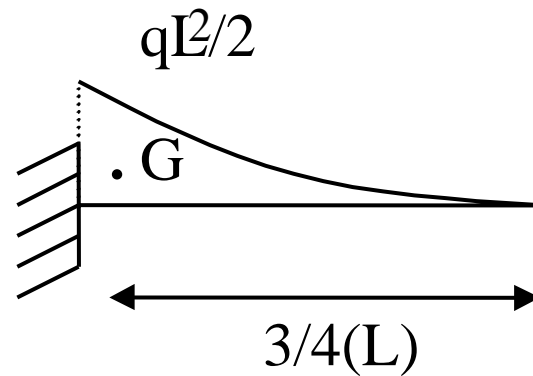
“La distancia, en dirección perpendicular a la directriz sin deformar, entre un punto B' de la directriz deformada a la recta tangente a la directriz deformada en otro (A) es igual al momento estático del área de momentos flectores entre las secciones A y B respecto del eje perpendicular a la directriz sin deformar que pasa por el punto B, dividido por el producto EI ”

EJEMPLO DE APLICACIÓN DEL SEGUNDO TEOREMA DE MOHR



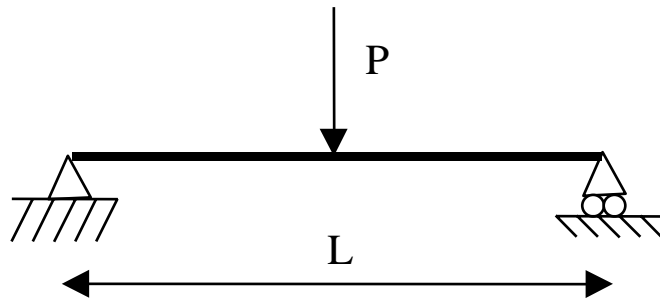
¿Flecha en B?

Ley de momentos flectores

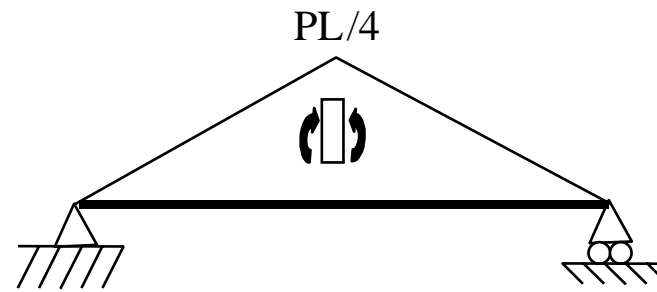


$$\downarrow v_B = \frac{\left(\frac{1}{3} L \cdot q \cdot L^2 / 2\right) \left(\frac{3}{4} L\right)}{EI} = \frac{pL^4}{8EI}$$

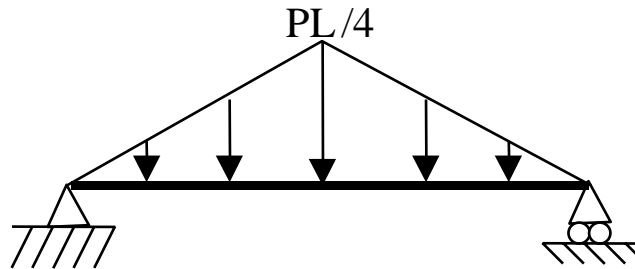
TERCER TEOREMA DE MOHR (TEOREMA DE LA VIGA CONJUGADA)



VIGA REAL



LEY DE MOMENTOS FLECTORES



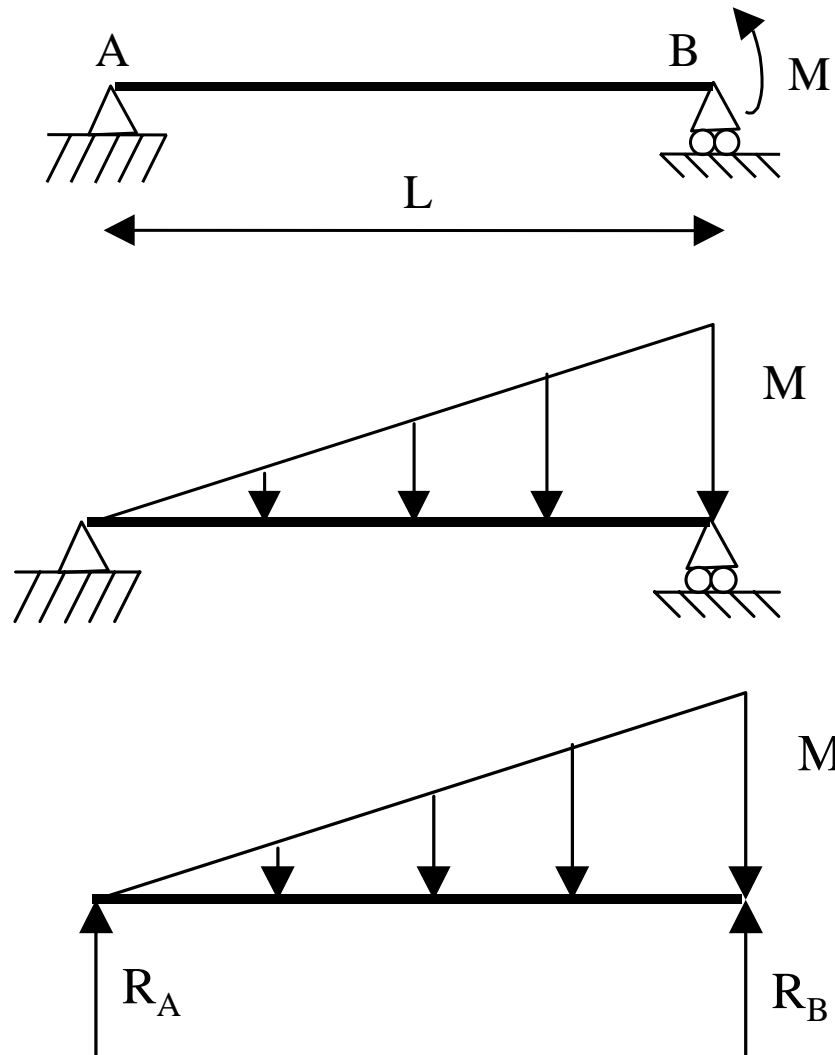
VIGA CONJUGADA

PROPIEDADES DE LA VIGA CONJUGADA:

El giro absoluto que experimenta una sección de la viga real es igual al esfuerzo cortante, en esa misma sección de la viga conjugada, dividido por el producto EI

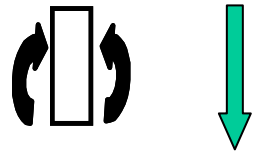
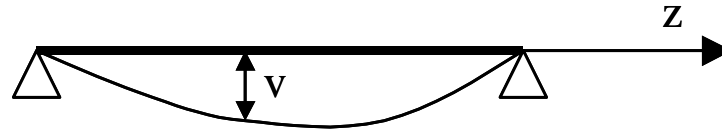
La flecha en un punto de la directriz de la viga real es igual al momento flector, en la misma sección de la viga conjugada, dividida por el producto EI

EJEMPLO:



$$\theta_B = \frac{R_B}{EI} = \frac{ML}{3EI}$$

ECUACIÓN DIFERENCIAL DE LA ELASTICA



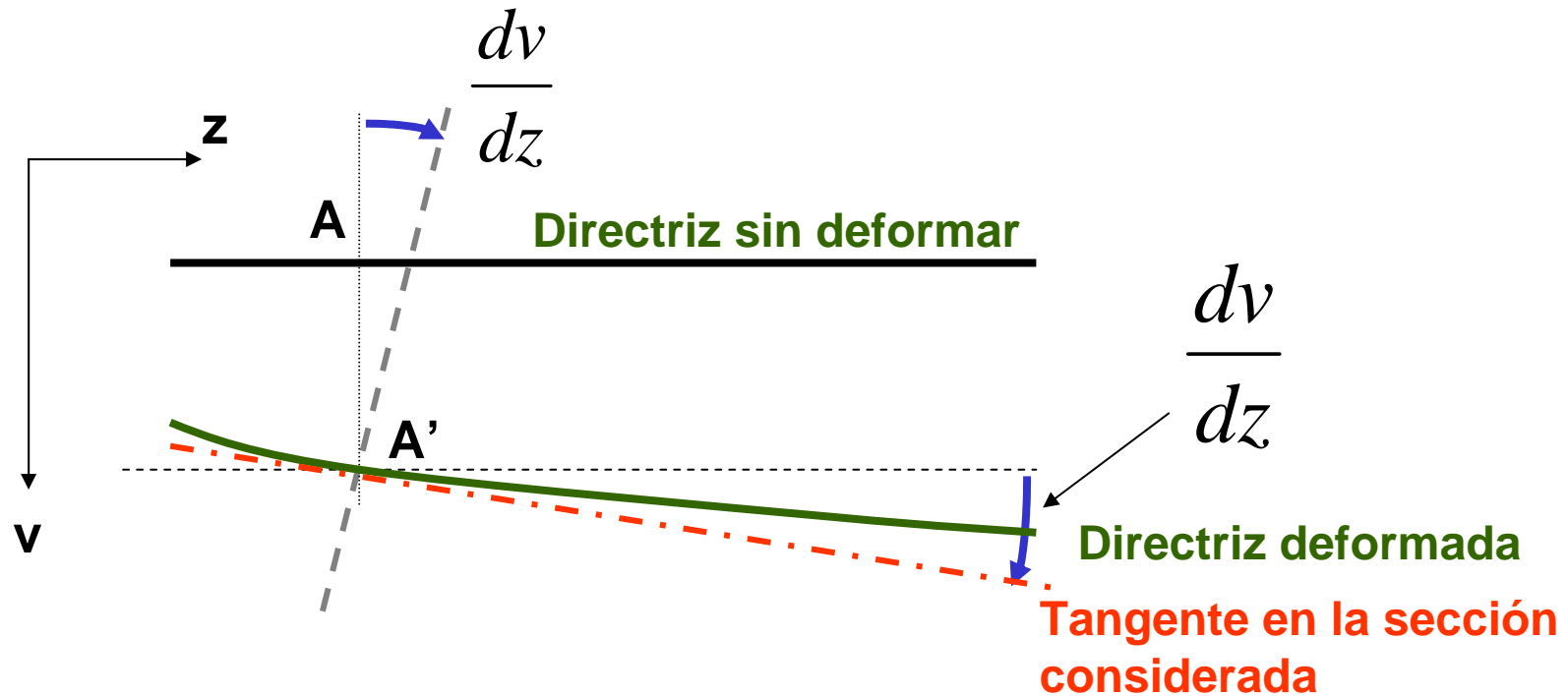
+

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M(z)}{EI} = - \frac{d^2 v / dz^2}{\left[1 + \left(\frac{dv}{dz} \right)^2 \right]^{3/2}}$$

$$dv/dz \ll 1$$

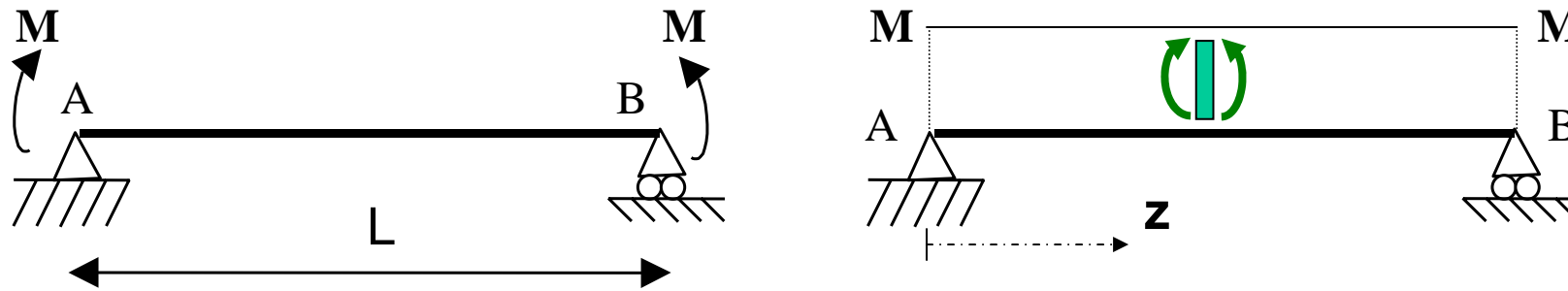
$$\frac{M(z)}{EI} = - \frac{d^2 v}{dz^2}$$

¿Qué representa $\frac{dv}{dz}$?



$\frac{dv}{dz}$ representa el giro absoluto experimentado por la sección

¿Qué trascendencia tiene el hecho de despreciar dv/dz en la deducción de la ecuación diferencial de la elástica?



En este problema no hay reacciones en los apoyos, ni esfuerzos cortantes en las rebanadas: es un problema de flexión pura.

En la realidad (sin despreciar nada) todas las rebanadas se deforman por igual, experimentando el mismo giro $d\theta$:

$$d\theta = \frac{M}{EI} dz \Rightarrow \frac{d\theta}{dz} = \frac{M}{EI} = cte.$$

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{1}{\rho} = cte.$$

La elástica es un arco de circunferencia de radio EI/M

Veamos en que se traduce la hipótesis $dv/dz \approx 0$ en este problema

Ecuación diferencial de la elástica: $\frac{M}{EI} = -\frac{d^2v}{dz^2}$

Integramos una vez: $\frac{dv}{dz} = -\frac{M}{EI}z + C$

Imponemos que $\frac{dv}{dz}$ debe ser nula en $z=L/2$ por simetría: $C = \frac{M}{EI} \frac{L}{2}$

$$\frac{dv}{dz} = \frac{M}{EI} \left(\frac{L}{2} - z \right)$$

Integramos por segunda vez: $v = -\frac{M}{2EI} \left(\frac{L}{2} - z \right)^2 + C'$

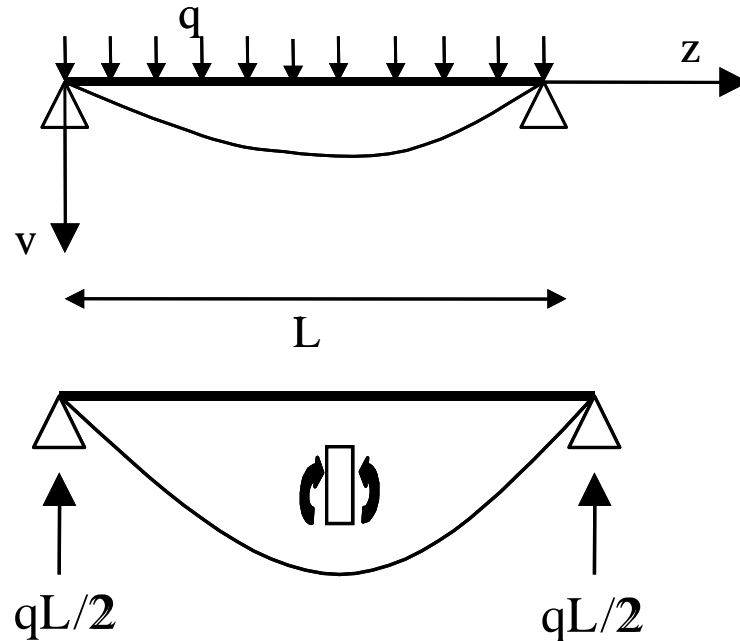
Imponemos que v debe ser nula en $z=0$ (apoyo): $C' = \frac{M}{2EI} \frac{L^2}{4} = \frac{M}{EI} \frac{L^2}{8}$

$$v = \frac{M}{EI} \left[\frac{L^2}{8} - \frac{1}{2} \left(\frac{L}{2} - z \right)^2 \right]$$



La elástica es un arco parabólico !!!!!

OTRO EJEMPLO DE DETERMINACION DE LA ELASTICA



$$M(z) = \frac{q}{2} (L \cdot z - z^2)$$

$$\frac{d^2 v}{dz^2} = -\frac{M(z)}{EI} = \frac{q}{2} \frac{(L \cdot z - z^2)}{EI} \quad \frac{dv}{dz} = \frac{q}{2EI} \left(\frac{z^3}{3} - L \frac{z^2}{2} + C \right)$$

Por simetría de la pieza, la pendiente de la tangente a la directriz deformada en el punto $z=L/2$ debe ser nula, por lo que $C=L^3/12$

$$v = \frac{q}{2EI} \left(\frac{z^4}{12} - L \frac{z^3}{6} + \frac{L^3 z}{12} + C' \right)$$

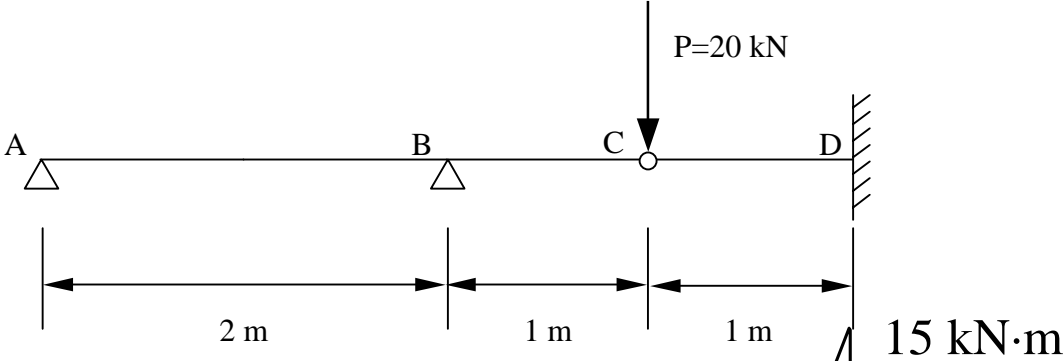
Cuando $z=0$ la flecha v es nula, por lo que $C'=0$, y la ecuación de la elástica es:

$$v = \frac{q}{12EI} \left(\frac{z^4}{2} - Lz^3 + \frac{L^3 z}{2} \right)$$

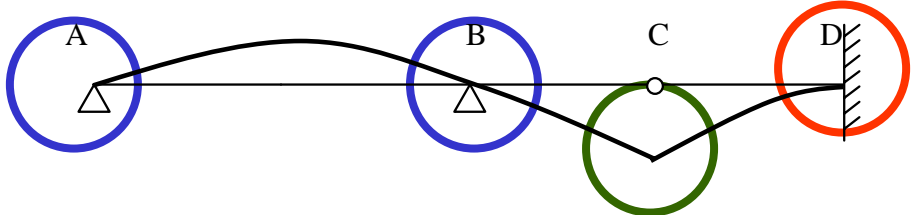
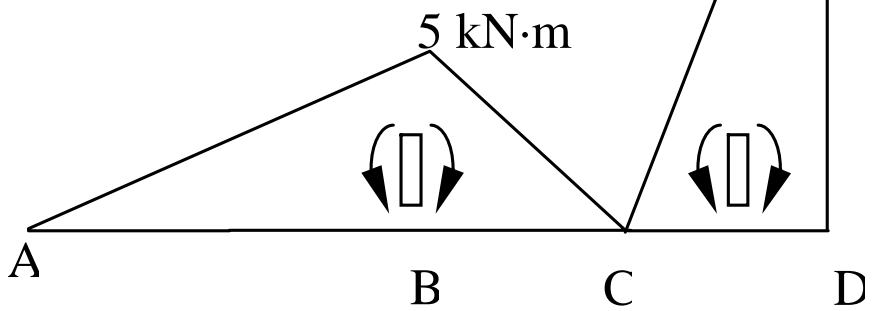
La flecha máxima se produce cuando $z=L/2$ y su valor es:

$$v_{\max} = \frac{5qL^4}{348EI}$$

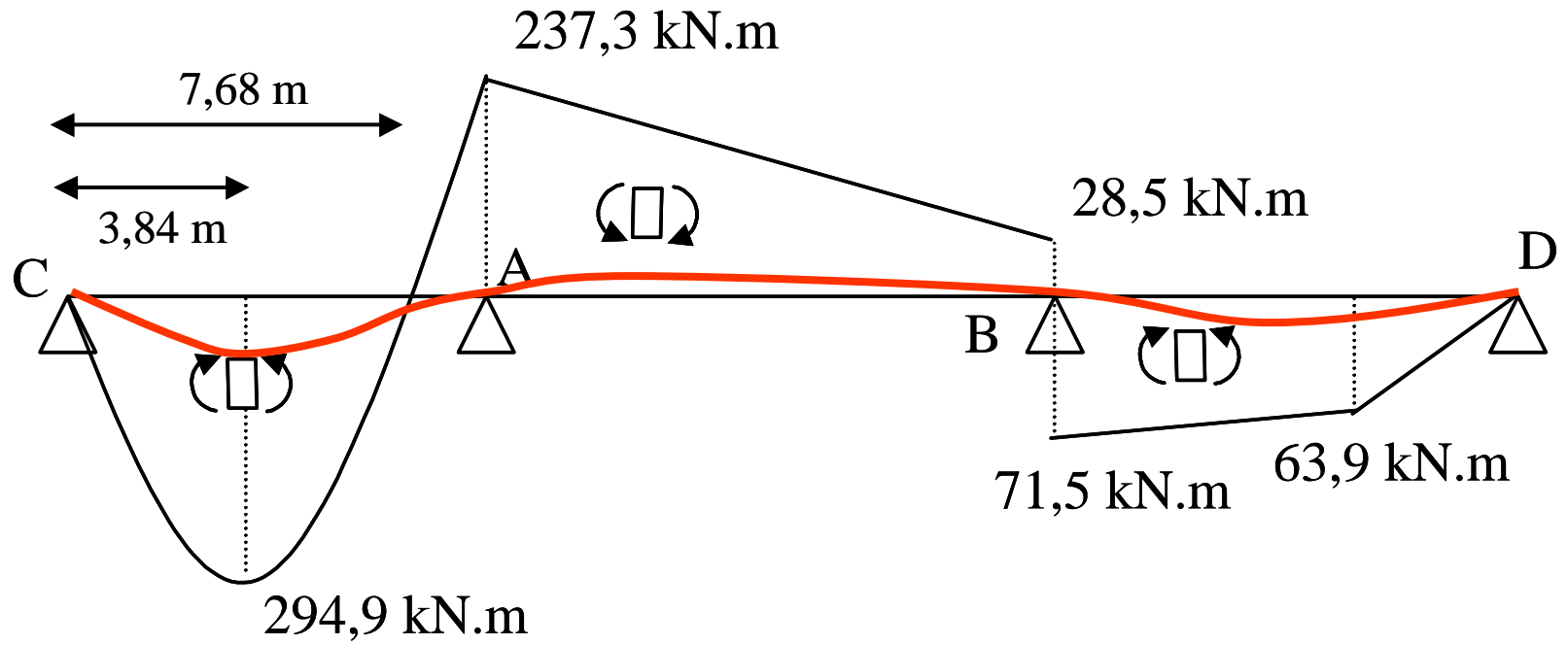
EL DIBUJO DE LA DEFORMADA A ESTIMA



Ley de flectores

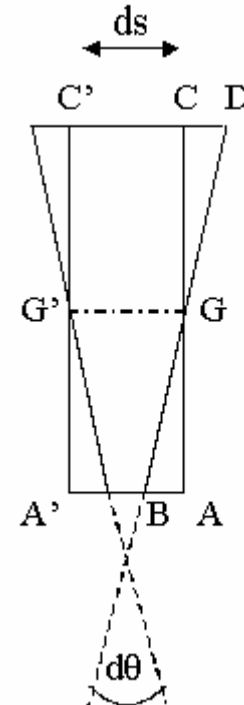
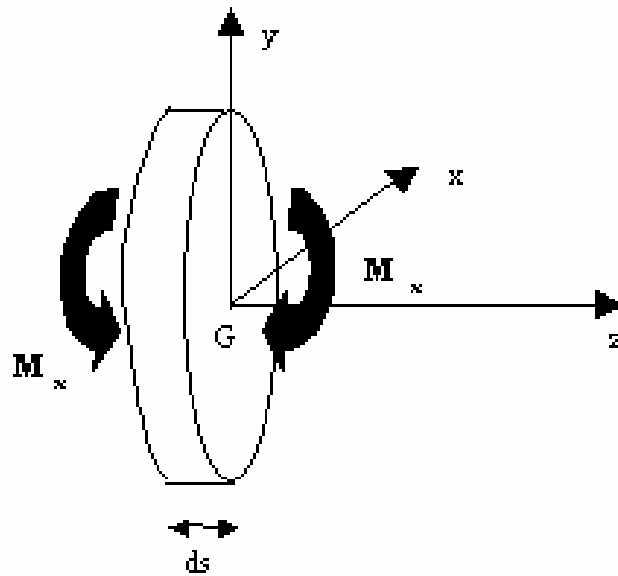


OTRO EJEMPLO:



APLICACIÓN DEL PRIMER TEOREMA DE CASTIGLIANO

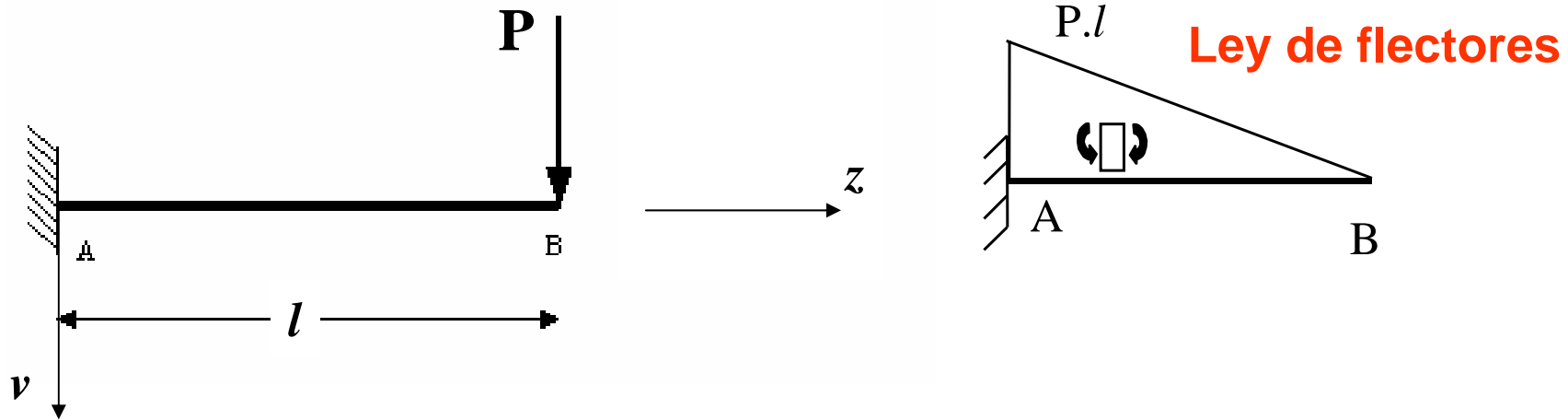
Energía elástica de una pieza a flexión



$$d\theta_x = \frac{M_x}{EI_x} ds$$

$$dU = M_x \cdot d\theta_x = \frac{M_x^2}{EI_x} ds$$

$$U = \int \frac{M_x^2}{EI_x} ds$$



$$U = \int \frac{M_x^2}{EI_x} ds = \int_{z=0}^{z=l} \frac{P^2 (l-z)^2}{EI_x} dz = \frac{P^2}{EI_x} \left. \frac{(l-z)^3}{-3} \right|_0^l = \frac{P^2 l^3}{-3EI_x}$$