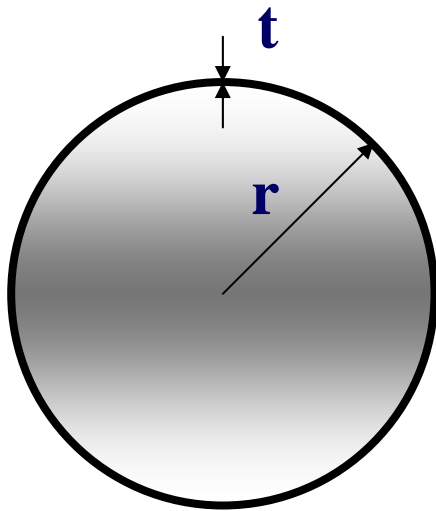


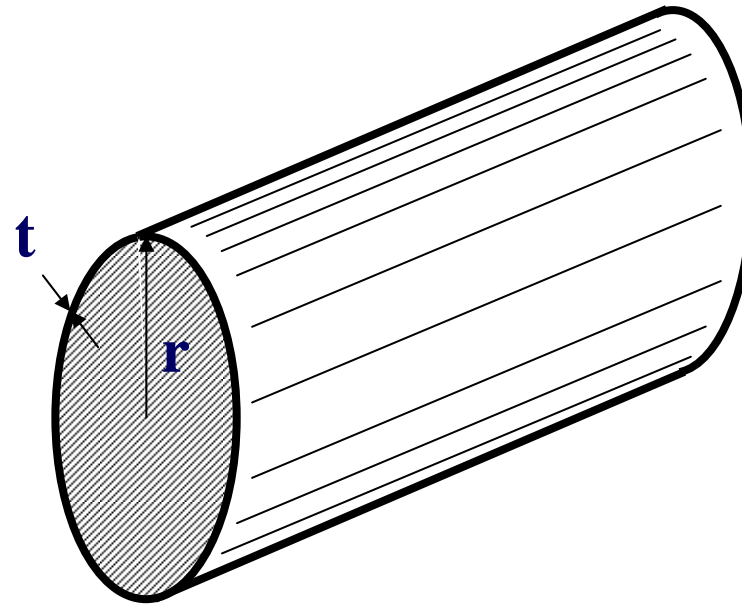
CAPÍTULO 1

TENSIÓN

Hoy trataremos algún aspecto del diseño de una vasija o depósito de pared delgada ($t/r < 10$) sometida a presión interna



Vasija esférica



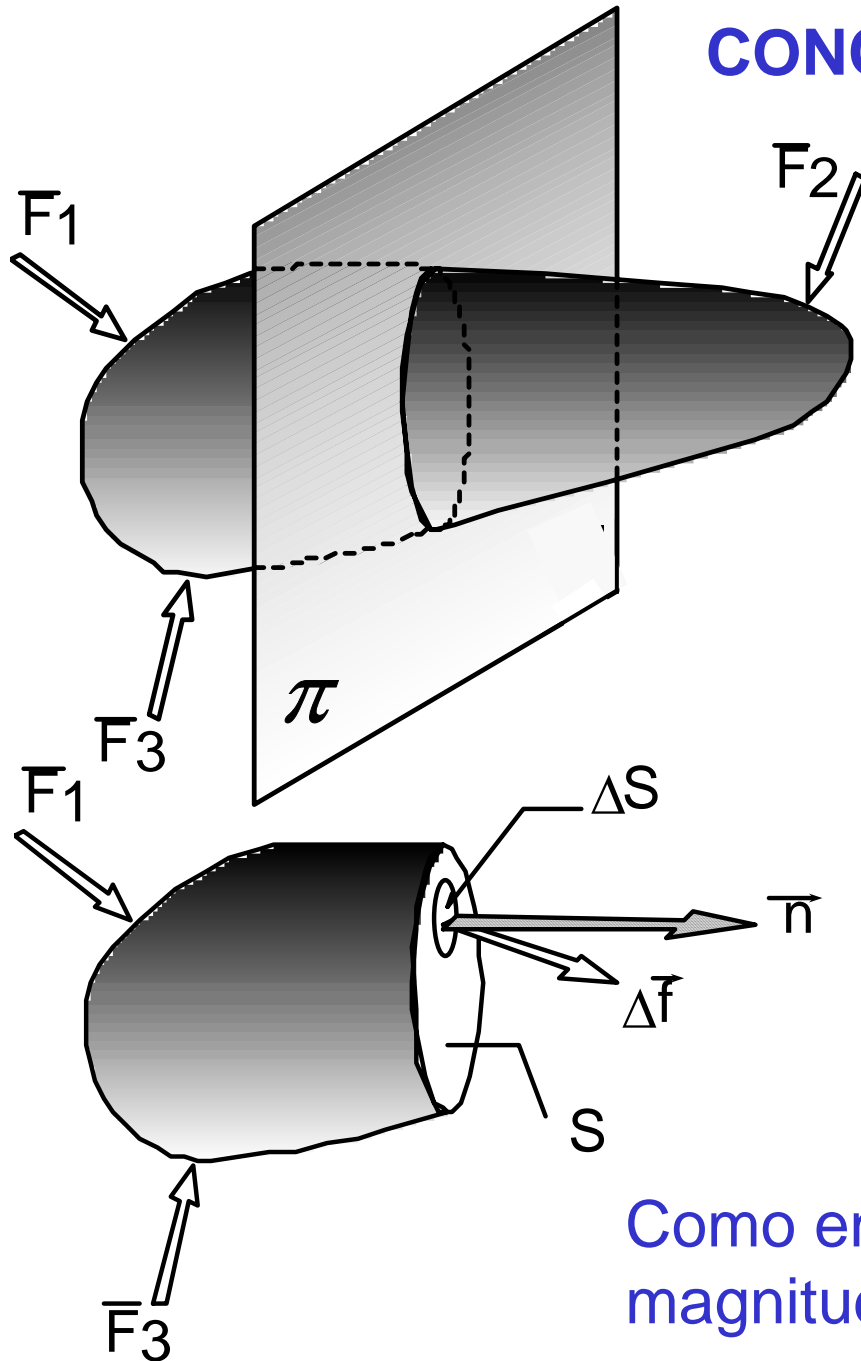
Vasija cilíndrica

¿Qué conceptos necesitamos manejar?

Básicamente dos: el de tensión y el de resistencia a tracción



CONCEPTO DE VECTOR TENSIÓN



$$\sum \bar{F} = 0$$

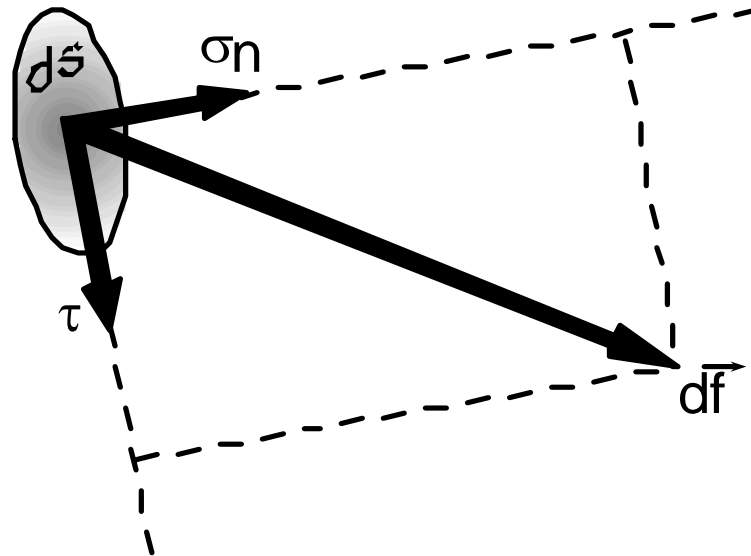
$$\sum \bar{M} = 0$$

$$\vec{\sigma} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{f}}{\Delta S} = \frac{d\vec{f}}{dS}$$

Unidades: $N/m^2 = Pa$

Como en la práctica 1 Pa es de pequeña magnitud, utilizaremos, en general, MPa

COMPONENTES INTRÍNSECAS DEL VECTOR TENSIÓN

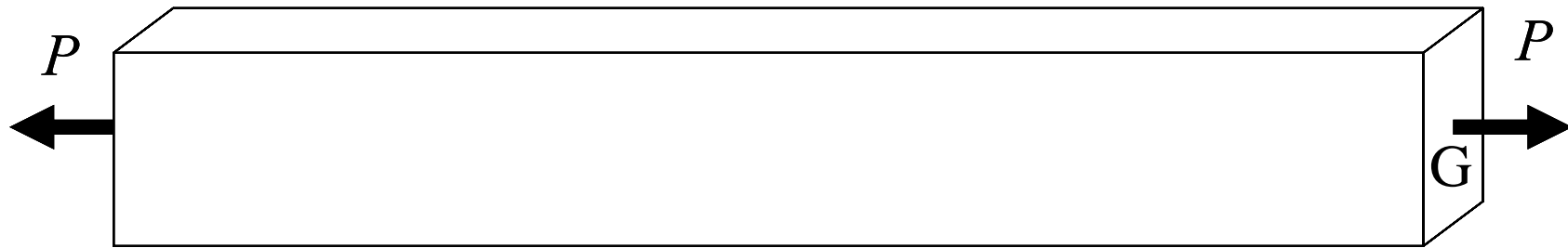


$$\sigma_n = \text{tensión normal} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\text{proy } \Delta \vec{f} \text{ sobre } \vec{n}}{\Delta s}$$

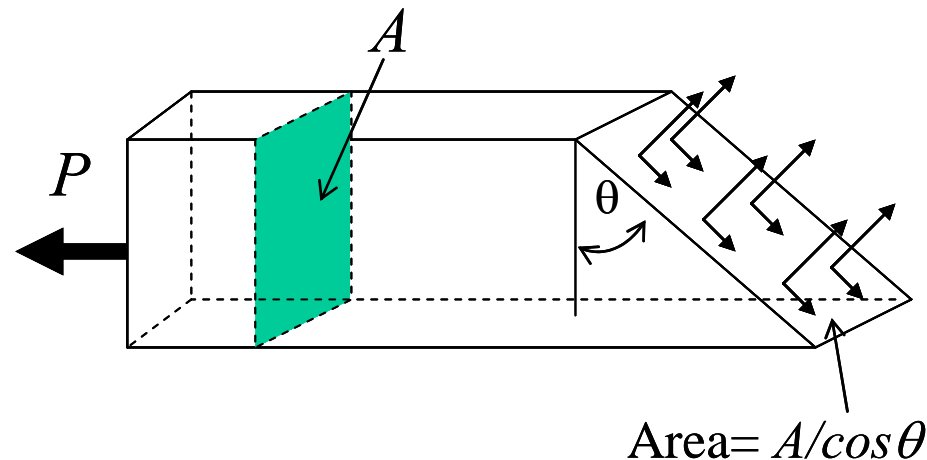
$$\tau = \text{tensión tangencial} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\text{proy } \Delta \vec{f} \text{ sobre } \pi}{\Delta s}$$

$$\sigma_n^2 + \tau^2 = \sigma^2$$

Tensiones en una barra sometida a una carga de tracción

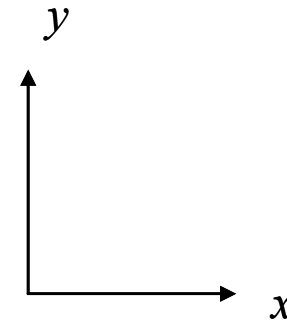
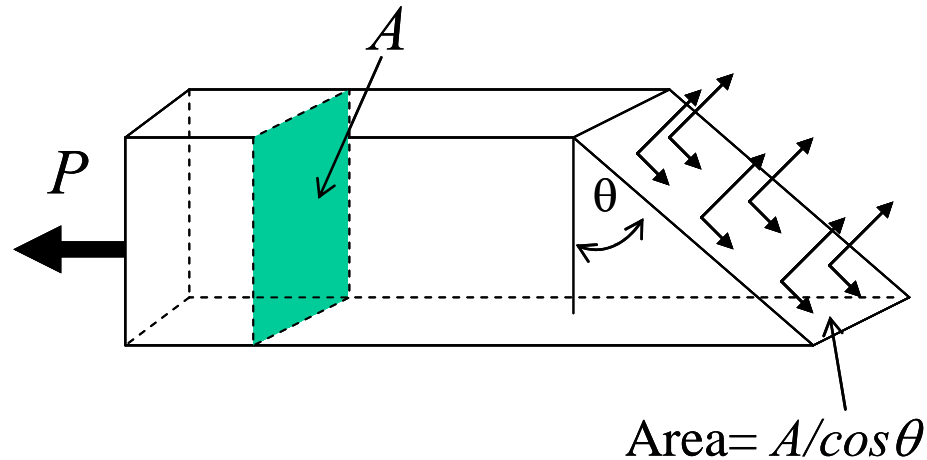


Demos un corte a la barra por una sección que forma un ángulo θ con el plano vertical

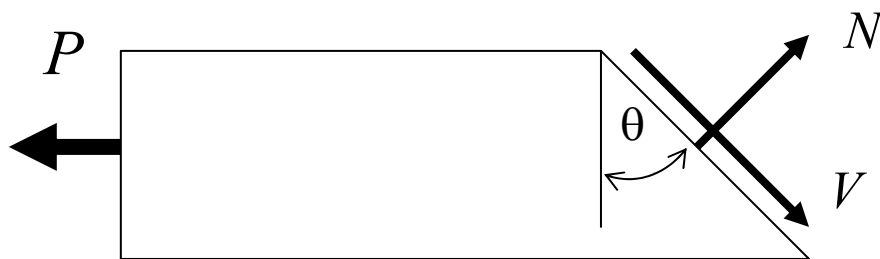


La resultante de la distribución de tensiones debe ser horizontal y pasar por el c.d.g. de la sección transversal de la barra

En realidad, las fuerzas N y V serán las resultantes de una distribución de tensiones, las cuales las supondremos uniformes sobre la sección de corte



Planteando el equilibrio:



$$\sum F_x = 0$$

$$-P + N \cos \theta + V \cos(90 - \theta) = 0$$

o

$$-P + N \cos \theta + V \sin \theta = 0$$

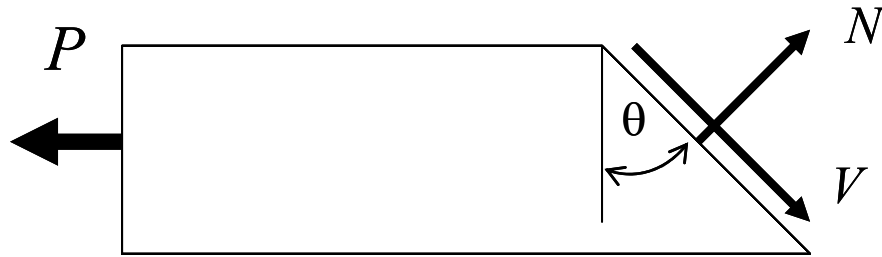
$$\sum F_y = 0$$

$$N \sin \theta - V \sin(90 - \theta) = 0$$

o

$$N \sin \theta - V \cos \theta = 0$$

Por tanto:



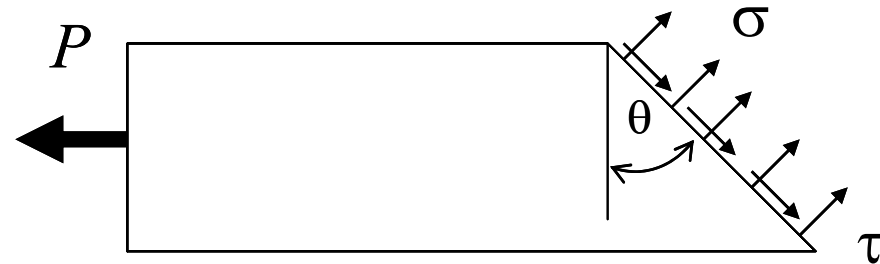
$$N = P \cos \theta$$

$$V = P \sin \theta$$

Área de la sección de corte:

$$Area = \frac{A}{\cos \theta}$$

Como, por definición, la tensión es fuerza dividida por área:



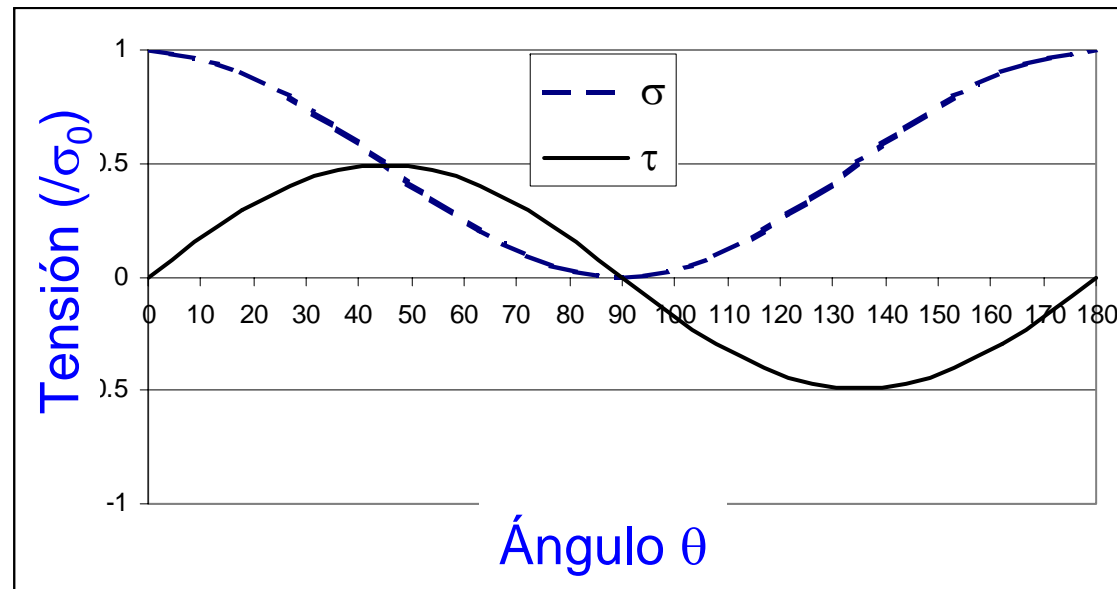
$$\sigma = \frac{P}{A} \cos^2 \theta = \frac{P}{2A} (1 + \cos 2\theta)$$

$$\tau = \frac{P}{A} \sin \theta \cos \theta = \frac{P}{2A} \sin 2\theta$$

σ es máxima cuando θ es 0° ó 180°
 τ es máxima cuando θ es 45° ó 135°

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sigma_{\max}$$

$$\sigma_0 = \frac{P}{A}$$

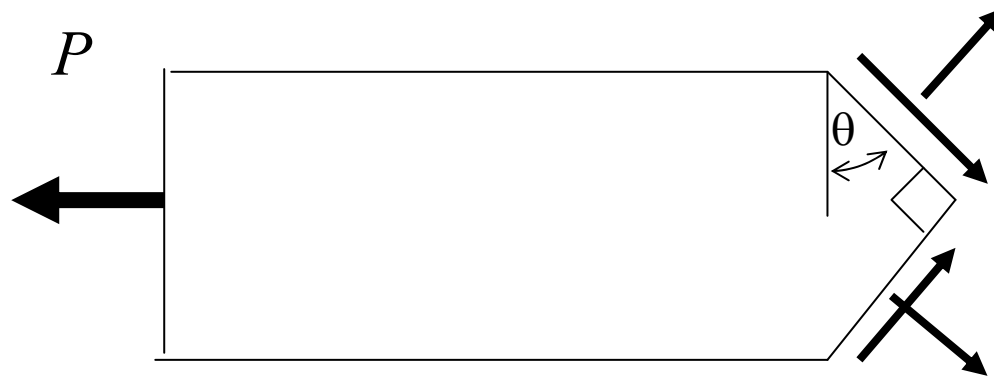


$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A}$$

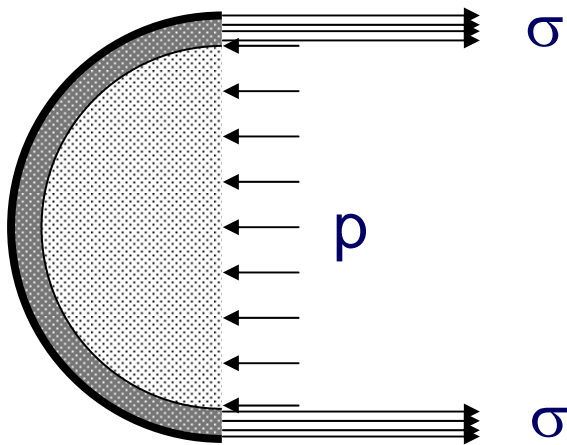
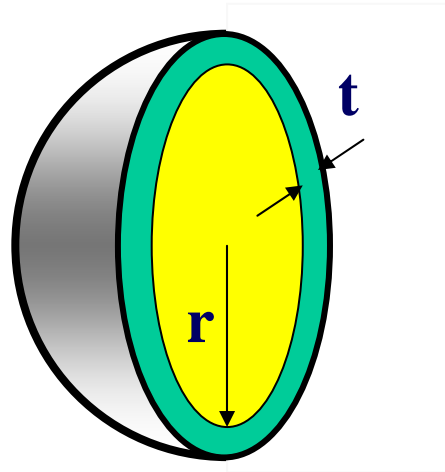
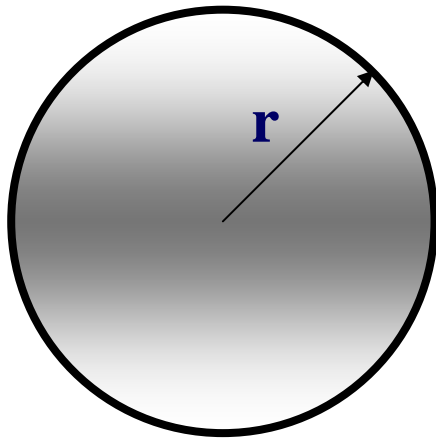
$$\tau_{\max} = \frac{P}{2A}$$

El signo de la tensión tangencial τ cambia cuando el ángulo θ es mayor de 90°

Nótese que: $\tau(\theta) = -\tau(90^\circ + \theta)$



VASIJAS ESFÉRICAS A PRESIÓN



Fuerza ejercida por la presión interna:

$$\pi r^2 p$$

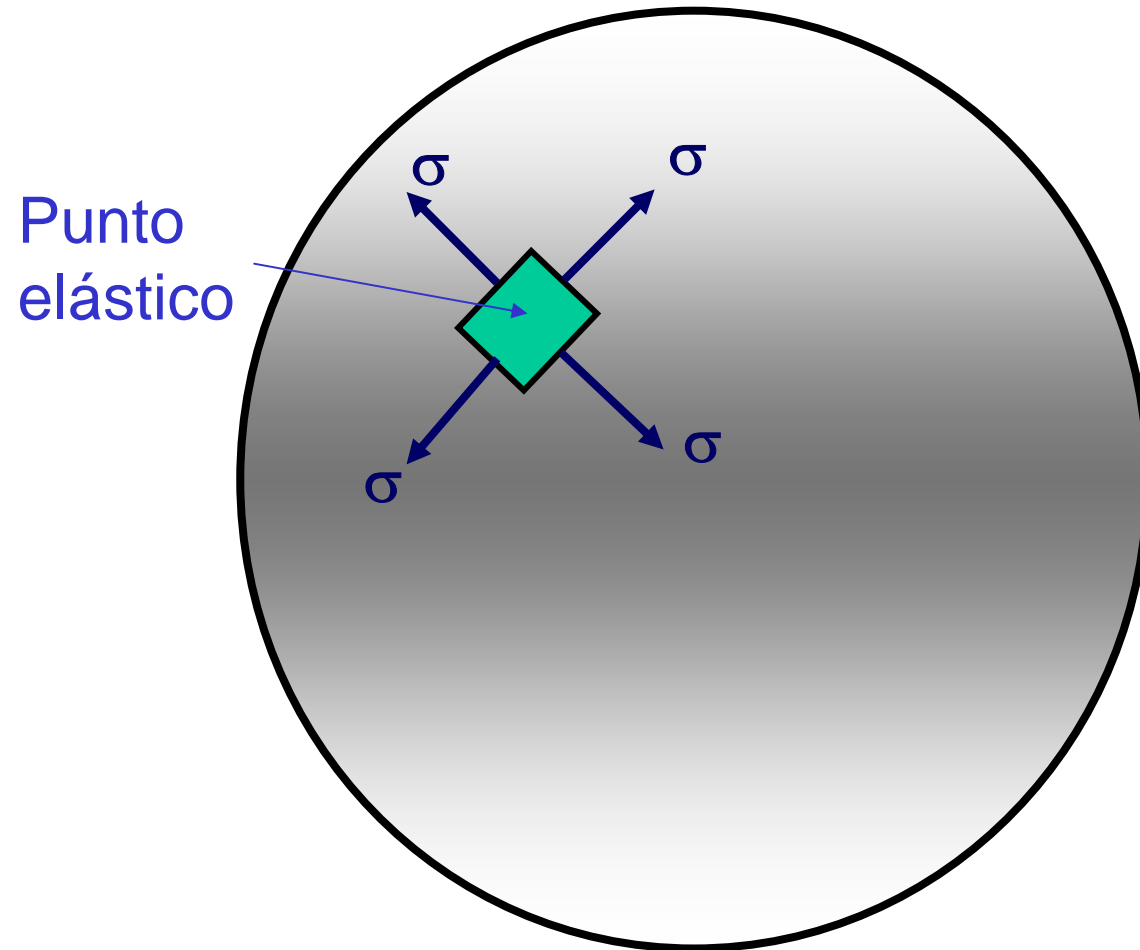
Fuerza ejercida por la tensión actuante:

$$2\pi r t \sigma$$

De la igualdad entre ambas, resulta:

$$\sigma = \frac{pr}{2t}$$

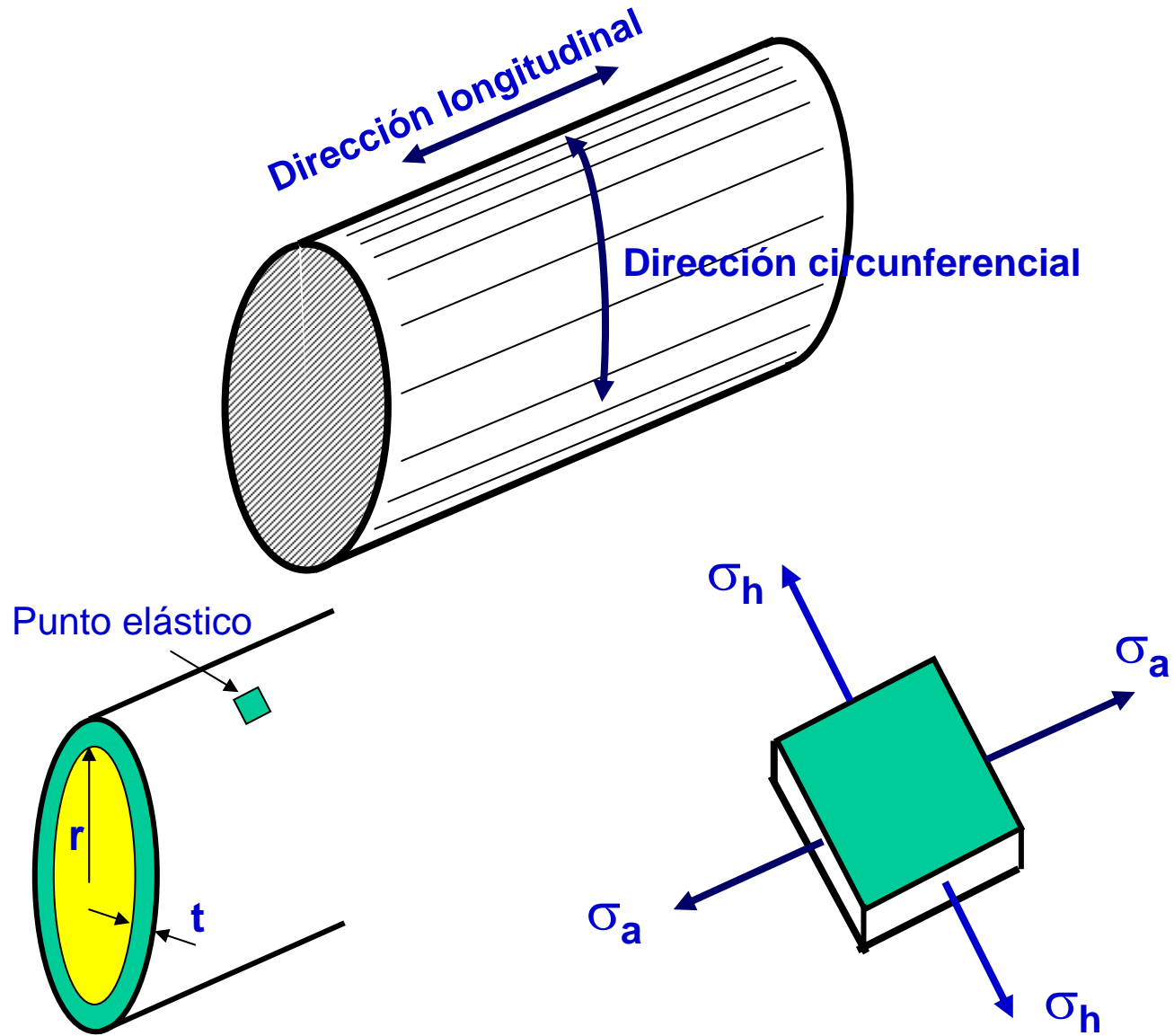
Estado tensional en un punto de la vasija



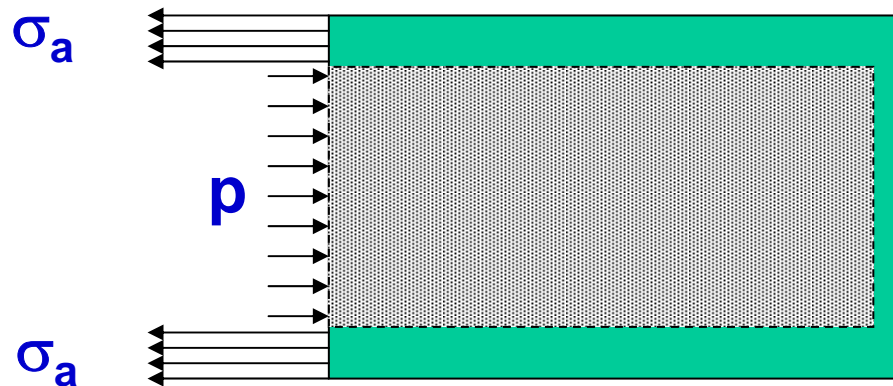
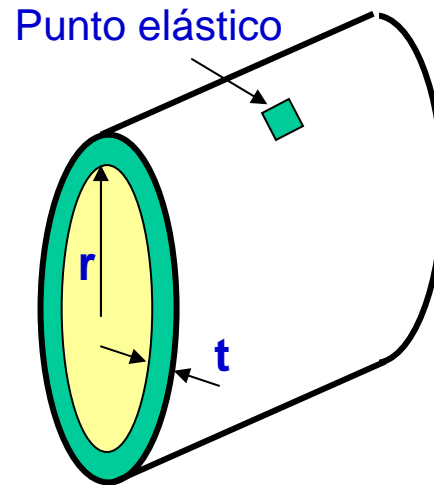
$$\sigma = \frac{pr}{2t}$$

¡ σ es mucho mayor que p !

VASIJAS CILINDRICAS A PRESIÓN



Cálculo de la tensión longitudinal:



Fuerza ejercida por la presión interna:

$$\pi r^2 p$$

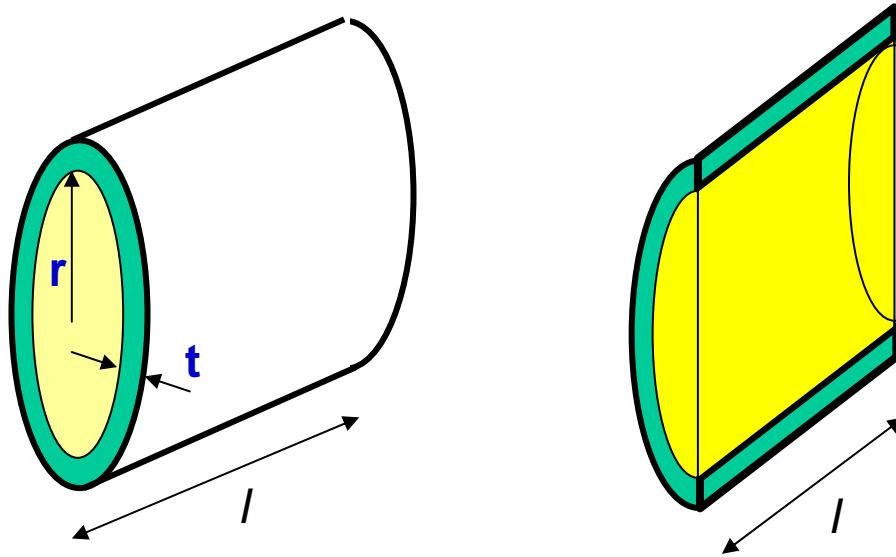
Fuerza ejercida por la tensión actuante:

$$2\pi r t \sigma_a$$

De la igualdad entre ambas, resulta:

$$\sigma_a = \frac{pr}{2t}$$

Cálculo de la tensión circunferencial:



Fuerza ejercida por la presión interna:

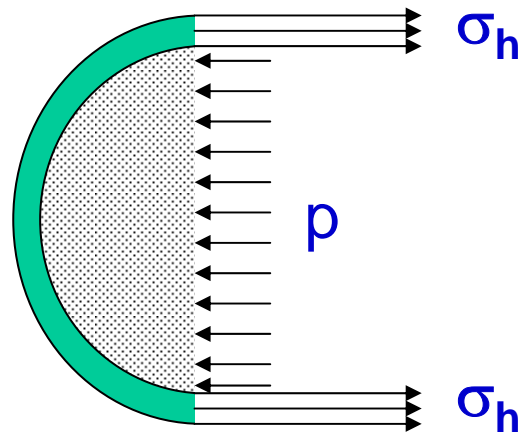
$$2rlp$$

Fuerza ejercida por la tensión actuante:

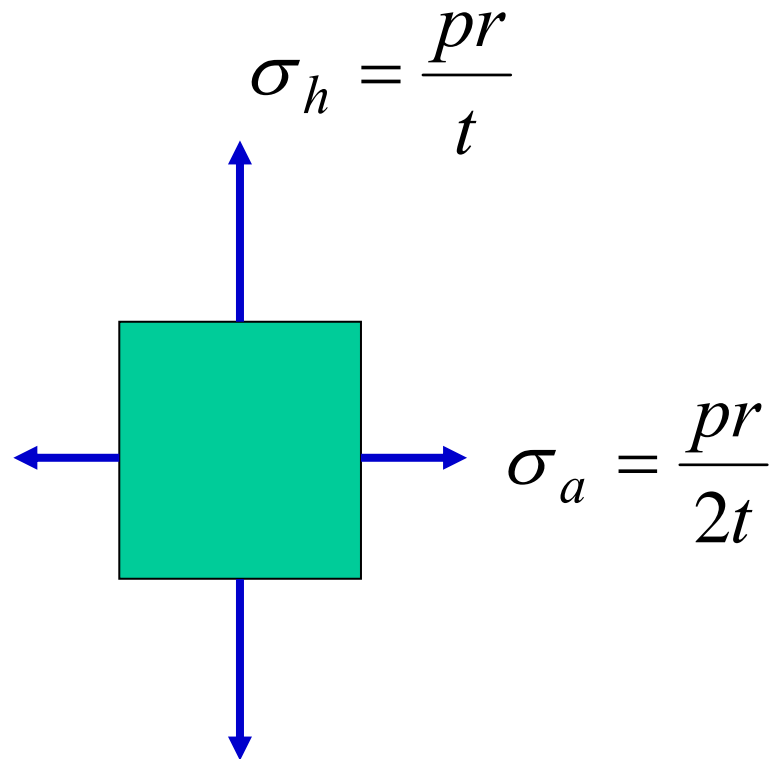
$$2lt\sigma_h$$

De la igualdad entre ambas, resulta:

$$\sigma_h = \frac{pr}{t}$$

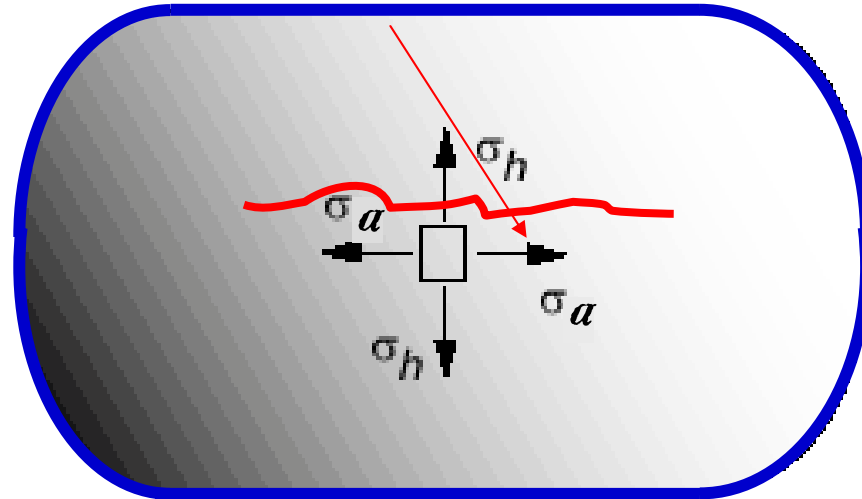


Estado tensional en los puntos de la vasija cilíndrica:



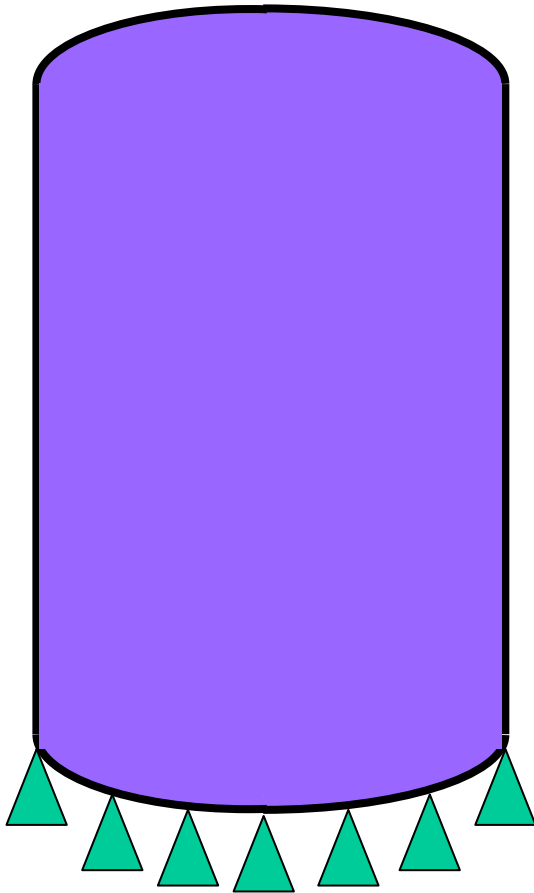
¡ σ_h es mayor que σ_a , y ambas son mucho mayores que p !

Forma de rotura más probable



$$\sigma_h = 2\sigma_a$$

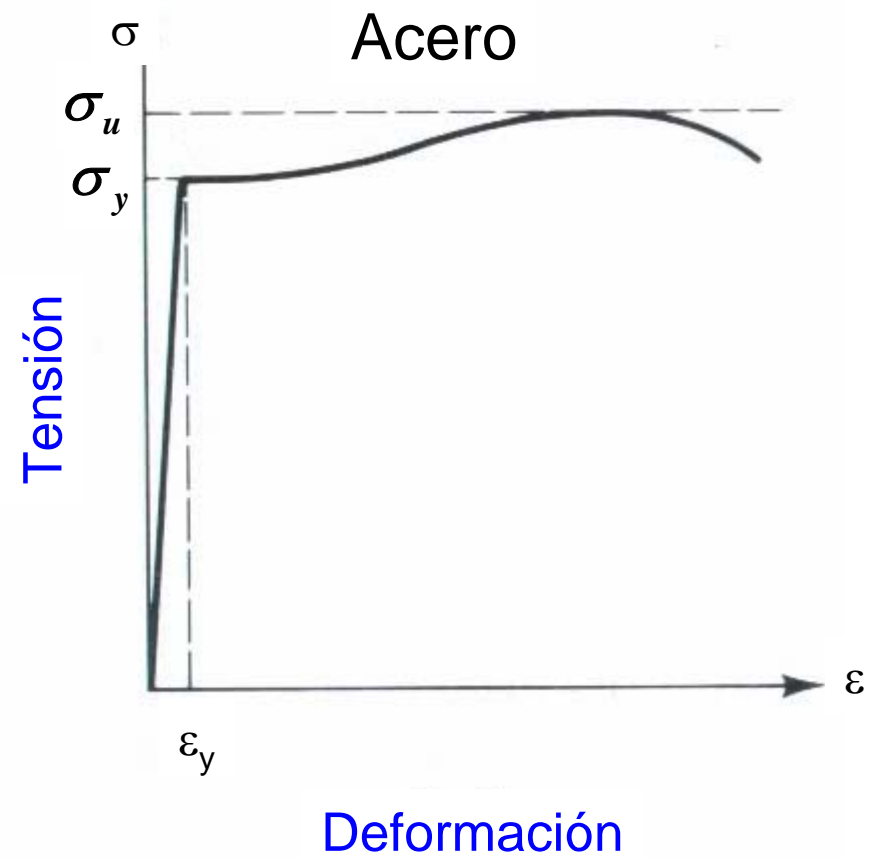
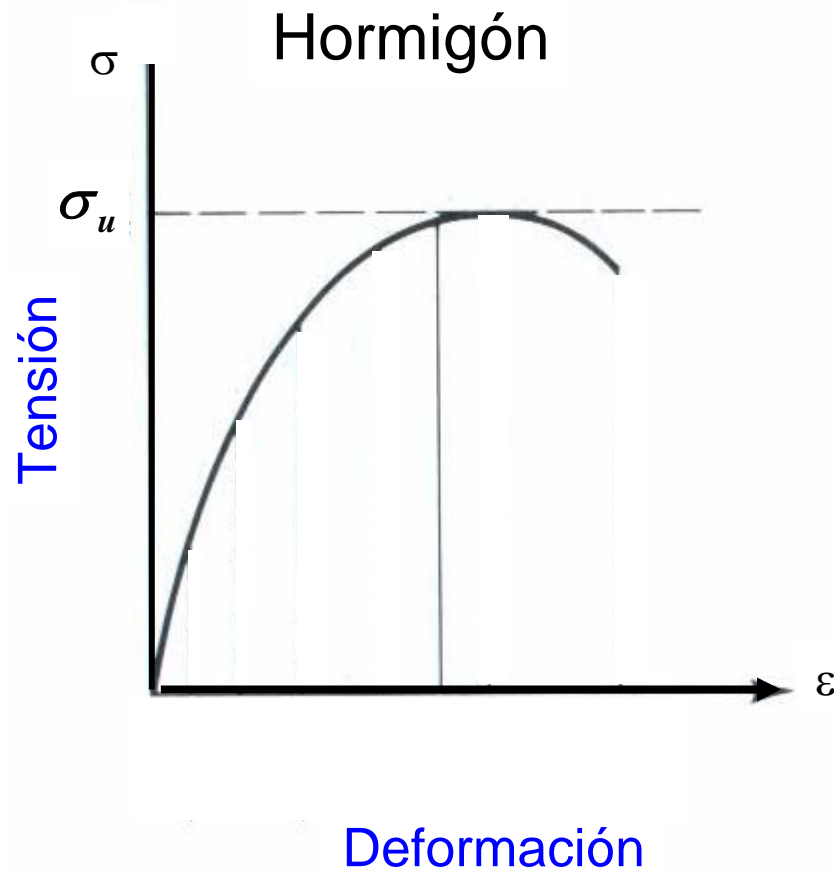
Ejemplo: Determinar el espesor t de la vasija de la figura, realizada con acero inoxidable austenítico, sabiendo que su radio es r y que contiene un gas a una presión p . Considérese un coeficiente de seguridad γ .



Tensión máxima:

$$\sigma_{m\acute{a}x} = \frac{pr}{t}$$

¿Y la resistencia a tracción del material?



Volveremos a ello en el capítulo 3

COEFICIENTE DE SEGURIDAD

Los elementos estructurales, o los componentes de máquinas deben ser diseñados de manera tal que las tensiones que se producen en su seno sean menores que la resistencia del material.

$$\gamma = \text{Coeficiente de seguridad}$$
$$\gamma = \frac{\sigma_R}{\sigma_{adm}} = \frac{\text{resistencia}}{\text{tensión admisible}}$$

El factor de seguridad tiene en cuenta, principalmente:

- Las incertidumbres de los valores de las propiedades del material
- La incertidumbre del valor de las cargas actuantes
- La incertidumbre del análisis
- El comportamiento a largo plazo del elemento estructural
- La importancia del elemento considerado en la integridad de la estructura de la que forma parte

Lógicamente el factor de seguridad debe ser una cantidad mayor que la unidad

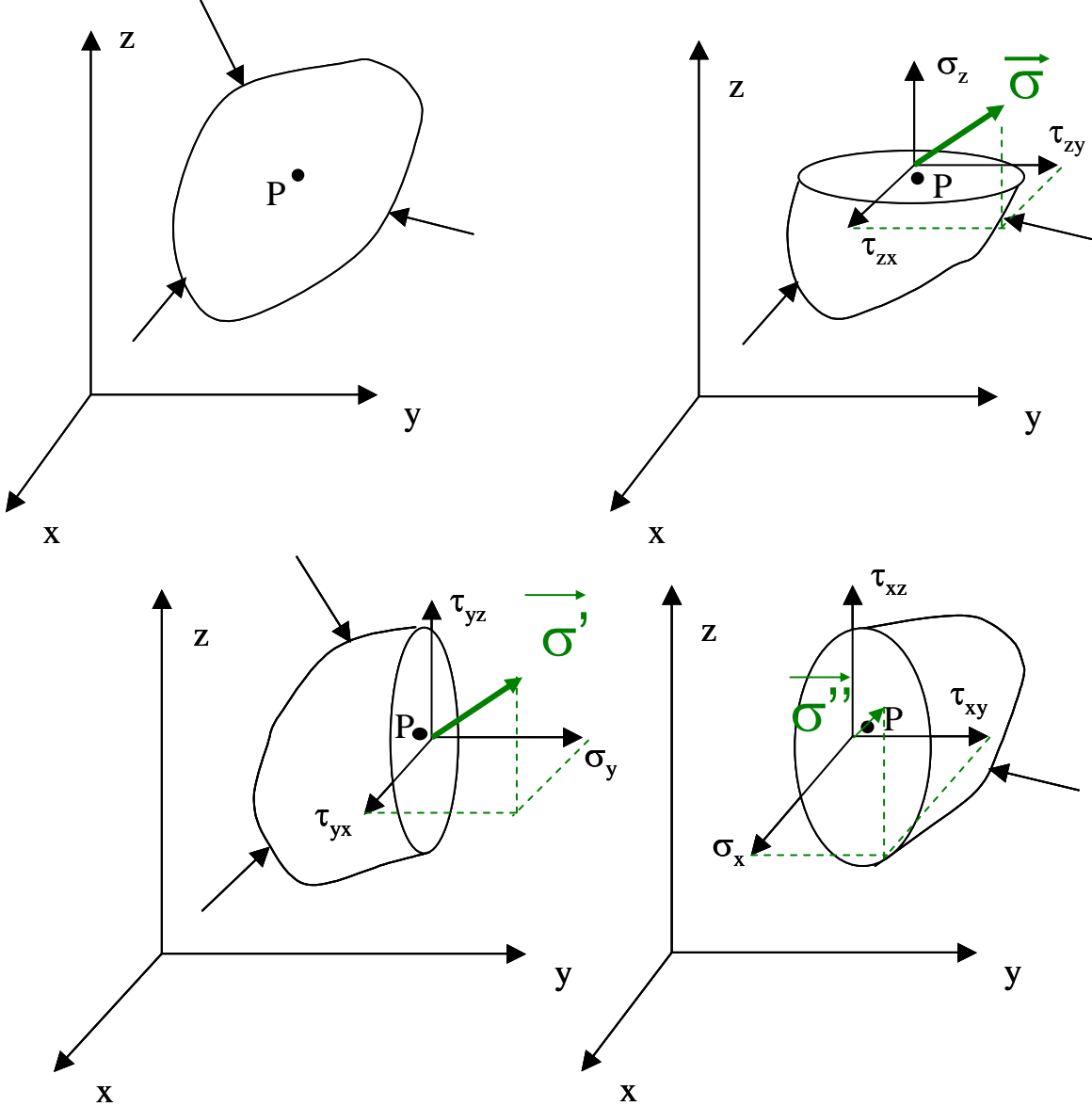
En vasijas a presión, γ suele oscilar entre 4 y 8

$$\sigma_{m\acute{a}x} = \frac{pr}{t} \leq \sigma_{adm} = \frac{\sigma_R}{\gamma}$$

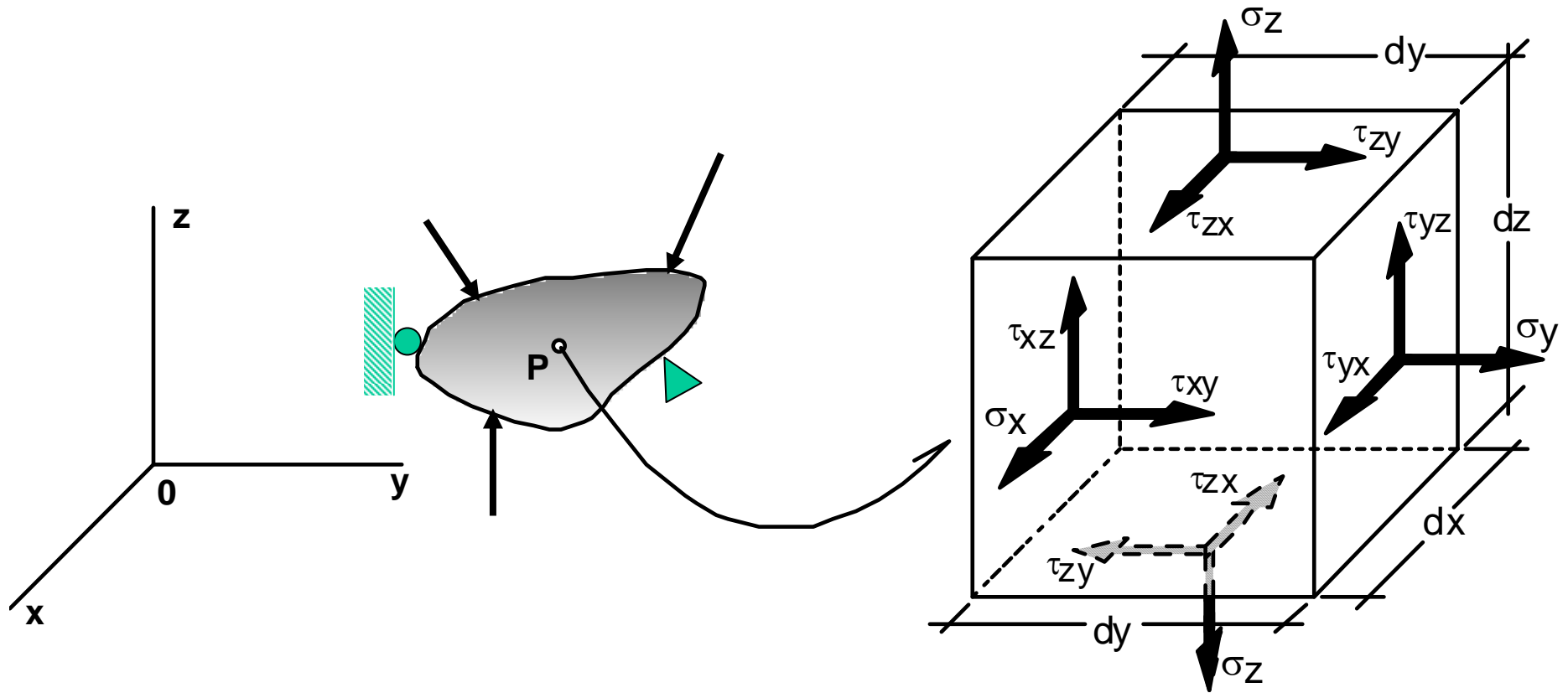
$$t \geq \frac{pr\gamma}{\sigma_R}$$

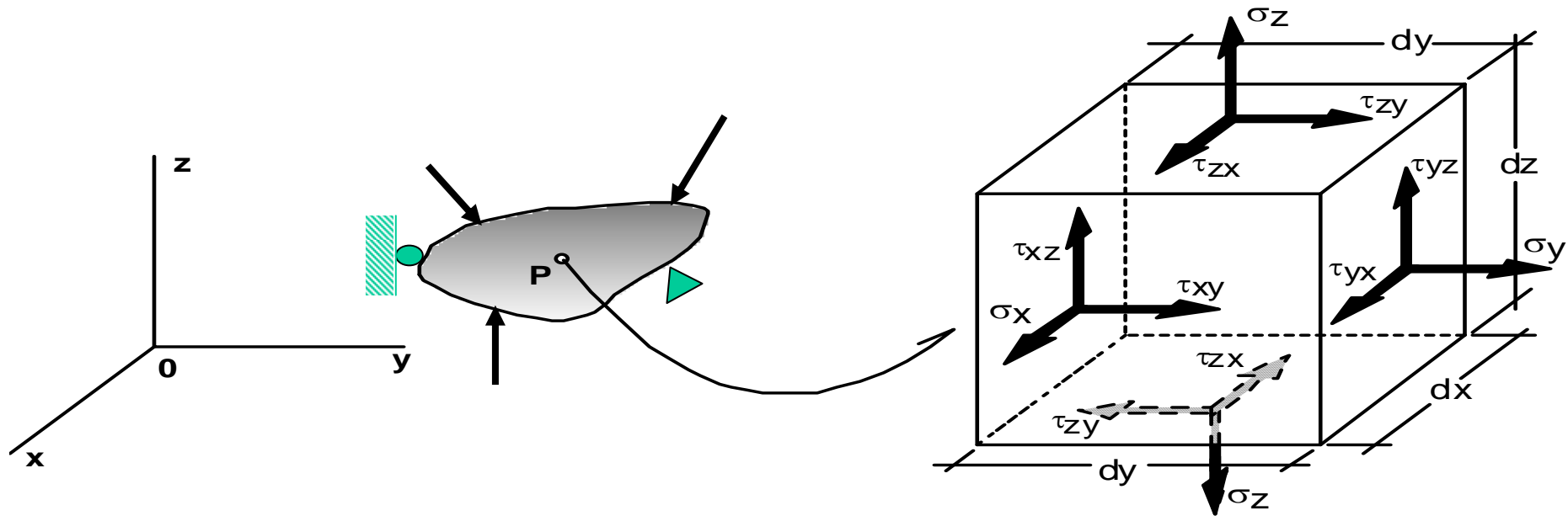
**PERO, EN LA REALIDAD, NOS ENCONTRAREMOS
CON ESTRUCTURAS DE MAYOR COMPLEJIDAD,
TANTO DE FORMA COMO DE ESTADO TENSIONAL**

TENSOR DE TENSIONES



PUNTO ELÁSTICO TRIDIMENSIONAL





$\sum F_x = 0 \Rightarrow$ tensiones σ_x iguales y opuestas en las caras \perp eje x

$\sum F_y = 0 \Rightarrow$ tensiones σ_y iguales y opuestas en las caras \perp eje y

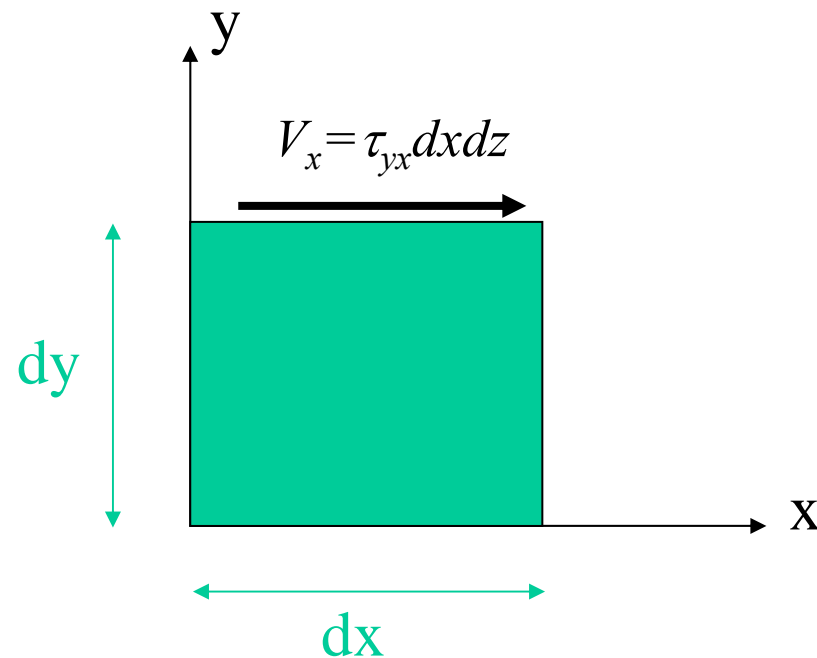
$\sum F_z = 0 \Rightarrow$ tensiones σ_z iguales y opuestas en las caras \perp eje z

$$\sum M_x = 0 \quad \tau_{yz} dx dz \cdot dy - \tau_{zy} dx dy \cdot dz = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

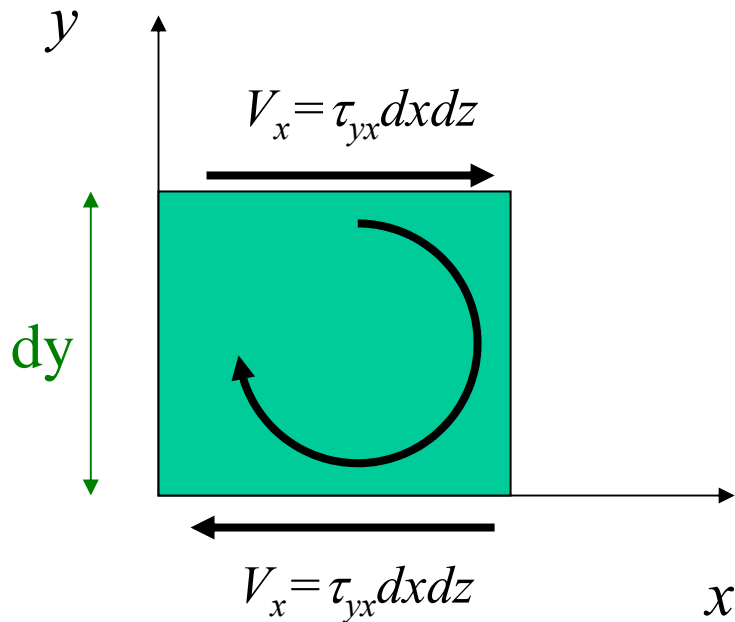
$$\sum M_y = 0 \quad \tau_{zx} dx dy \cdot dz - \tau_{xz} dy dz \cdot dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}$$

$$\sum M_z = 0 \quad \tau_{xy} dy dz \cdot dx - \tau_{yx} dx dz \cdot dy = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}$$

La igualdad entre las tensiones tangenciales, actuando sobre planos ortogonales entre sí, puede demostrarse, por ejemplo, estableciendo el equilibrio de un pequeño paralelepípedo de espesor dz . Apliquemos la fuerza V_x :

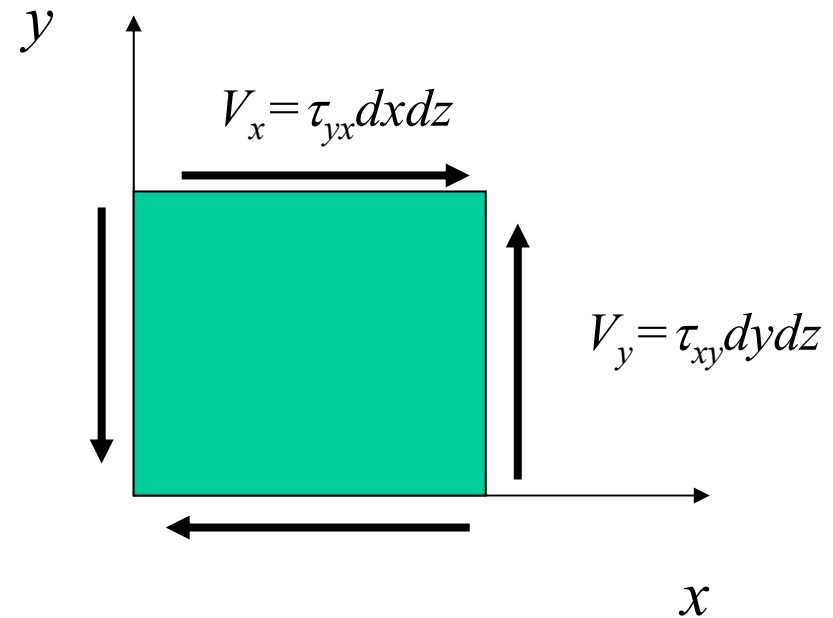


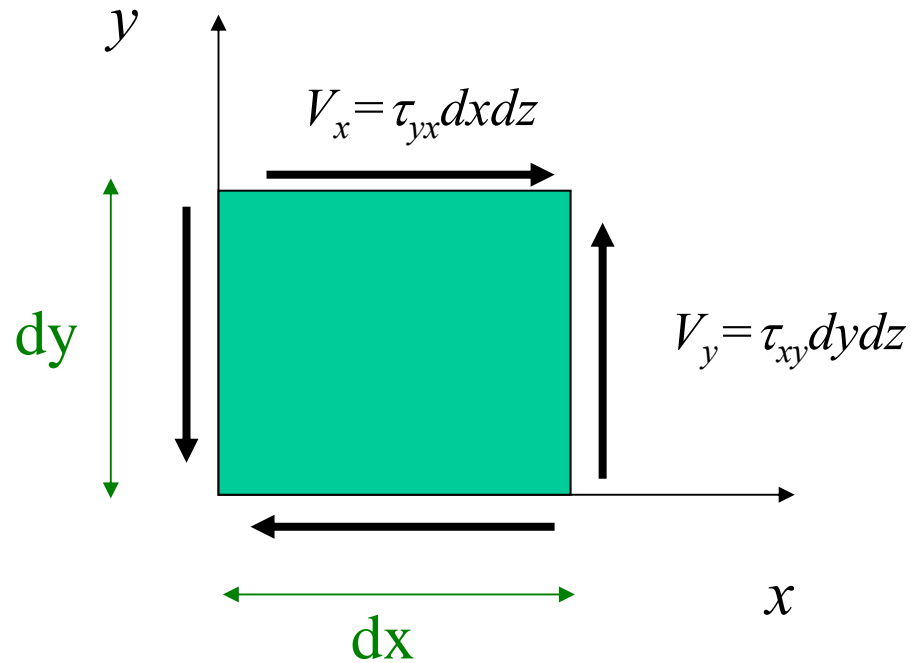
El equilibrio requiere que, sobre la cara inferior, actúe una fuerza igual y de signo contrario, lo que producirá un par:



$$M_z = V_x dy = \tau_{yx} dx dy dz$$

Este par debe estar equilibrado por otro (antihorario) consecuencia de dos fuerzas verticales V_y actuando sobre las caras verticales:





Utilizando: $\sum M_z = 0$

obtenemos:

$$\tau_{yx} (dx dz) dy = \tau_{xy} (dy dz) dx$$

$$\tau_{yx} = \tau_{xy}$$

Conclusión:

Si sobre un plano en las proximidades de un punto, existe una tensión tangencial, sobre un plano ortogonal al anterior debe existir una tensión tangencial del mismo valor.

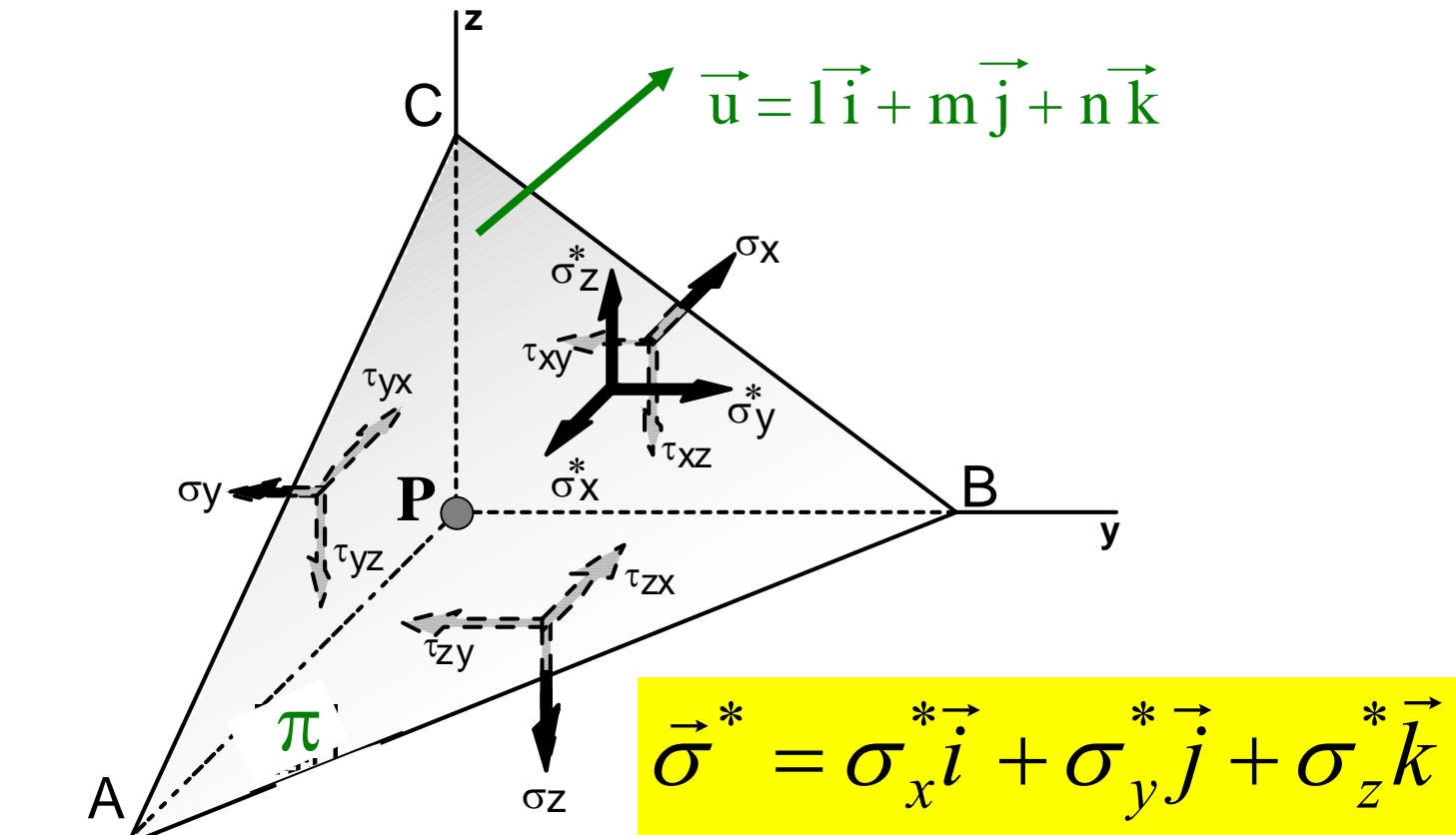
Teniendo en cuenta que, sobre cada una de las caras del paralelepípedo infinitesimal considerado (punto elástico), actúan tres componentes del vector tensión correspondiente, se obtendrían, en total, 18 valores de los que **sólo hay 6 valores diferentes entre sí**, a saber:

$$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}$$

En un sólido, estas componentes, serán funciones continuas de las coordenadas cartesianas del punto x, y, z .

$$\sigma_x = \sigma_x(x, y, z), \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y, z) \dots\dots$$

TENSIONES ACTUANDO EN UN PLANO CUALQUIERA



Eje x: $\sigma_x^* d\Omega = \sigma_x l d\Omega + \tau_{xy} m d\Omega + \tau_{zx} n d\Omega$

Eje y: $\sigma_y^* d\Omega = \tau_{xy} l d\Omega + \sigma_y m d\Omega + \tau_{yz} n d\Omega$

Eje z: $\sigma_z^* d\Omega = \tau_{zx} l d\Omega + \tau_{yz} m d\Omega + \sigma_z n d\Omega$

Augustin-Louis CAUCHY
(1789-1857)

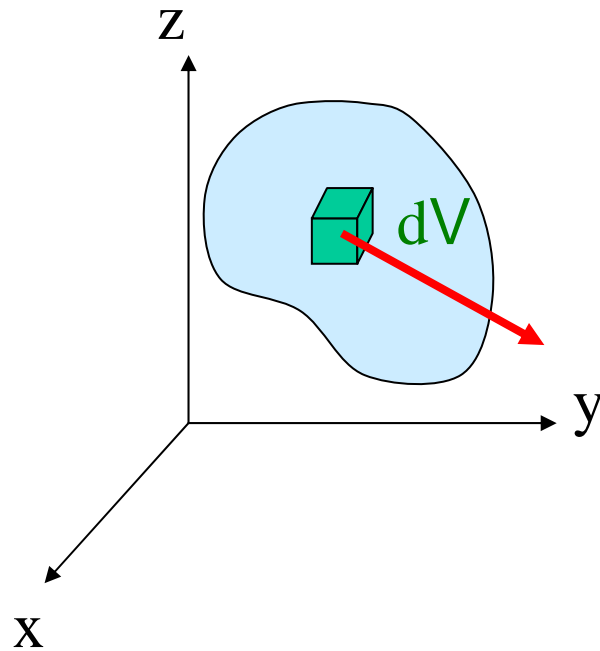
TENSOR DE TENSIONES
(o Tensor de Cauchy)



$$\underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_x^* \\ \sigma_y^* \\ \sigma_z^* \end{pmatrix}}_{[\vec{\sigma}^*]} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}}_{[T]} \underbrace{\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}}_{[\vec{u}]}$$

$$[\vec{\sigma}^*] = [T] [\vec{u}]$$

FUERZAS INTERNAS POR UNIDAD DE VOLUMEN

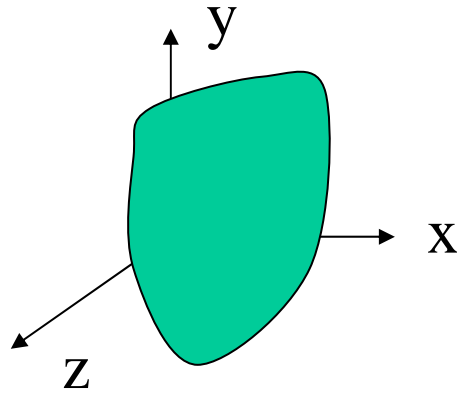


$$d\vec{F}_{\text{int}} = \vec{f}_V \cdot dV$$

Fuerza interna, por
unidad de volumen

$$\vec{f}_V(x, y, z) = X(x, y, z)\vec{i} + Y(x, y, z)\vec{j} + Z(x, y, z)\vec{k}$$

Ejemplo 1: sólido sometido a la acción de la gravedad según el eje y



$$\vec{f}_v(x, y, z) = -\rho g \vec{j}$$

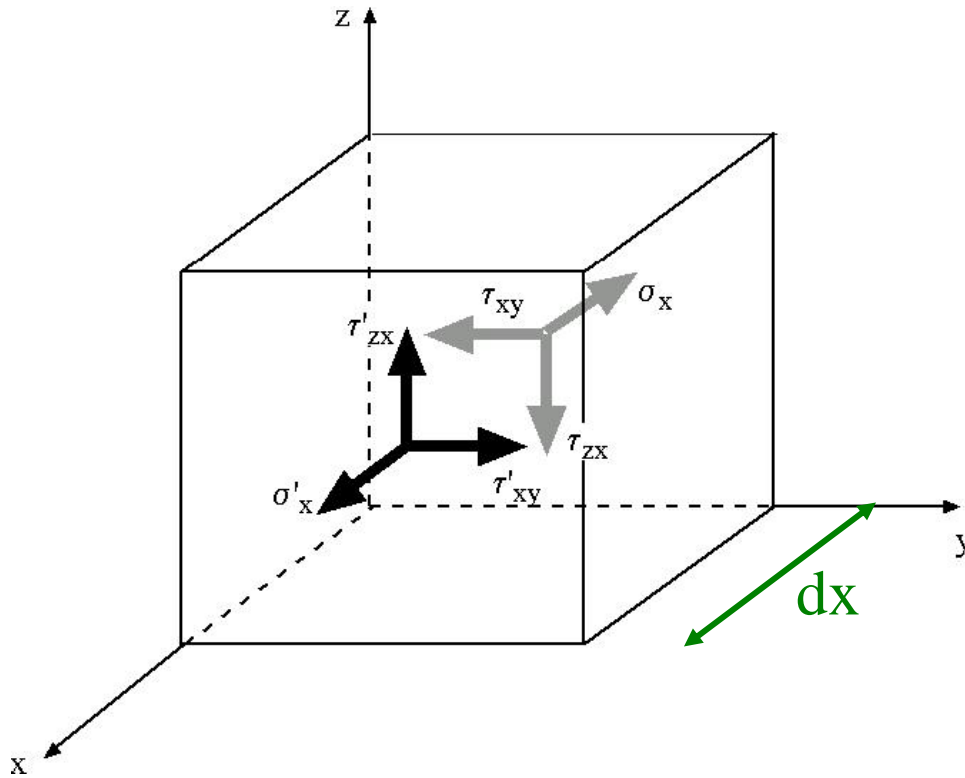
$X(x, y, z)$ y $Z(x, y, z)$ serían nulas y la función $Y(x, y, z) = -\rho g$

Ejemplo 2: sólido en movimiento (fuerzas de inercia)

$$\vec{f}_v = -dm \times \vec{a} / dV = -\rho \times \vec{a} = -\rho(\ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k})$$

$$X(x, y, z) = -\rho \ddot{x}, Y(x, y, z) = -\rho \ddot{y}, Z(x, y, z) = -\rho \ddot{z}$$

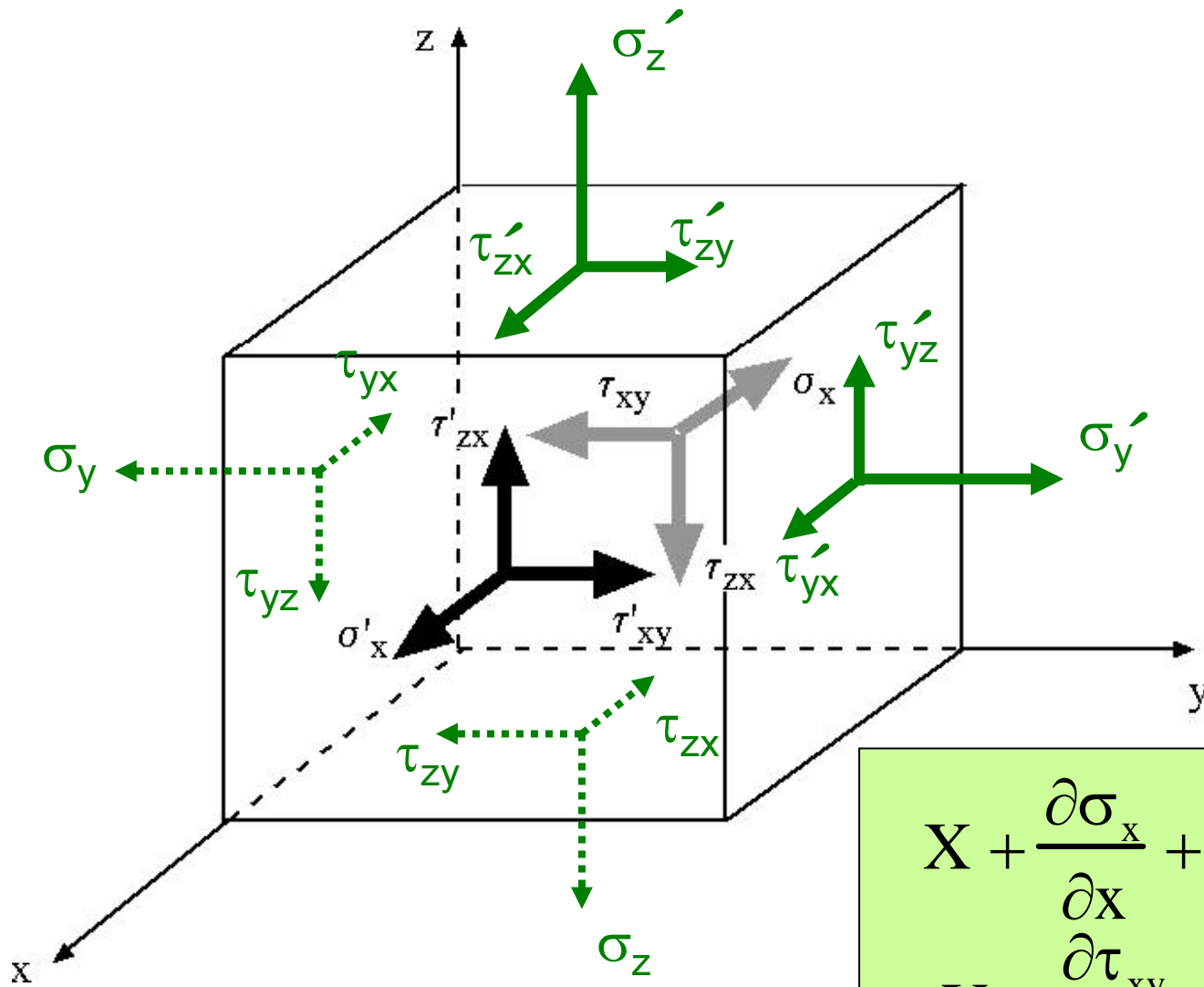
ECUACIONES DE EQUILIBRIO INTERNO



$$\sigma'_x = \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$$

$$\tau'_{xy} = \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx$$

$$\tau'_{zx} = \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} dx$$

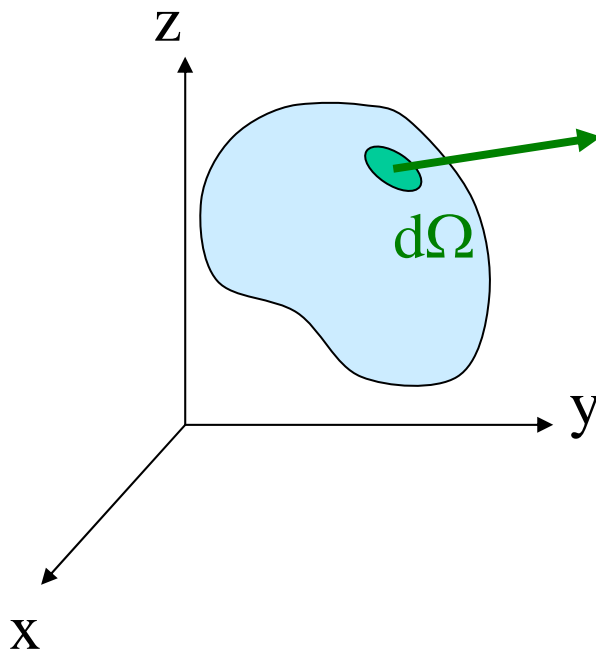


$$\begin{aligned}
 X + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= 0 \\
 Y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0 \\
 Z + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0
 \end{aligned}$$

ECUACIONES DE EQUILIBRIO EN EL CONTORNO

FUERZA, POR UNIDAD DE SUPERFICIE, QUE ACTÚA SOBRE EL CONTORNO

Sobre la superficie exterior del sólido (contorno) pueden, o no, actuar tensiones que, directamente, se apliquen al sólido

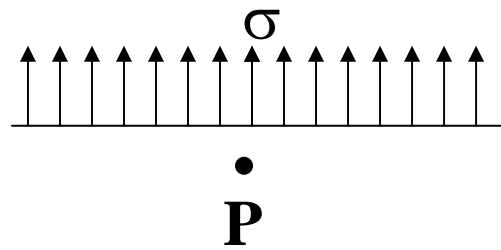
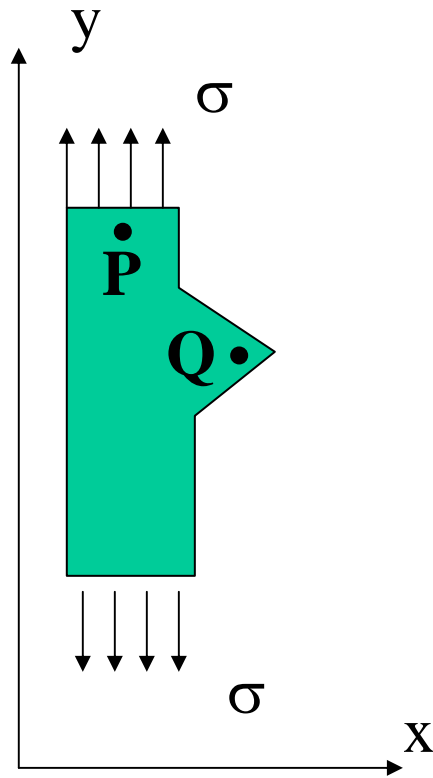


$$d\vec{F}_{contorno} = \vec{f}_{\Omega} \cdot d\Omega$$

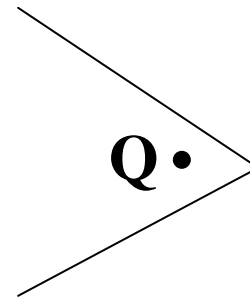
Fuerza, por unidad de superficie, en el contorno

$$\vec{f}_{\Omega} = \bar{X}(x, y, z) \vec{i} + \bar{Y}(x, y, z) \vec{j} + \bar{Z}(x, y, z) \vec{k}$$

EJEMPLO:



$$\vec{f}_{\Omega} = \sigma \vec{j}$$

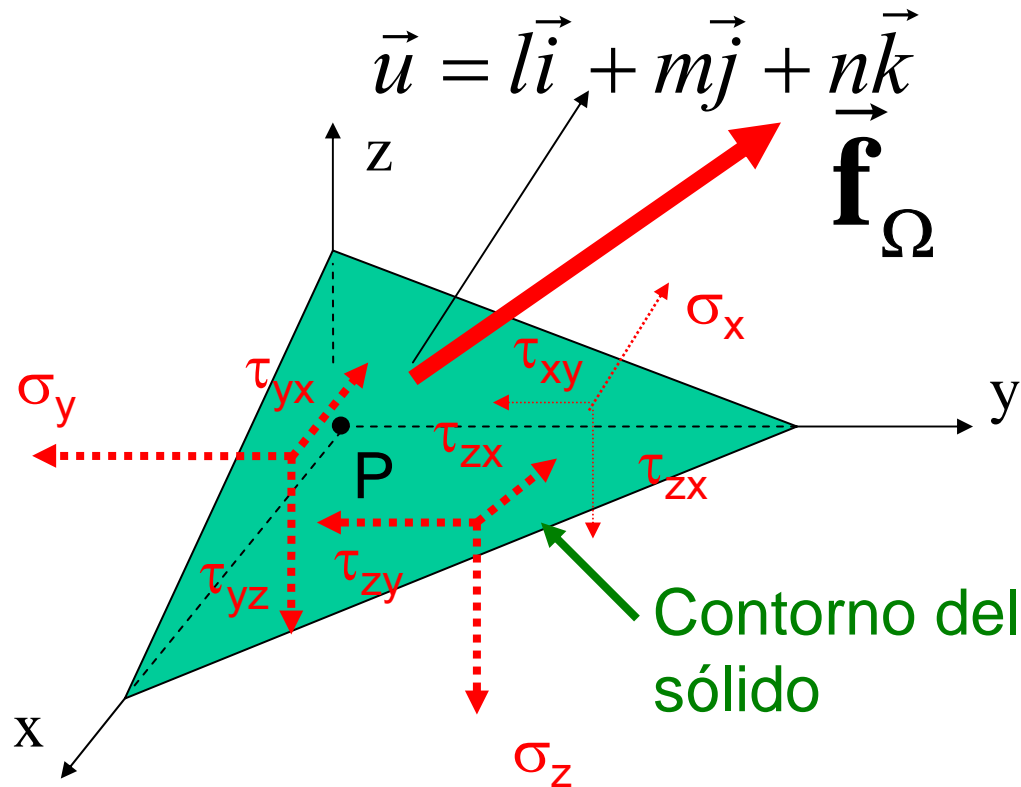


$$\vec{f}_{\Omega} = \vec{0}$$

Y, sin embargo, en los puntos muy próximos a la superficie del sólido pueden existir tensiones internas.



En un punto P próximo al contorno del sólido, deberá existir equilibrio entre las tensiones y las fuerzas, por unidad de superficie, aplicadas.



Ecuaciones de equilibrio en el contorno:

$$\bar{X} = \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{zx} n$$

$$\bar{Y} = \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n$$

$$\bar{Z} = \tau_{zx} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n$$

CAMBIO DEL SISTEMA DE REFERENCIA

$[\mathbf{T}]$ = tensor de tensiones en P referido al sistema x, y, z

$[\mathbf{T}']$ = tensor de tensiones en P referido al sistema x', y', z'

$[\mathbf{R}]$ = matriz del cambio de ejes

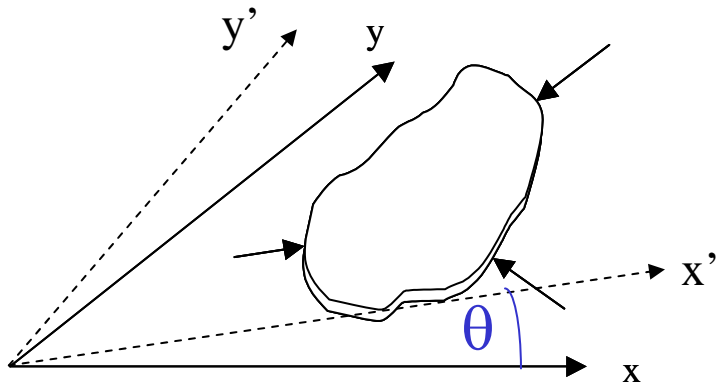
$[\bar{\mathbf{u}}]$ = componentes de un vector unitario respecto al sistema x, y, z

$[\bar{\mathbf{u}}']$ = componentes de un vector unitario respecto al sistema x', y', z'

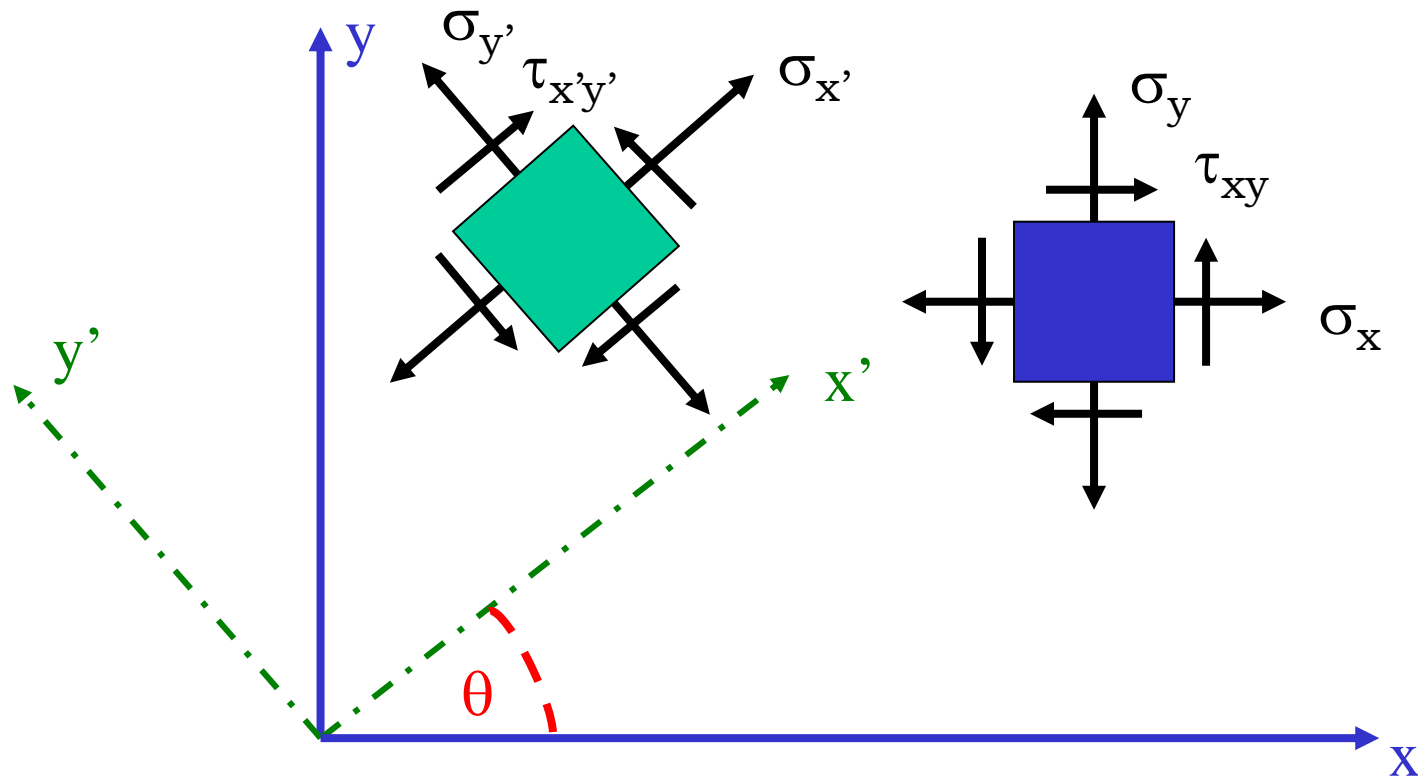
$$[\mathbf{T}] = [\mathbf{R}][\mathbf{T}'][\mathbf{R}]^T$$

$$[\mathbf{T}'] = [\mathbf{R}]^T [\mathbf{T}][\mathbf{R}]$$

CASO BIDIMENSIONAL:



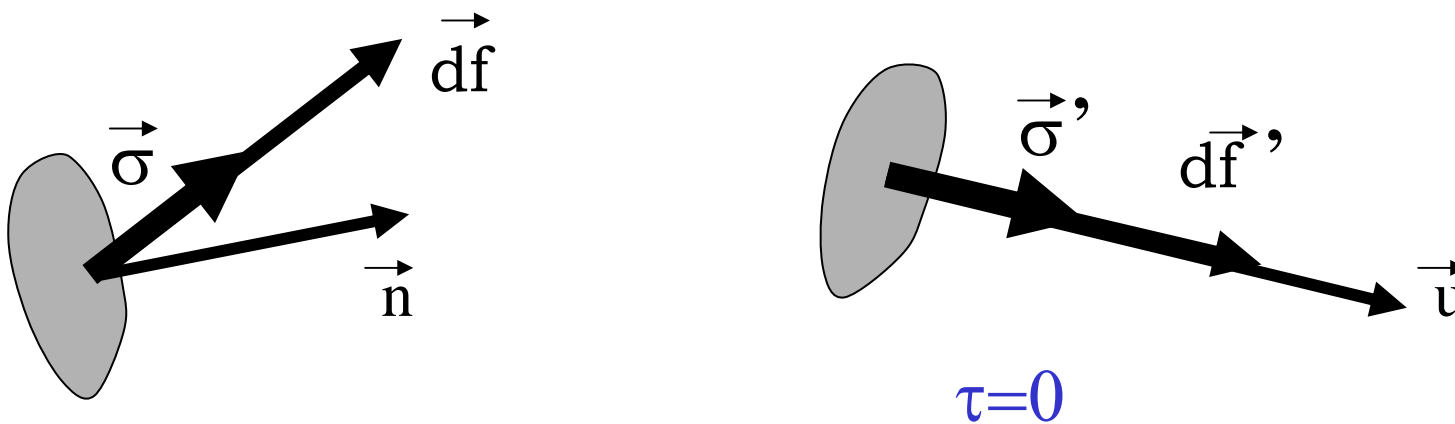
$$[R] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen} \theta \\ \text{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \\ \tau_{x'y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2\sin\theta \cos\theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2\sin\theta \cos\theta \\ -\sin\theta \cos\theta & \sin\theta \cos\theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

TENSIONES Y DIRECCIONES PRINCIPALES

Sea un sólido sometido a un sistema de cargas, P un punto cualquiera del sólido (punto genérico) y $[T]$ el correspondiente tensor de tensiones afecto a dicho punto. ¿existirá algún plano, que pase por las proximidades (a distancia infinitesimal) del punto P , tal que el vector tensión correspondiente, sea ortogonal a dicho plano (es decir, que el vector tensión no tenga componente según el plano o, lo que es lo mismo, que sobre dicho plano no actúa ninguna tensión tangencial)?



Vector tensión en una dirección cualquiera:

$$[\vec{\sigma}'] = [T] [\vec{u}]$$

Vector tensión en la dirección que buscamos:

$$[\vec{\sigma}'] = \sigma [\vec{u}]$$

$$\left. \begin{array}{l} [\vec{\sigma}'] = [T] [\vec{u}] \\ [\vec{\sigma}'] = \sigma [\vec{u}] \end{array} \right\} [T - \sigma I] [\vec{u}] = [0]$$

$$\vec{u} = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}$$

$$\left. \begin{array}{l} (\sigma_x - \sigma)l + \tau_{xy} m + \tau_{zx} n = 0 \\ \tau_{xy} l + (\sigma_y - \sigma)m + \tau_{yz} n = 0 \\ \tau_{zx} l + \tau_{yz} m + (\sigma_z - \sigma)n = 0 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x - \sigma)l + \tau_{xy} m + \tau_{zx} n &= 0 \\ \tau_{xy} l + (\sigma_y - \sigma)m + \tau_{yz} n &= 0 \\ \tau_{zx} l + \tau_{yz} m + (\sigma_z - \sigma)n &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Para que este sistema tenga solución distinta de la trivial:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

Ecuación característica:

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0$$

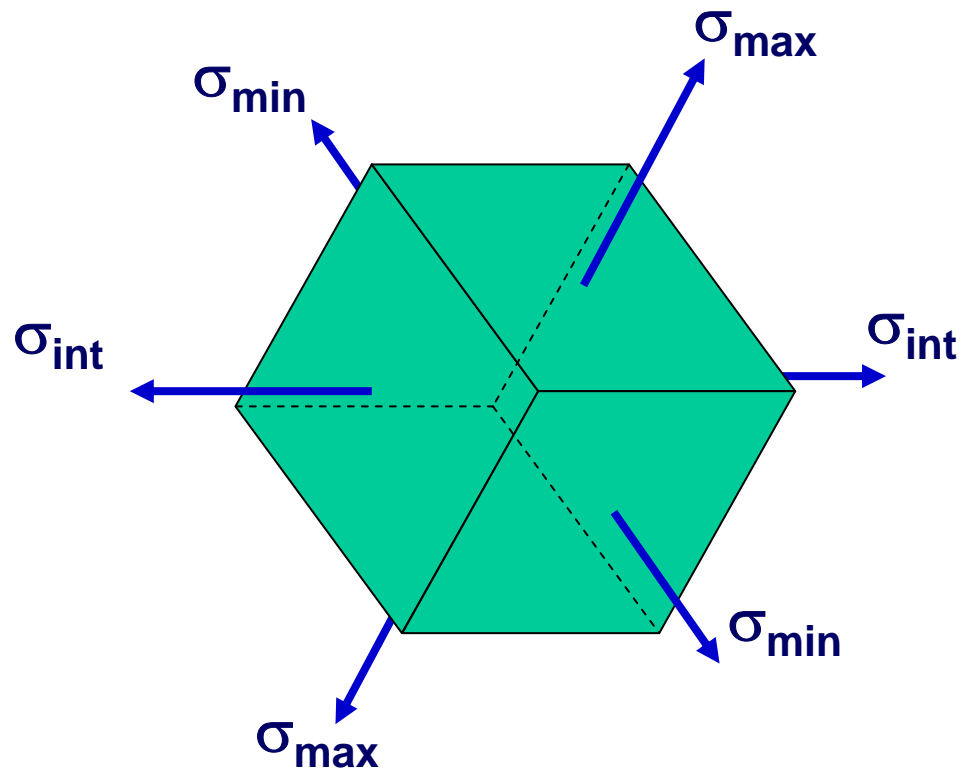
Invariantes:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 - \tau_{xy}^2$$

$$I_3 = |\mathbf{T}|$$

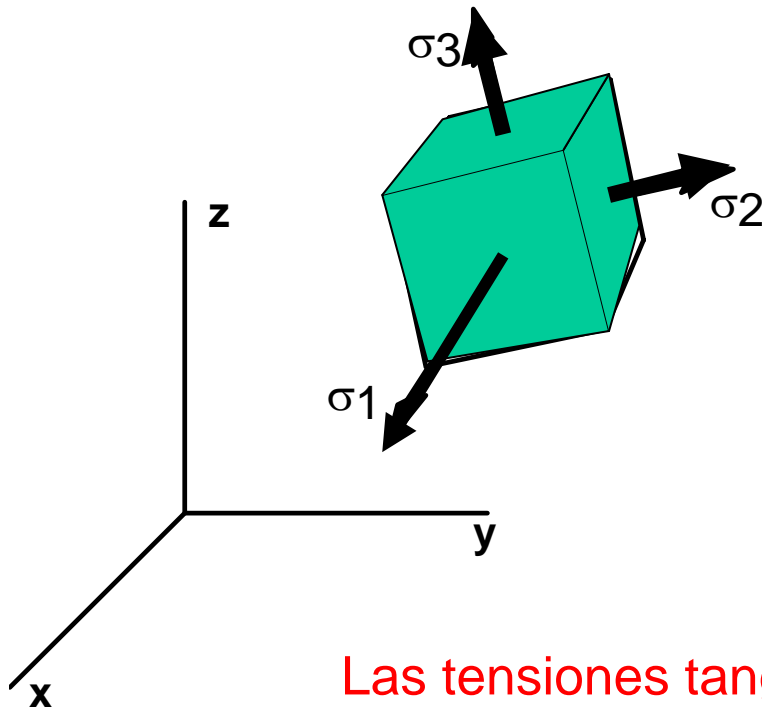
Tensiones principales



$$\sigma_{\max} \geq \sigma_{\text{int}} \geq \sigma_{\min}$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

Direcciones y tensiones principales:



Tensor de tensiones:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

Invariantes:

Las tensiones tangenciales sobre los planos principales son nulas

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2$$

$$I_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{xz} \tau_{yz} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{xz}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2$$

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$I_2 = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1$$

$$I_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$$

TENSIÓN HIDROSTÁTICA Y TENSIONES DESVIADORAS

$$\sigma_{\text{hidrostatica}} = p = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{I_1}{3}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}}_{\text{tensor de tensiones}} = \underbrace{\begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}}_{\text{comp. hidrostatica}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma'_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma'_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma'_z \end{pmatrix}}_{\text{comp. desviadora}}$$

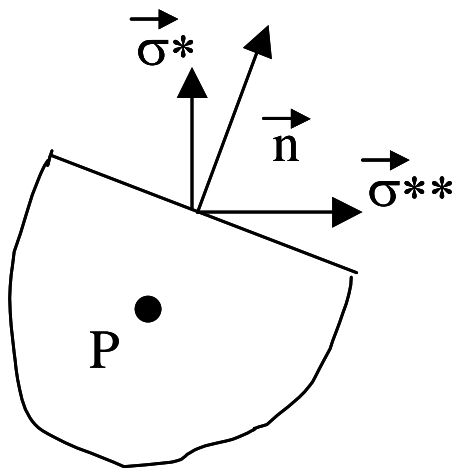
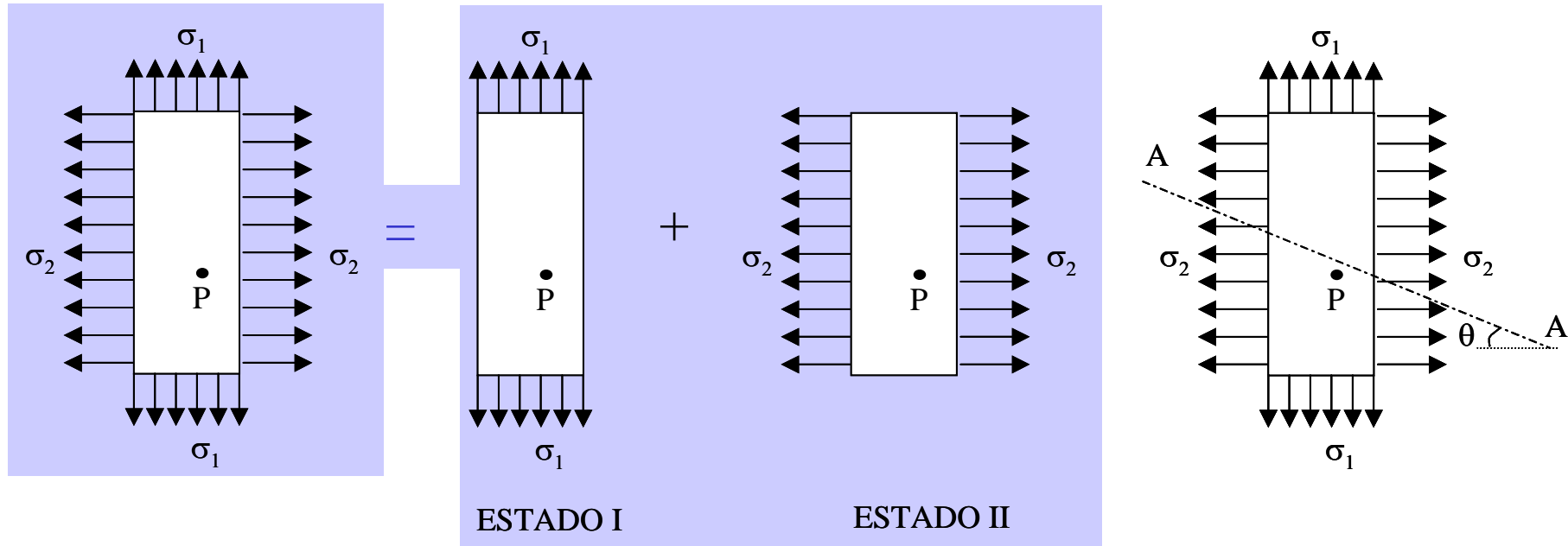
$$\sigma'_x = \sigma_x - p ; \sigma'_y = \sigma_y - p ; \sigma'_z = \sigma_z - p$$

Invariantes del tensor desviador: $J_1 = 0$

$$J_2 = I_2 - \frac{I_1^2}{3}$$

$$J_3 = \frac{(2I_1^3 - 9I_1I_2 + 27I_3)}{27}$$

ELIPSOIDE DE TENSIONES

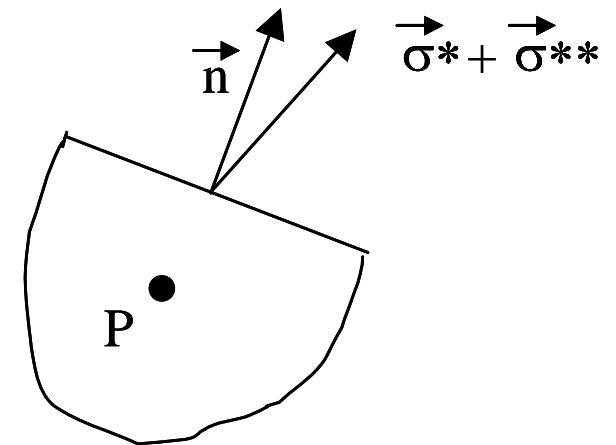


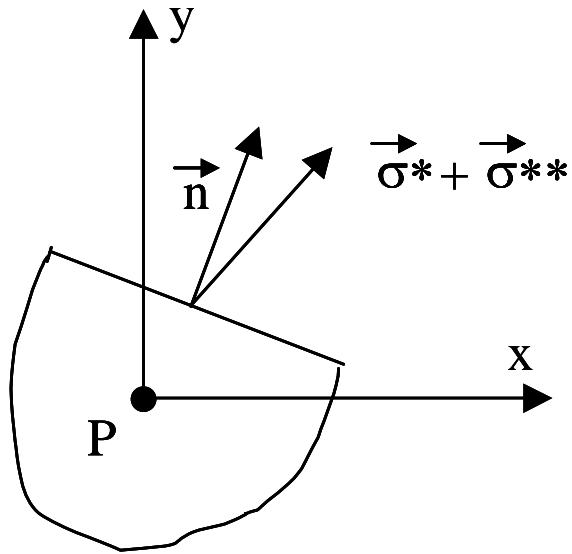
Estado I:

$$\vec{\sigma}^* = \sigma_1 \cos \theta$$

Estado II:

$$\vec{\sigma}^{**} = \sigma_2 \cdot \text{sen} \theta$$





¿Cuál es el lugar geométrico del extremo del vector tensión total, correspondiente a dicho punto, cuando variemos el ángulo θ ?

Coordenadas del extremo del vector tensión:

$$x = \sigma_2 \cdot \text{sen } \theta$$

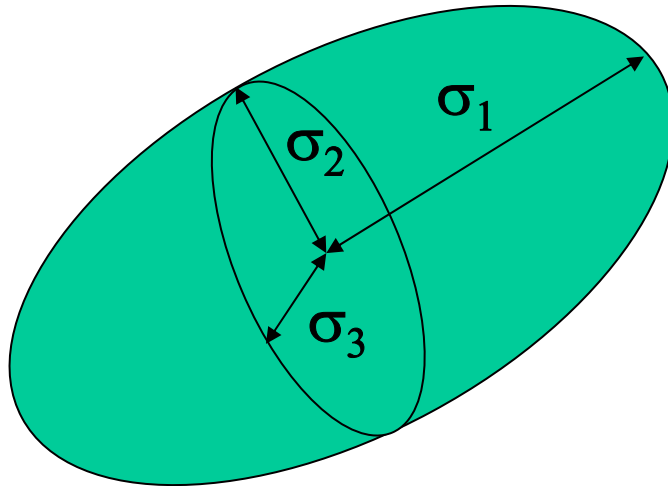
$$y = \sigma_1 \cdot \text{cos } \theta$$

$$\frac{x^2}{\sigma_2} + \frac{y^2}{\sigma_1} = 1$$

CASO TRIDIMENSIONAL:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x = \sigma_1 l \\ y = \sigma_2 m \\ z = \sigma_3 n \end{array} \right\}$$

$$\frac{x^2}{\sigma_1^2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2} + \frac{z^2}{\sigma_3^2} = 1$$



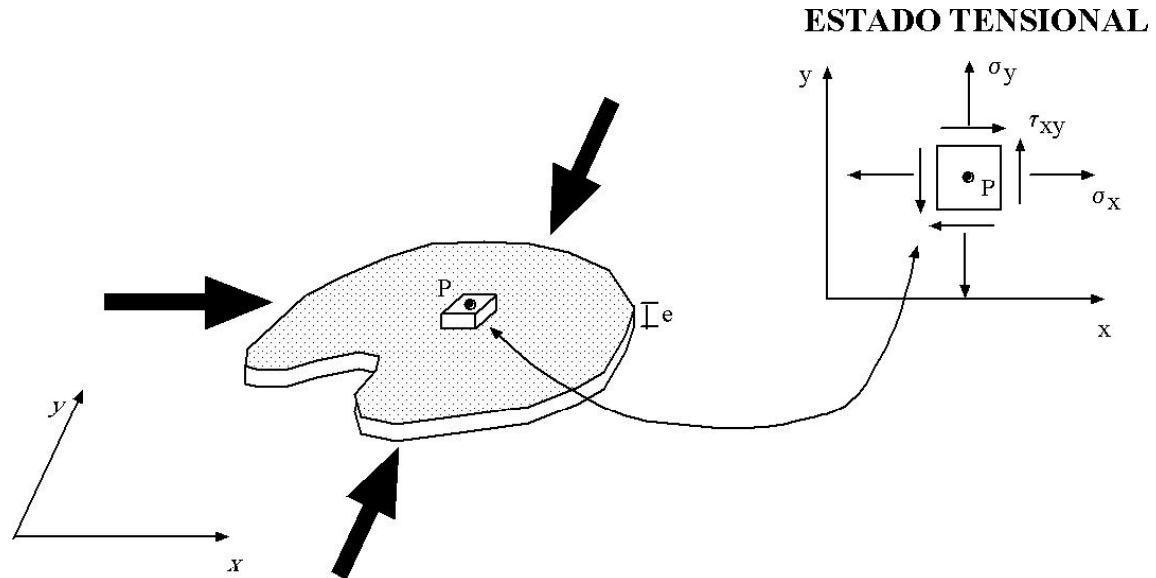
I_1 = Suma de las longitudes de los tres semiejes del elipsoide

I_2 = proporcional a la suma de las áreas de las tres elipses que intercepta el elipsoide con los planos principales

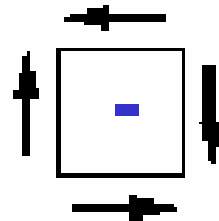
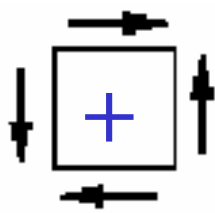
I_3 = proporcional al volumen del elipsoide

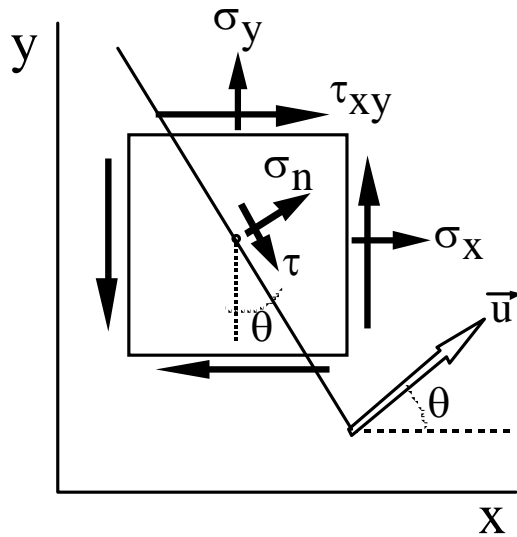
EL CIRCULO DE MOHR: APLICACION A SITUACIONES BIDIMENSIONALES

Otto MOHR
(1835-1918)



- **Tensiones normales:** positivas si son de tracción
(negativas si fueran de compresión)
- **Tensiones tangenciales:**

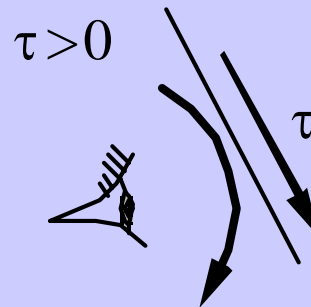


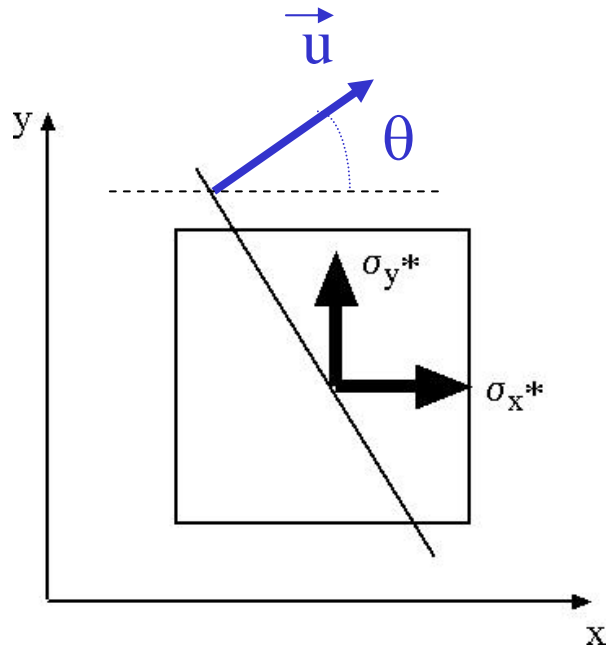


Signos a considerar para la construcción del círculo de Mohr:

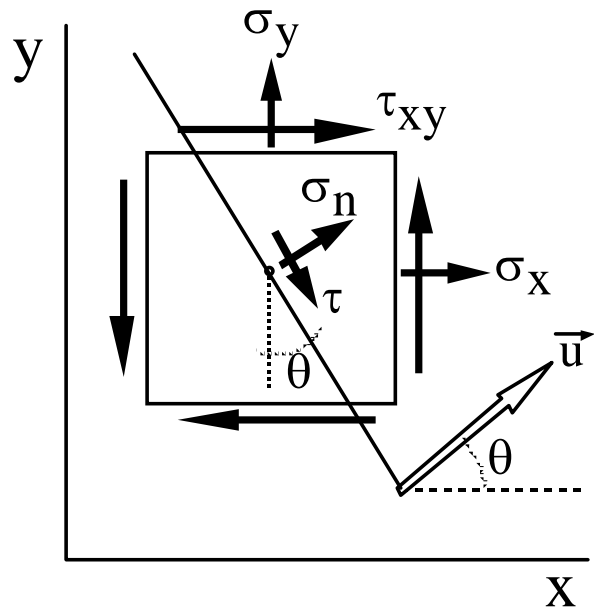
- La tensión normal será positiva si es de tracción
- La tensión tangencial es positiva si, desde el centro del punto elástico, produjera un giro en sentido horario

$\sigma_n > 0$ TRACCION





$$\begin{pmatrix} \sigma_x^* \\ \sigma_y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$



$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \theta + \tau_{xy} \sin 2\theta + \sigma_y \sin^2 \theta$$

$$\tau = \frac{\sigma_x}{2} \sin 2\theta - \frac{\sigma_y}{2} \sin 2\theta - \tau_{xy} \cos 2\theta$$

$$\left[\sigma_n - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right] = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta - \tau_{xy} \cos 2\theta$$

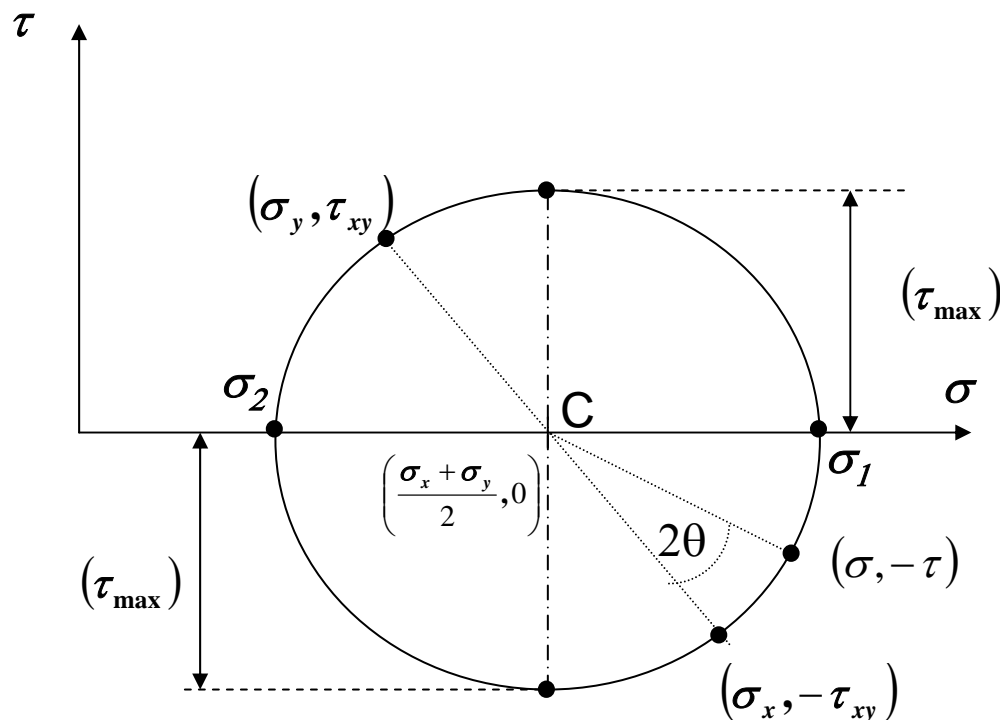
que corresponden a la ecuación de una circunferencia (en un plano cuyos ejes fueran σ y τ (Plano de Mohr) de centro:

$$(\sigma_x + \sigma_y)/2$$

y radio:

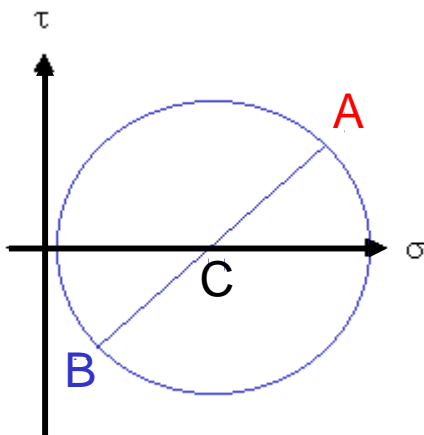
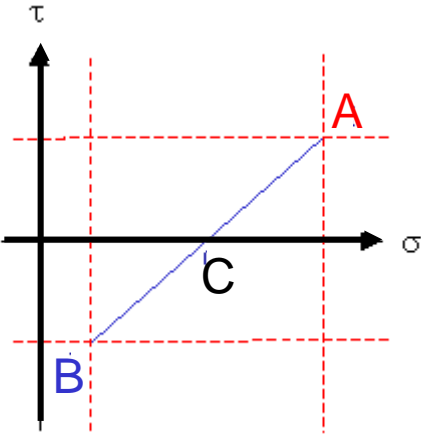
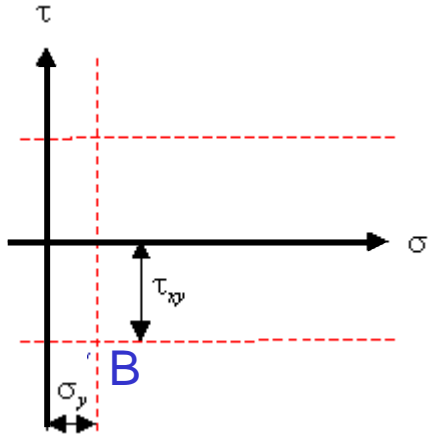
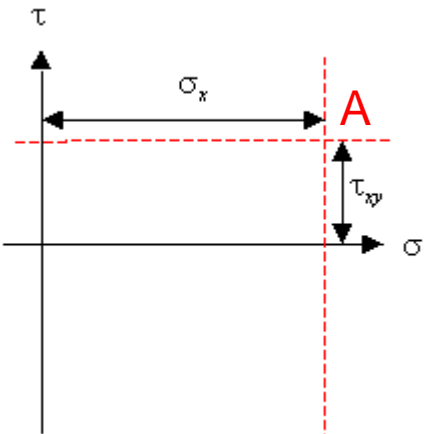
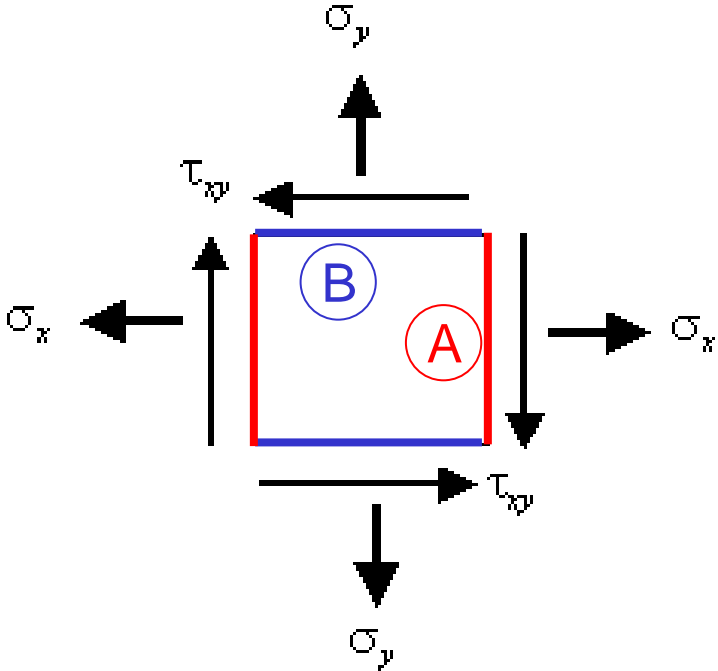
$$\sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Existe una correspondencia **biunívoca** entre cada dirección que consideremos en el punto elástico en estudio y un punto del círculo de Mohr correspondiente a ese punto elástico: a cada dirección que pasa por las proximidades del punto P le corresponde un punto del círculo de Mohr cuya abcisa es la componente normal del vector tensión que actúa sobre la dirección considerada y cuya ordenada es la componente tangencial de dicho vector tensión

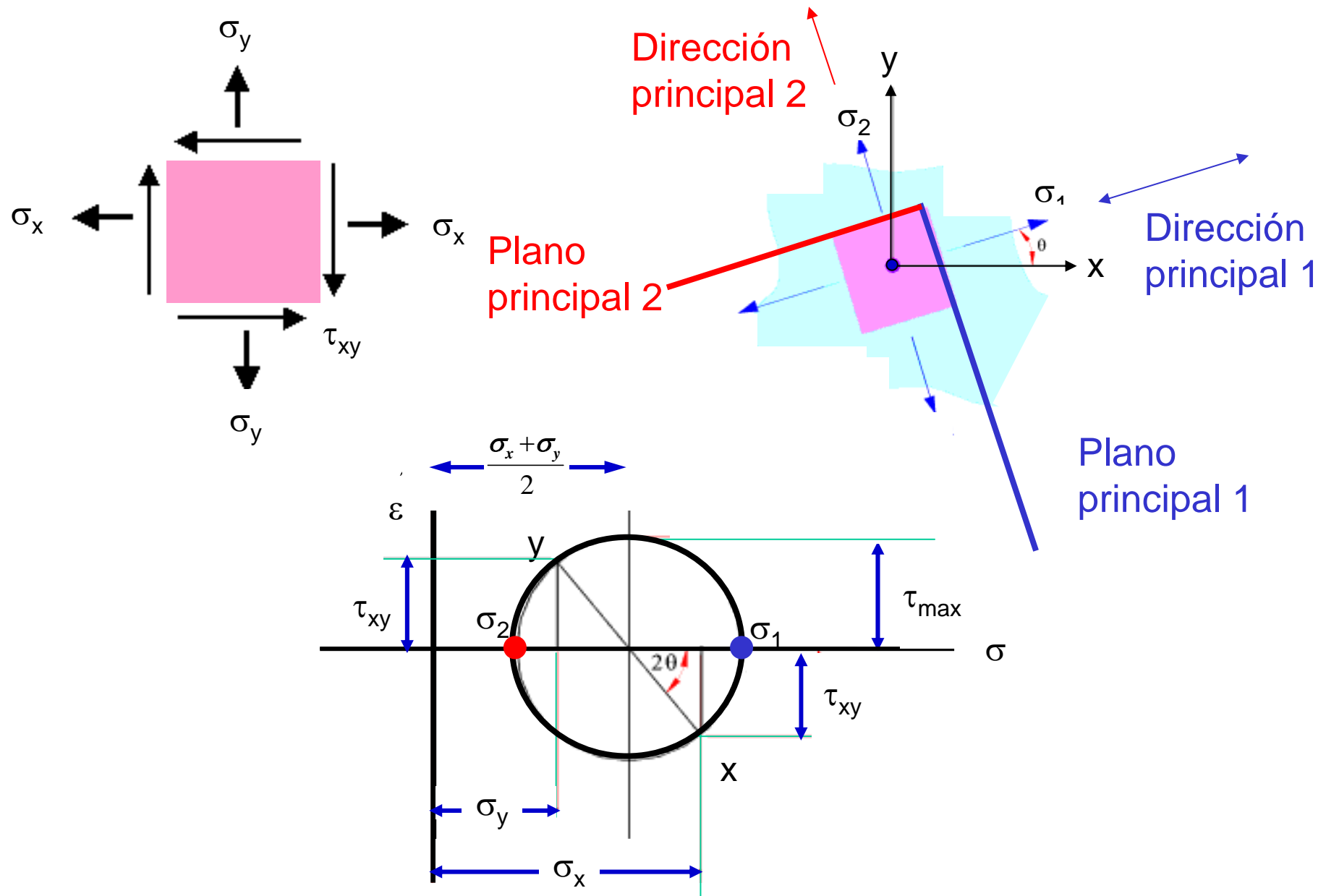


Una vez dibujado el círculo de Mohr, pueden obtenerse, por ejemplo, los valores de las tensiones principales así como las direcciones sobre las que actúan.

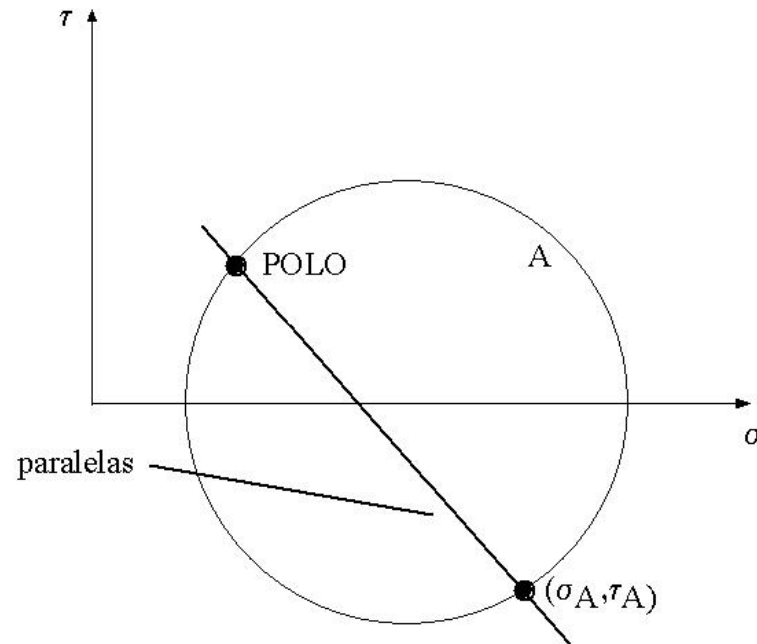
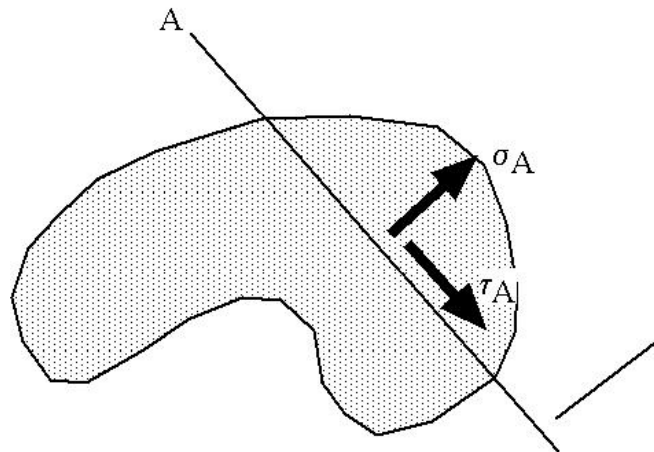
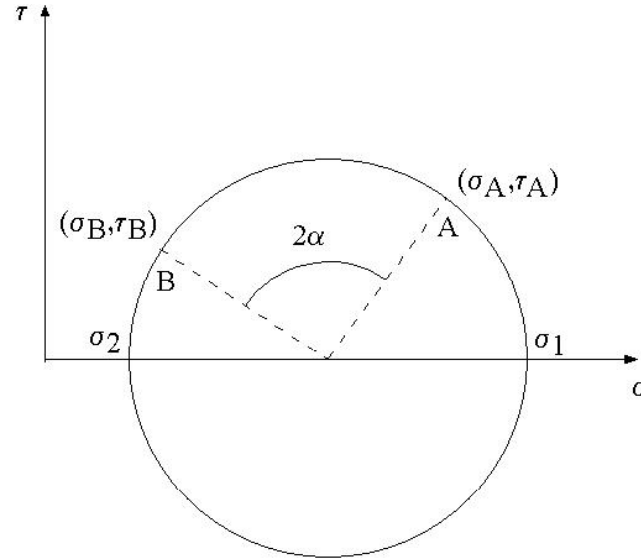
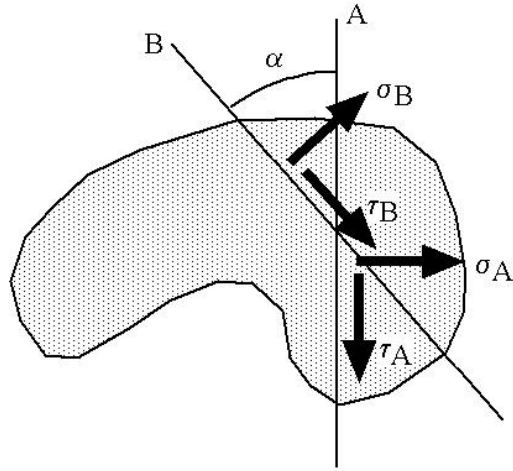
PASOS PARA EL DIBUJO DEL CÍRCULO DE MOHR



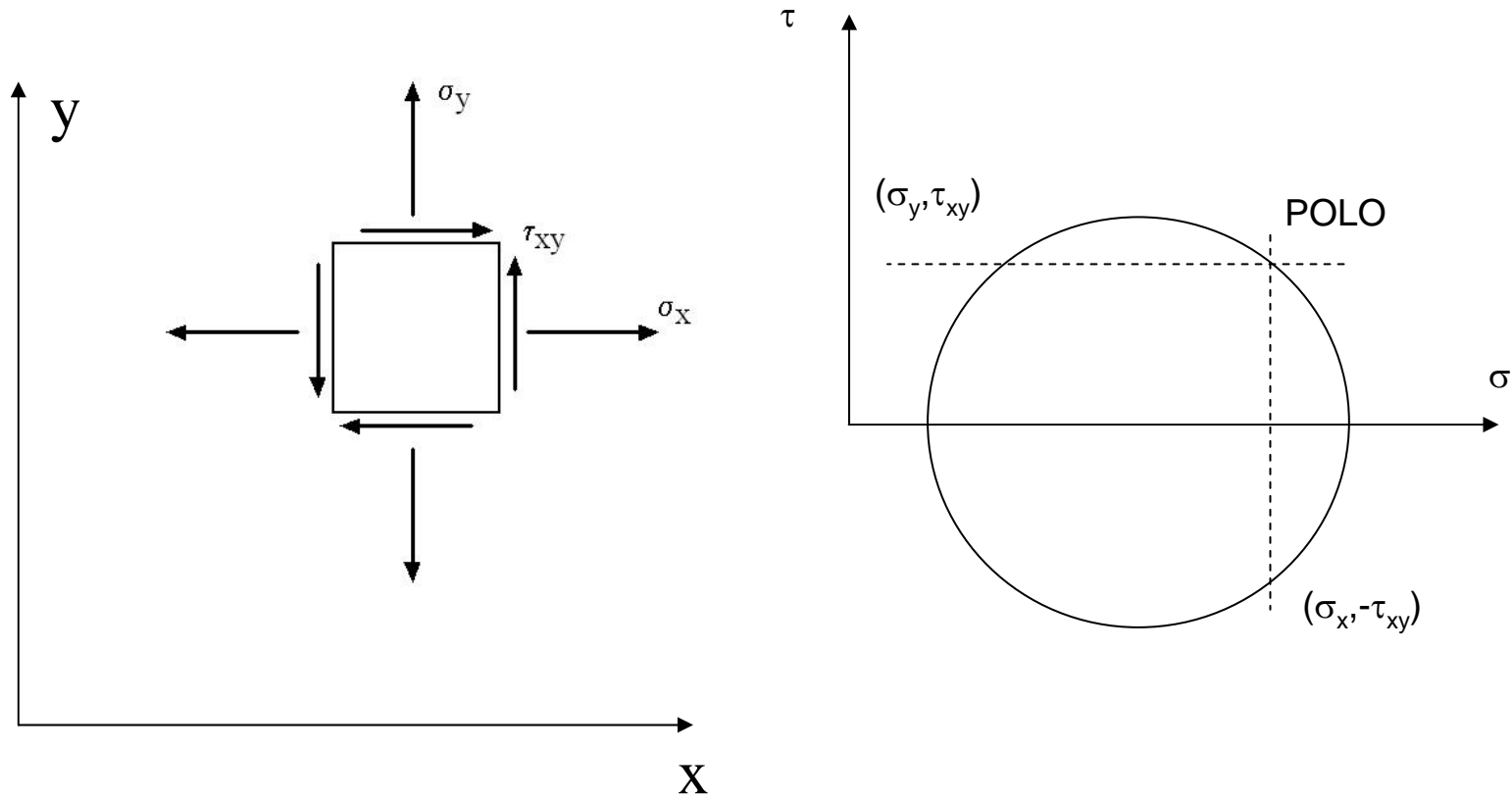
OBTENCIÓN DE LAS TENSIONES Y DIRECCIONES PRINCIPALES



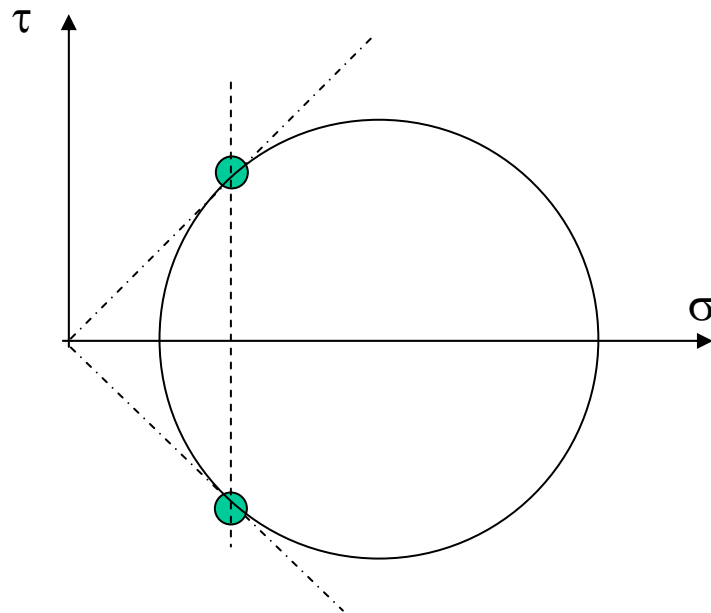
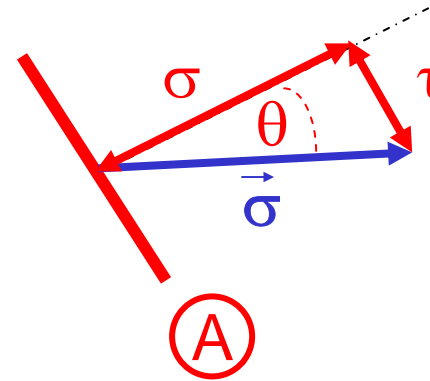
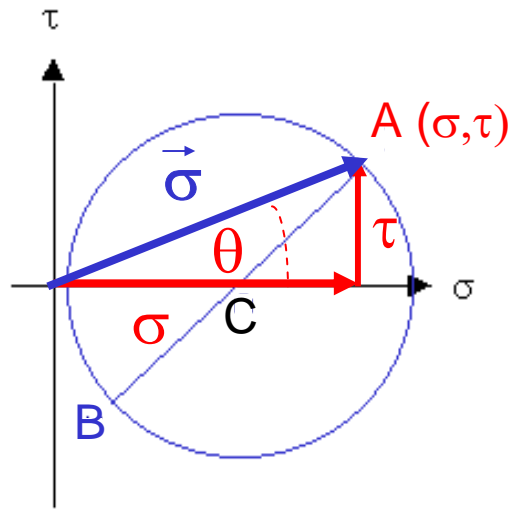
PROPIEDADES CIRCULO DE MOHR:



Obtención del Polo del Círculo de Mohr:

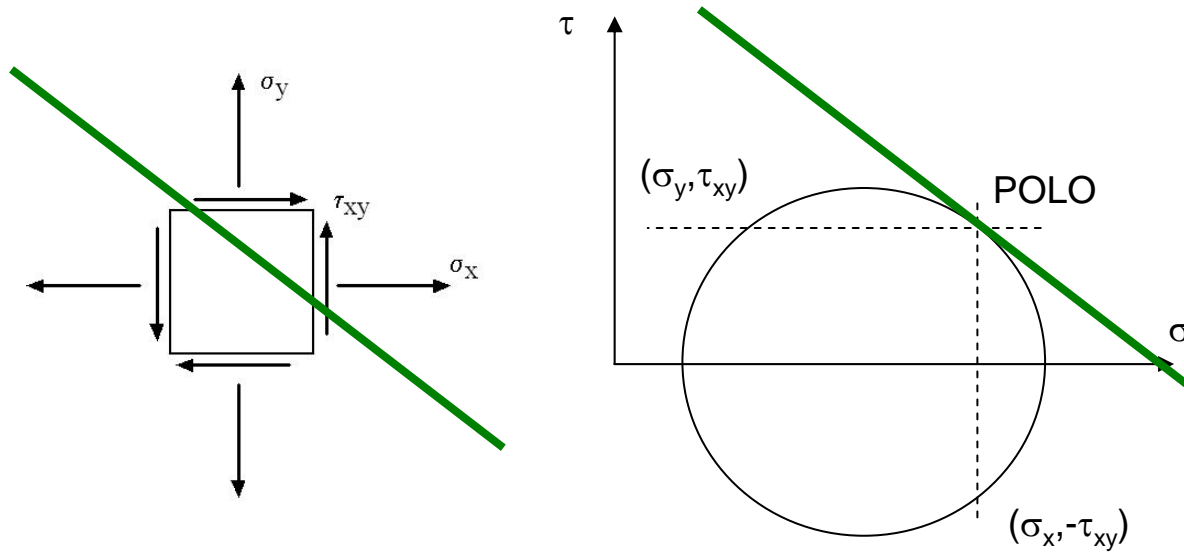


Otros aspectos del círculo de Mohr.

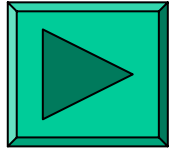


- Direcciones en las que el ángulo del vector tensión con la normal al plano sobre el que actúa es máximo

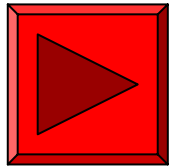
¿A qué dirección representa el POLO del círculo de Mohr?



SOFTWARE DISPONIBLE EN LA RED



<http://www.tecgraf.puc-rio.br/etools/mohr/mohreng.html>

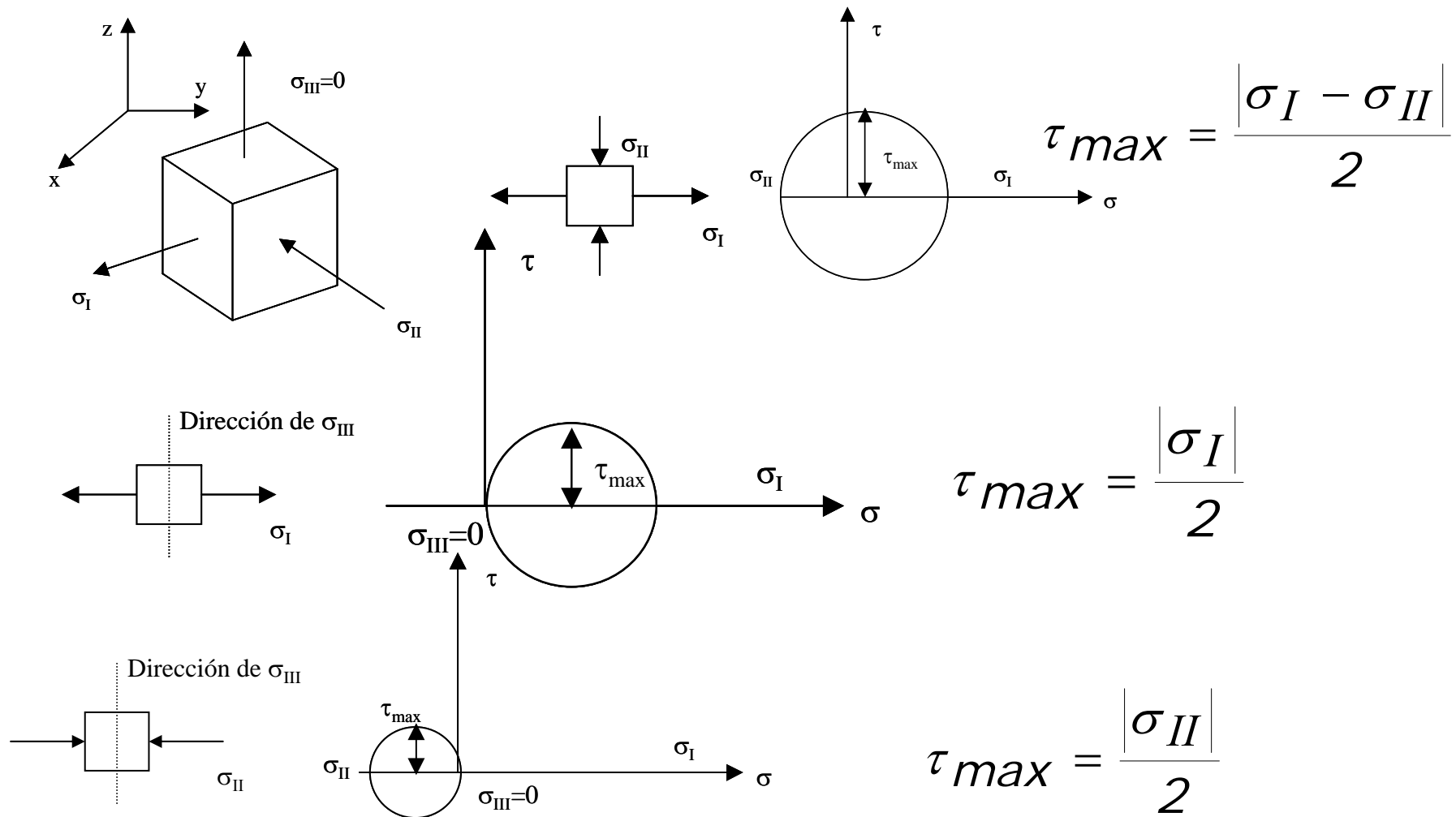


<http://www.eng.usf.edu/~kaw/software/>



<http://www.umoncton.ca/turk/CdeMohr.xls>

TENSIONES TANGENCIALES MÁXIMAS (Problemas bidimensionales)



$$\tau_{max} = \text{Máximo de } \left(\frac{|\sigma_I - \sigma_{II}|}{2}, \frac{|\sigma_I|}{2}, \frac{|\sigma_{II}|}{2} \right)$$

TENSIONES TANGENCIALES MÁXIMAS (Problemas tridimensionales)

$$\tau_{\max} = \text{Máximo de} \left(\frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2}, \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2}, \frac{|\sigma_2 - \sigma_3|}{2} \right)$$

Más, en la web, sobre círculo de Mohr:

<http://www.engin.umich.edu/students/support/mepo/ELRC/me211/mohr.html>