CAPÍTULO 4

PLANTEAMIENTO GENERAL DEL PROBLEMA ELÁSTICO

INCÓGNITAS Y ECUACIONES DEL PROBLEMA ELÁSTICO

Incógnitas: Desplazamientos (u,v,w), Tensor de tensiones ($\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z,\tau_{xy},\tau_{xz},\tau_{yz}$) y Tensor de Deformaciones ($\varepsilon_x,\varepsilon_y,\varepsilon_z,\gamma_{xy},\gamma_{xz},\gamma_{yz}$) ¡15 incógnitas!

Ecuaciones:

Equilibrio interno:

$$X + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0$$

$$Y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0$$

$$Z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0$$

Compatibilidad:

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right\}$$

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right\}$$

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right\}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2}$$

Constitutivas:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_z)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$$

$$\gamma_{xy} = \tau_{xy}/G$$

$$\gamma_{zx} = \tau_{zx}/G$$

$$\gamma_{yz} = \tau_{yz}/G$$

ó

$$\sigma_x = \lambda e_v + 2G\varepsilon_x$$

$$\sigma_y = \lambda e_v + 2G\varepsilon_y$$

$$\sigma_z = \lambda e_v + 2G\varepsilon_z$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$

$$\tau_{zx} = G\gamma_{zx}$$

$$\tau_{zy} = G\gamma_{zy}$$

¡15 ecuaciones!

FORMULACION EN DESPLAZAMIENTOS: ECUACIONES DE NAVIER:

Claude Louis Marie Henri NAVIER (1785-1836)

Incógnitas: Los desplazamientos *u,v,w* en cualquier punto del sólido

$$X + (\lambda + G)\frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{div}\ \vec{\delta}) + G\Delta u = 0$$

$$Y + (\lambda + G)\frac{\partial}{\partial y}(\mathrm{div}\ \vec{\delta}) + G\Delta v = 0$$

$$Z + (\lambda + G)\frac{\partial}{\partial z}(\mathrm{div}\ \vec{\delta}) + G\Delta w = 0$$

Ecuación fundamental de la Elasticidad:

$$\vec{f}_v + (\lambda + G)\ \mathrm{gra}\,\vec{\mathrm{d}}\ (\mathrm{div}\ \vec{\delta}) + G\Delta\vec{\delta} = \vec{0}$$

donde:

$$\vec{\delta} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$$

John Henry MICHELL
(1863-1940)

FORMULACION EN TENSIONES: ECUACIONES DE MICHELL Y BELTRAMI

Incógnitas: Las tensiones $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$
en cualquier punto del sólido

Ecuaciones de Michell:

$$\Delta\sigma_x + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2 I_1^\sigma}{\partial x^2} = -\frac{\nu}{1-\nu}\operatorname{div}\vec{f}_v - 2\frac{\partial X}{\partial x}$$

$$\Delta\sigma_y + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2 I_1^\sigma}{\partial y^2} = -\frac{\nu}{1-\nu}\operatorname{div}\vec{f}_v - 2\frac{\partial Y}{\partial y}$$

$$\Delta\sigma_z + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2 I_1^\sigma}{\partial z^2} = -\frac{\nu}{1-\nu}\operatorname{div}\vec{f}_v - 2\frac{\partial Z}{\partial z}$$

$$\Delta\tau_{yz} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2 I_1^\sigma}{\partial y\partial z} = -\left(\frac{\partial Y}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial y}\right)$$

$$\Delta\tau_{zx} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2 I_1^\sigma}{\partial z\partial x} = -\left(\frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial z}\right)$$

$$\Delta\tau_{xy} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2 I_1^\sigma}{\partial x\partial y} = -\left(\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x}\right)$$

Ecuaciones de Beltrami:

Eugenio BELTRAMI
(1835-1900)

$$\overrightarrow{f_V} = \overrightarrow{\text{constante}}$$

$$(1+\nu)\Delta\sigma_x + \frac{\partial^2 I_1^\sigma}{\partial x^2} = 0$$

$$(1+\nu)\Delta\sigma_y + \frac{\partial^2 I_1^\sigma}{\partial y^2} = 0$$

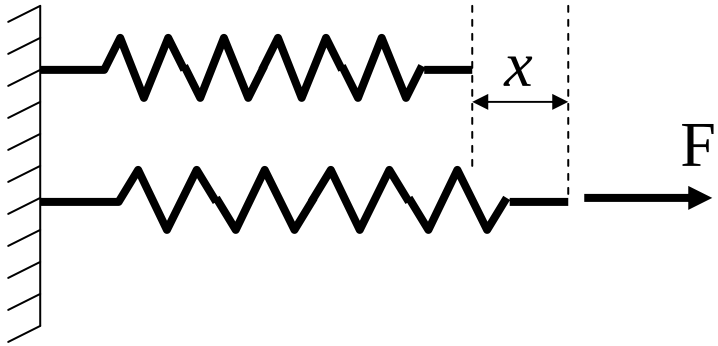
$$(1+\nu)\Delta\sigma_z + \frac{\partial^2 I_1^\sigma}{\partial z^2} = 0$$

$$(1+\nu)\Delta\tau_{yz} + \frac{\partial^2 I_1^\sigma}{\partial y \partial z} = 0$$

$$(1+\nu)\Delta\tau_{zx} + \frac{\partial^2 I_1^\sigma}{\partial z \partial x} = 0$$

$$(1+\nu)\Delta\tau_{xy} + \frac{\partial^2 I_1^\sigma}{\partial x \partial y} = 0$$

ENERGÍA DE DEFORMACIÓN

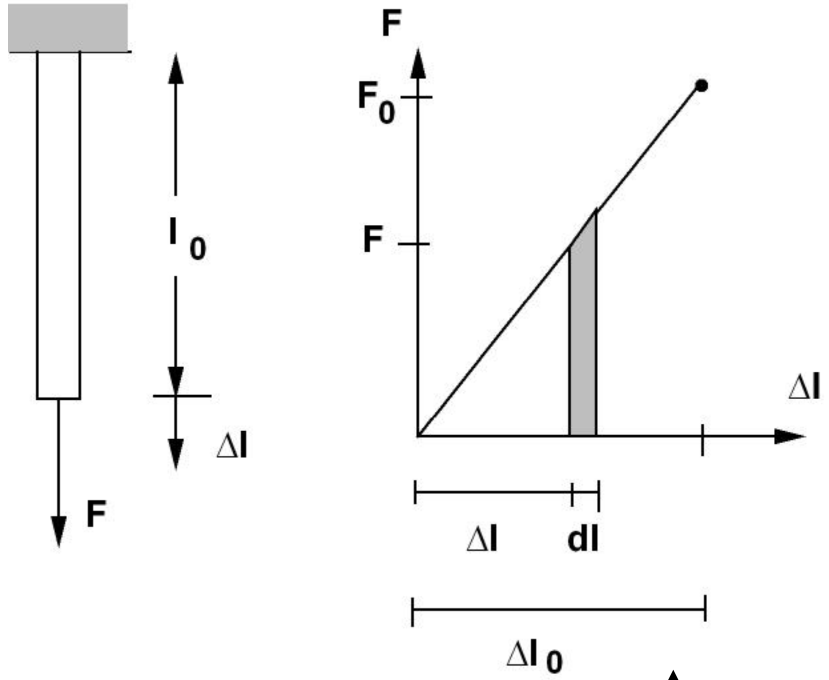


Consideremos un muelle sometido a una fuerza F.
F es proporcional al desplazamiento *x: F=k.x*
Determinemos el trabajo realizado por la fuerza cuando $F = F_o$:

$$W = \frac{1}{2} F_o x_o$$

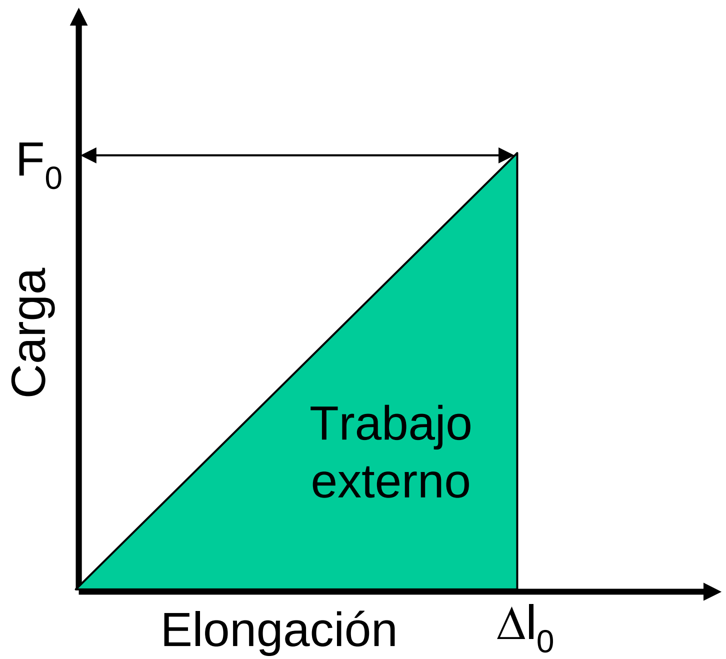
Esta energía (trabajo) es almacenada por el muelle y liberada cuando la fuerza cesa de actuar.

Si repitiéramos la misma experiencia con una barra:



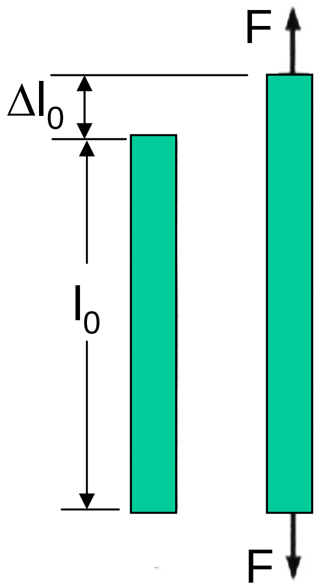
Trabajo realizado por la fuerza externa (U) = Energía potencial almacenada en el sólido

$$T = U = \int_{l=l_o}^{l=l_o+\Delta l_o} F \cdot dl = \frac{1}{2} F_o \Delta l_o$$



Area = A

Volumen = Al_0



$$T = U = \int_{l=l_o}^{l=l_o+\Delta l_o} F \cdot dl = \frac{1}{2} F_o \Delta l_o$$

$$F_o = \sigma A_o$$

$$\Delta l_o = \varepsilon l_o$$

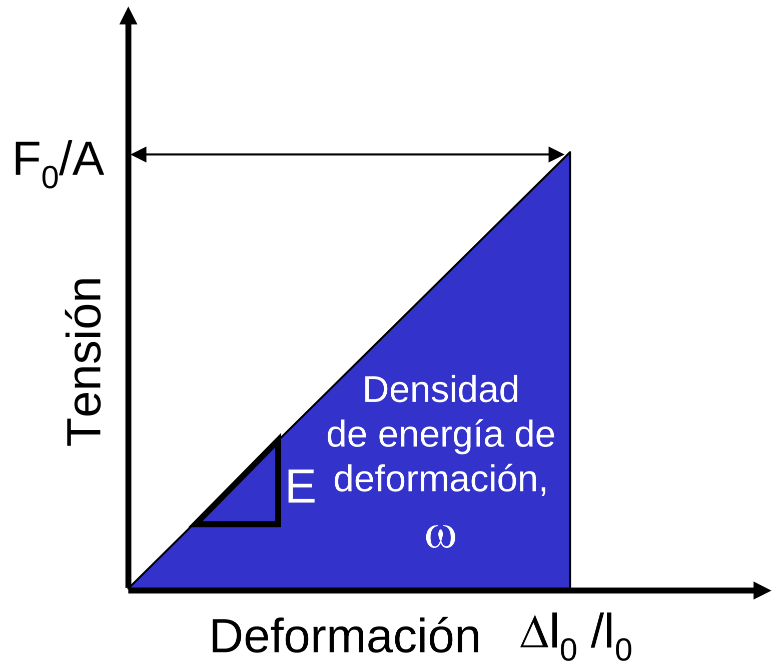
$$U = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon l_0 A_0$$

densidad de energía ω =
energía elástica almacenada
por unidad de volumen:

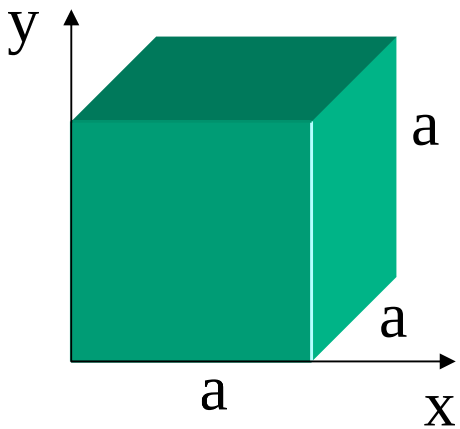
$$\omega = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon$$

Como $\sigma = E\varepsilon$

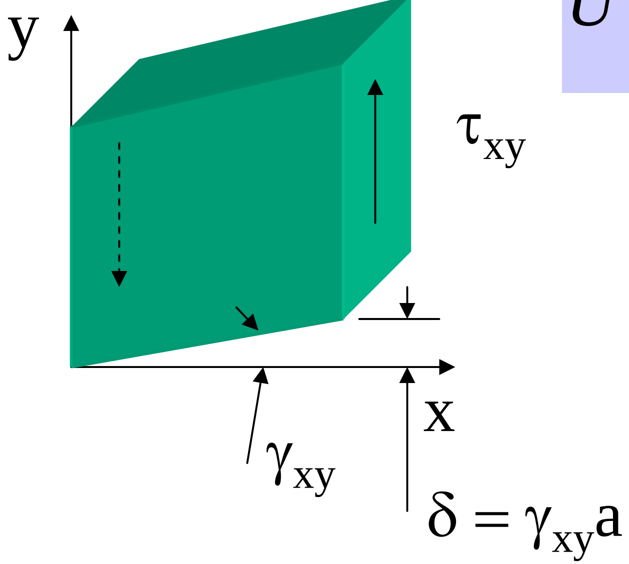
$$\omega = \frac{1}{2} E\varepsilon^2 = \frac{\sigma^2}{2E}$$



ENERGÍA DE DEFORMACIÓN POR CORTANTE



Consideremos un cubo de material sometido a una tensión cortante τ_{xy} que causa una deformación angular γ_{xy}



$$U = \frac{1}{2}\left(\tau_{xy} \cdot a^2\right) \cdot \left(\gamma_{xy} a\right) = \frac{1}{2}\tau_{xy}\gamma_{xy}a^3$$

$$\omega = \frac{1}{2}\tau_{xy}\gamma_{xy}a^3 / a^3 = \frac{1}{2}\tau_{xy}\gamma_{xy}$$

DENSIDAD DE ENERGÍA (CASO GENERAL)

$$\omega = \frac{1}{2}\left(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{xz}\gamma_{xz}\right)$$

Expresando las deformaciones en función de las tensiones (Leyes de Hooke):

$$\omega = \frac{1}{2E}\left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2\right) - \frac{\nu}{E}\left(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x\right) + \frac{1}{2G}\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2\right)$$

Expresando las tensiones en función de las deformaciones (Ecuaciones de Lamé):

$$\omega = \frac{1}{2}\lambda e_V^2 + G\left(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2\right) + \frac{1}{2}G\left(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{xz}^2\right)$$

$$e_V = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

$$\boxed{\omega \geq 0}$$

UNICIDAD DE LA SOLUCION DE UN PROBLEMA ELASTICO

Consideremos un sólido sobre el que actúan fuerzas internas (X,Y,Z) por unidad de volumen y fuerzas sobre su contorno $(\bar{X},\bar{Y},\bar{Z})$. Supongamos que existen dos soluciones diferentes:

Solución 1

$\sigma'_x, \ldots\ldots, \tau'_{xy}, \ldots\ldots\ldots$

Ecs. Equilibrio interno (Solución 1)

$$X + \frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau'_{xz}}{\partial z} = 0$$

....

....

Ecs. Equilibrio contorno (Solución 1)

$$\bar{X} = \sigma'_x\, l + \tau'_{xy}\, m + \tau'_{xz}\, n$$

....

....

+ Ecs. Compatibilidad (Solución 1)

Solución 2

$\sigma''_x, \ldots\ldots, \tau''_{xy}, \ldots\ldots\ldots$

Ecs. Equilibrio interno (Solución 2)

$$X + \frac{\partial \sigma''_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau''_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau''_{xz}}{\partial z} = 0$$

....

....

Ecs. Equilibrio contorno (Solución 2)

$$\bar{X} = \sigma''_x\, l + \tau''_{xy}\, m + \tau''_{xz}\, n$$

....

....

+ Ecs. Compatibilidad (Solución 2)

Restando las ecuaciones anteriores:

$$\frac{\partial(\sigma'_x - \sigma''_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\tau'_{xy} - \tau''_{xy})}{\partial y} + \frac{\partial(\tau'_{xz} - \tau''_{xz})}{\partial z} = 0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$(\sigma'_x - \sigma''_x)l + (\tau'_{xy} - \tau''_{xy})m + (\tau'_{xz} - \tau''_{xz})n = 0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

+ 6 Ecs. Compatibilidad que contienen $\varepsilon'_x - \varepsilon''_x, \dots\dots\dots, \gamma'_{xy} - \gamma''_{xy}, \dots\dots\dots$

El resultado que hemos obtenido es equivalente a decir que se ha encontrado una nueva distribución tensional (diferencia entre los estados tensionales de las soluciones 1 y 2), que verifica todas las ecuaciones del problema elástico, para el caso de que el sólido se encuentre libre de cargas actuantes sobre él (fuerzas internas y de contorno nulas). Esto implica que el trabajo realizado por tales fuerzas es nulo, ya que las fuerzas actuantes resultan ser nulas y, por tanto, la energía elástica almacenada, o su correspondiente densidad de energía, debiera ser también nula, por lo que:

$$\omega = \frac{1}{2}\lambda e_v'''^2 + G(\varepsilon_x'''^2 + \varepsilon_y'''^2 + \varepsilon_z'''^2) + \frac{1}{2}G(\gamma_{xy}'''^2 + \gamma_{yz}'''^2 + \gamma_{xz}'''^2) = 0$$

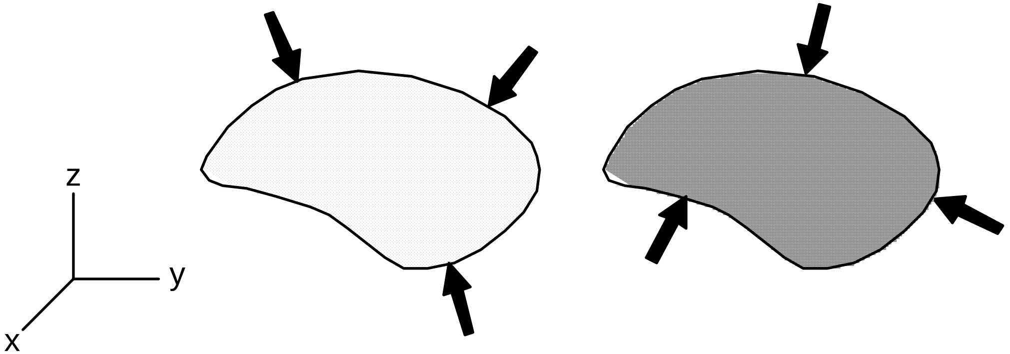
Donde: $\varepsilon'''_x = \varepsilon'_x - \varepsilon''_x, \dots\dots\dots, \gamma'''_{xy} = \gamma'_{xy} - \gamma''_{xy}, \dots\dots\dots$

$$\varepsilon_x''' = 0 \Rightarrow \varepsilon_x' = \varepsilon_x'', \ldots\ldots\ldots, \gamma_{xy}''' = 0 \Rightarrow \gamma_{xy}' = \gamma_{xy}'', \ldots\ldots\ldots$$

$$\sigma_x' = \sigma_x'', \ldots\ldots\ldots, \tau_{xy}' = \tau_{xy}''$$

¡no pueden existir dos soluciones distintas para un mismo problema elástico!

PRINCIPIO DE SUPERPOSICION



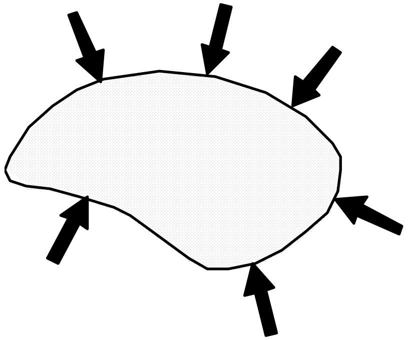
ESTADO 1 ESTADO 2

$\sigma'_{x} \ldots\ldots\ldots\ldots \tau'_{xy} \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\varepsilon'_{x} \ldots\ldots\ldots\ldots \gamma'_{xy} \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\sigma''_{x} \ldots\ldots\ldots\ldots \tau''_{xy} \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\varepsilon''_{x} \ldots\ldots\ldots\ldots \gamma''_{xy} \ldots\ldots\ldots\ldots$

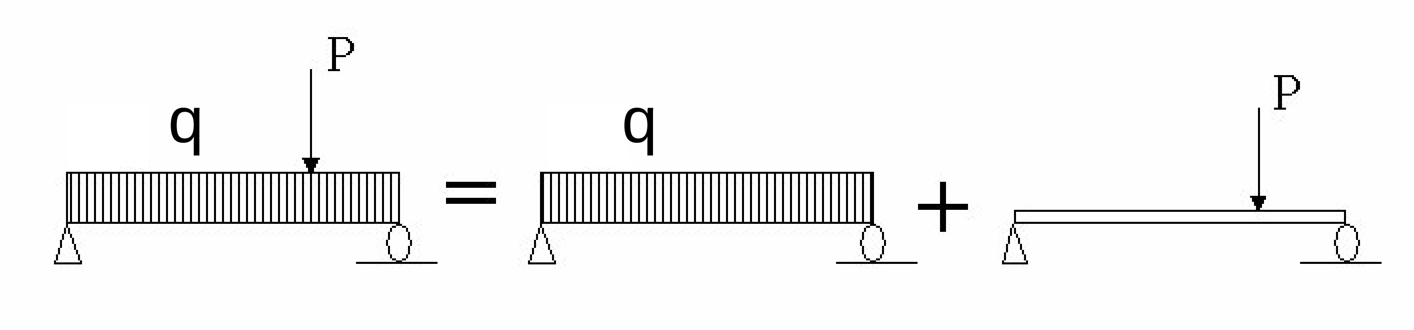


ESTADO 1+2

$$\sigma_{x} = \sigma'_{x} + \sigma''_{x} \ldots\ldots\ldots\ldots \tau_{xy} = \tau'_{xy} + \tau''_{xy} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\varepsilon_{x} = \varepsilon'_{x} + \varepsilon''_{x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \gamma_{xy} = \gamma'_{xy} + \gamma''_{xy} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

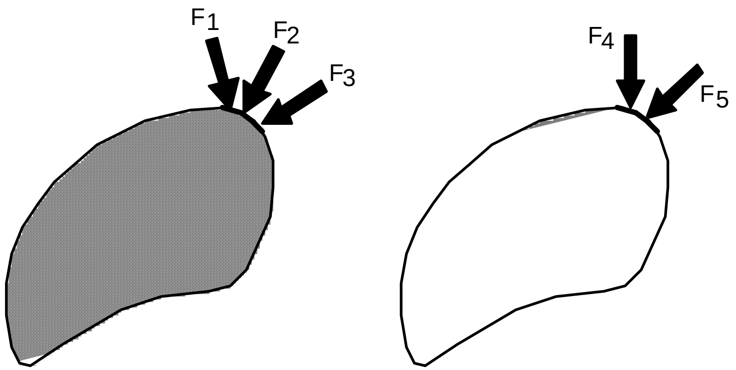
EJEMPLO:



PRINCIPIO DE SAINT-VENANT

SAINT VENANT
(1797-1886)

Supongamos un mismo sólido sometido, en las mismas regiones, a dos sistemas de cargas mecánicamente equivalentes:



Principio de Saint-Venant: los estados tenso-deformacionales producidos por ambos sistemas de cargas en cualquier punto del sólido suficientemente alejado de la zona en la que se aplican ambos sistemas (a distancias muy grandes en relación con las propias dimensiones de la zona de la superficie sobre la que actúan el sistema de cargas 1 ó el 2), son, a efectos prácticos, idénticos.