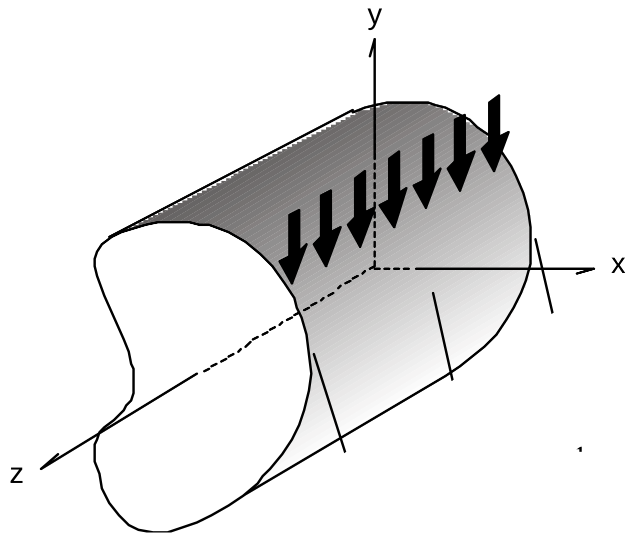
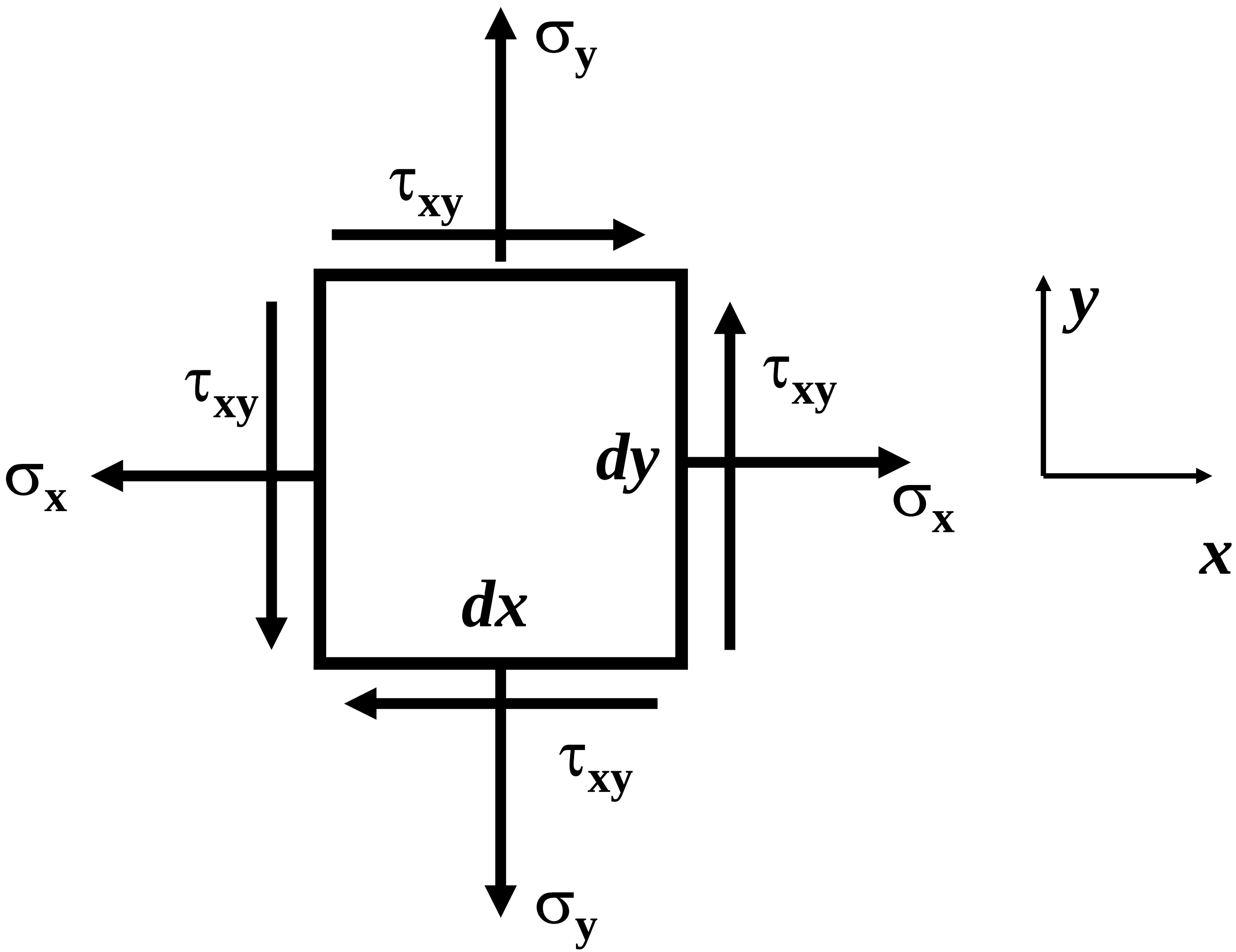
CAPITULO 5

ELASTICIDAD PLANA

Supongamos el sólido de la figura, que posee forma cilíndrica con sus generatrices paralelas al eje *z*, y que se encuentra sometido a la acción de las cargas indicadas. El valor de dichas cargas es independiente de la coordenada *z*, así como sus componentes en dicha dirección (fuerzas distribuidas y de superficie paralelas al plano *x-y*).



Las ecuaciones de la Elasticidad, y la correspondiente solución del problema, se pueden plantear utilizando, solamente, las coordenadas *(x,y)*.



Tensiones en el plano x-y

$$\boxed{\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}\\[2ex] \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}\\[2ex] \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\end{aligned}}$$

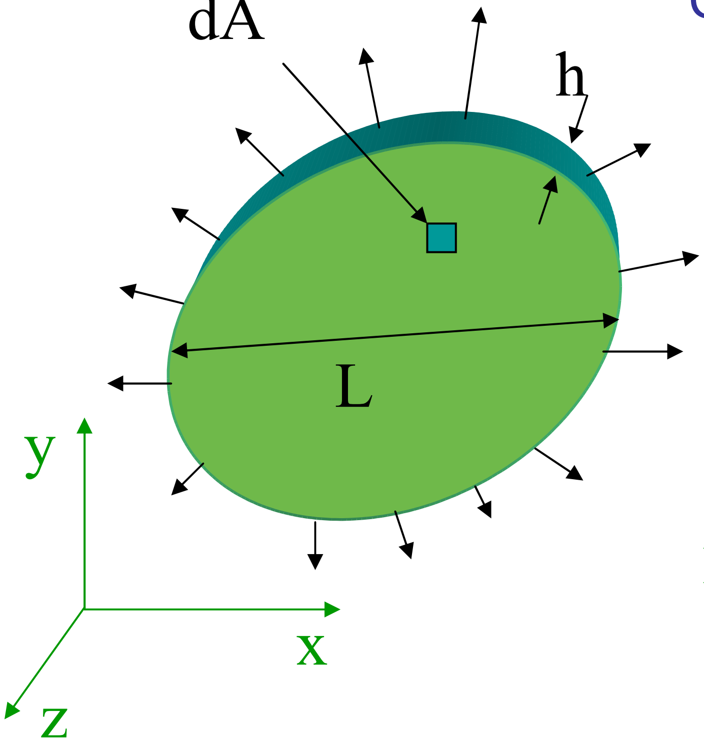
Deformaciones en el plano x-y

¿Y qué tensiones y deformaciones aparecen en un plano perpendicular al eje z?

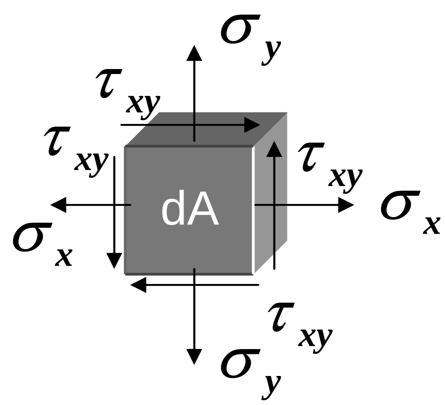
Muchos problemas de elasticidad bidimensional se resuelven haciendo una de estas dos hipótesis:

$\tau_{yz} = 0$	$\gamma_{yz} = 0$
$\tau_{zx} = 0$	$\gamma_{zx} = 0$
$\sigma_z = 0$	$\varepsilon_z = 0$
TENSIÓN PLANA	DEFORMACIÓN PLANA

TENSIÓN PLANA: Sólo son distintas de cero las componentes, en el Plano, del tensor de tensiones.



Componentes tensionales no nulas: $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$

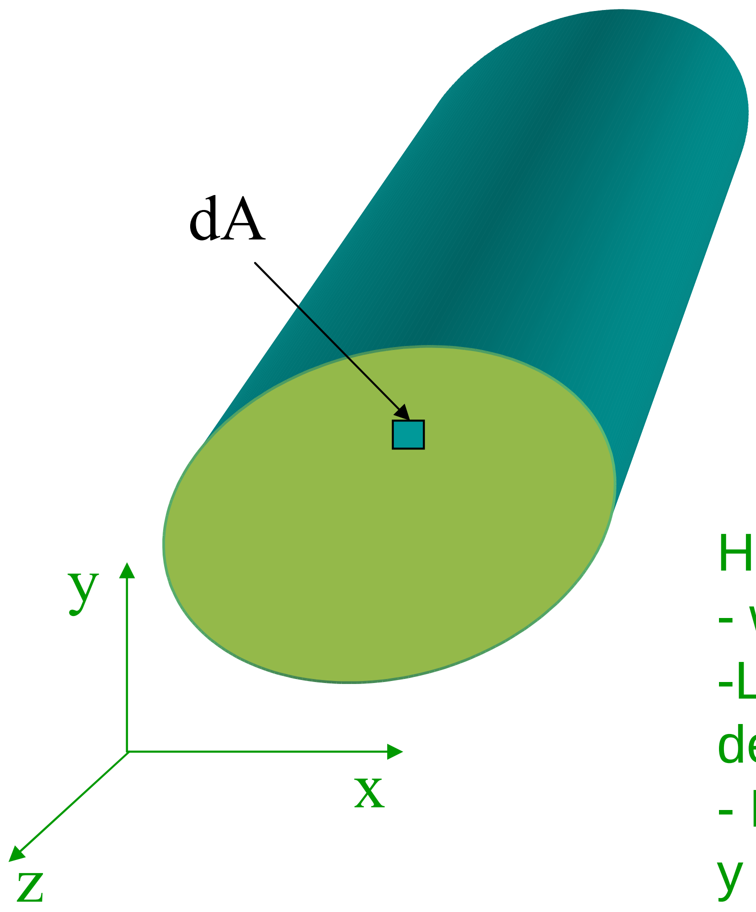


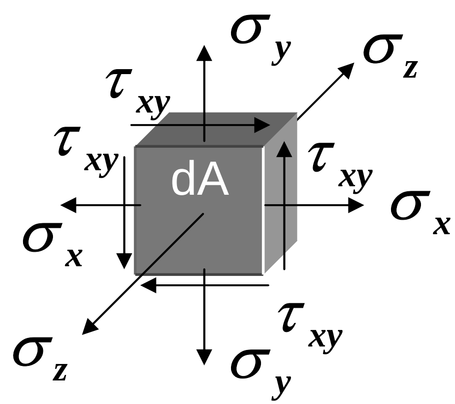
Hipótesis:

- h<<L
- Las dos caras del sólido se encuentran libres de fuerzas
- Las fuerzas interiores por unidad de volumen y las aplicadas en el contorno perimetral del sólido no dependen de la coordenada z

DEFORMACIÓN PLANA: Sólo son distintas de ceros las componentes en el plano, del tensor de deformaciones.

Componentes deformacionales no nulas: $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$





Hipótesis:

- w=0

-Las dos caras del sólido no sufren desplazamientos según z

- Las fuerzas interiores por unidad de volumen y las aplicadas en el contorno perimetral del sólido no dependen de la coordenada z

- u,v son funciones de sólo x e y

TENSIÓN PLANA

1) Un estado tensional en el que la tensión normal y las tensiones tangenciales actuantes sobre las caras de la pieza son nulas.

2) Si x-y es el plano del sólido bidimensional, las únicas componentes del tensor de tensiones no nulas son: $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$

3)Las componentes: $\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ serían nulas

Desplazamientos	Tensor de deformaciones	Tensor de tensiones
$u = u(x,y)$ $v = v(x,y)$ $w \neq 0$	$[D] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 & 0 \\ \gamma_{xy}/2 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}$	$[T] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

DEFORMACIÓN PLANA

1) Un estado deformacional en el que la deformación longitudinal y las deformaciones angulares correspondientes a un plano paralelo a la sección transversal de la pieza son nulas.

2) Si x-y es el plano de la sección transversal de la pieza las únicas componentes del tensor de deformaciones no nulas son: ε_x , ε_y , γ_{xy}

3) Las componentes : ε_z , γ_{xz} , γ_{yz} serían nulas.

Desplazamientos

$$u = u\,(x,y)$$
$$v = v\,(x,y)$$
$$w = 0$$

Tensor de deformaciones

$$[D] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 & 0 \\ \gamma_{xy}/2 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tensor de tensiones

$$[T] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$$

DEFORMACIÓN PLANA:

Ecuaciones de equilibrio interno:

$$X+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}=0$$

$$Y+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}=0$$

Ecuaciones de equilibrio en el contorno:

$$\left.\begin{aligned}\overline{X}&=l\;\sigma_x+m\;\tau_{xy}\\ \overline{Y}&=l\;\tau_{xy}+m\;\sigma_y\end{aligned}\right\}$$

Ecuaciones de compatibilidad:

$$\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y}$$

$$\Delta\left(\sigma_x+\sigma_y\right)=-\frac{1}{1-\nu}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)$$

Ecuaciones constitutivas:

$$\varepsilon_x=\frac{1}{E}\sigma_x-\frac{\nu}{E}\left(\sigma_y+\sigma_z\right)$$

$$\varepsilon_y=\frac{1}{E}\sigma_y-\frac{\nu}{E}\left(\sigma_x+\sigma_z\right)$$

$$\varepsilon_z=0=\frac{1}{E}\sigma_z-\frac{\nu}{E}\left(\sigma_x+\sigma_y\right)$$

$$\sigma_z=\nu\left(\sigma_x+\sigma_y\right)$$

$$\varepsilon_x=\frac{1}{E}\left[\left(1-\nu^2\right)\sigma_x-\nu(1+\nu)\sigma_y\right]$$

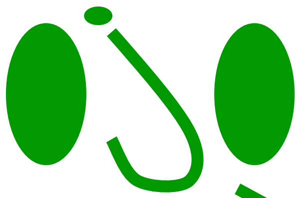
$$\varepsilon_y=\frac{1}{E}\left[\left(1-\nu^2\right)\sigma_y-\nu(1+\nu)\sigma_x\right]$$

$$\gamma_{xy}=\tau_{xy}/G$$

TENSIÓN PLANA:

Las Ecuaciones de equilibrio interno y de equilibrio en el contorno son las mismas que en el caso de deformación plana. Las Ecuaciones de compatibilidad son:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$



Estas tres ecuaciones no se han utilizado. La ecuación deducida es sólo aproximada.

$$\boxed{\begin{gathered}\partial^2 \varepsilon_z / \partial y^2 = 0 \\ \partial^2 \varepsilon_z / \partial x^2 = 0 \\ \partial^2 \varepsilon_z / \partial x \partial y = 0\end{gathered}}$$

$$\Delta\left(\sigma_x+\sigma_y\right)=-(1+\nu)\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)$$

Ecuaciones constitutivas:

$$\varepsilon_x=\frac{\sigma_x-\nu\sigma_y}{E}$$

$$\varepsilon_y=\frac{\sigma_y-\nu\sigma_x}{E}$$

$$\gamma_{xy}=\tau_{xy}/G$$

DEFORMACIÓN PLANA:

$$\Delta\left(\sigma_x + \sigma_y\right) = -\frac{1}{1-\nu}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)$$

TENSIÓN PLANA:

$$\Delta\left(\sigma_x + \sigma_y\right) = -(1+\nu)\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)$$

Aspectos de interés:

- Sólo una propiedad del material interviene en estas ecuaciones (el coeficiente de Poisson, ν)
- Si la fuerza por unidad de volumen que actúa sobre el sólido fuese constante (por ejemplo, la de la gravedad), las dos ecuaciones anteriores se convertirían en la siguiente:

$$\Delta\left(\sigma_x + \sigma_y\right) = 0$$

FUNCION DE TENSIÓN O DE AIRY

Sir George Biddell Airy
(1801-1892)

La función de tensión de Airy permite una fácil resolución de los problemas elásticos bidimensionales. Una vez conocida esta función, que la representaremos por $\phi(x,y)$ por ser función de estas dos coordenadas, pueden obtenerse las tensiones mediante un proceso de derivación de la misma.

FUNCION DE TENSIÓN O DE AIRY

Ecuaciones de equilibrio interno (X e Y son valores constantes):

$$X + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0$$

$$Y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0$$

Derivando respecto de x

Derivando respecto de y

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \cdot \partial y} = \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2}$$

Si definimos una función ϕ (función de tensión o de Airy) de la que se pudiese obtener las tensiones actuantes en el sólido, de tal manera que:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \qquad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \qquad \boldsymbol{\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - Xy - Yx}$$

para que estas tensiones fuesen la solución de un problema plano, se tendría que cumplir:

$$\Delta(\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right) = 0$$

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0 \qquad \textbf{ó} \qquad \Delta^2 \phi = 0$$

¡La función ϕ debe ser biarmónica!

FORMAS POLINÓMICAS DE LA FUNCIÓN DE AIRY

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

Baise Pascal
(1623-1662)

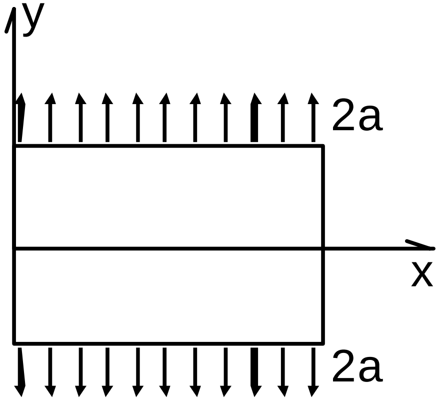
1	No interesan
$x \quad y$	no dan lugar a tensiones
$x^2 \quad xy \quad y^2$	Funciones
$x^3 \quad x^2y \quad xy^2 \quad y^3$	biarmónicas
$x^4 \quad x^3y \quad x^2y^2 \quad xy^3 \quad y^4$	Funciones
$x^5 \quad x^4y \quad x^3y^2 \quad x^2y^3 \quad xy^4 \quad y^5$	biarmónicas con condiciones

POLINOMIO DE SEGUNDO GRADO

$$\phi = ax^2 + bxy + cy^2$$

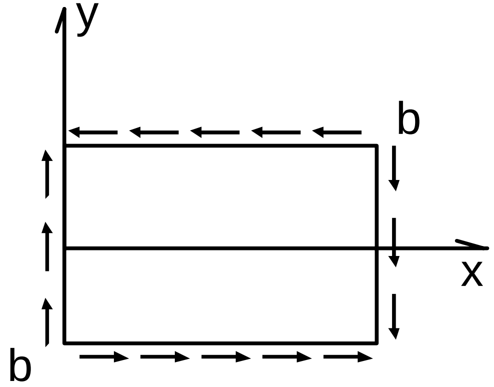
$$\sigma_x = 2c$$
$$\sigma_y = 2a$$
$$\tau_x = -b$$

$a \neq 0$ b=c=0

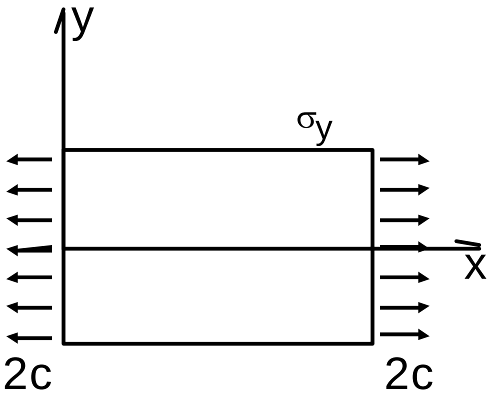


$\sigma_x = 2c$

$b \neq 0$ a=c=0



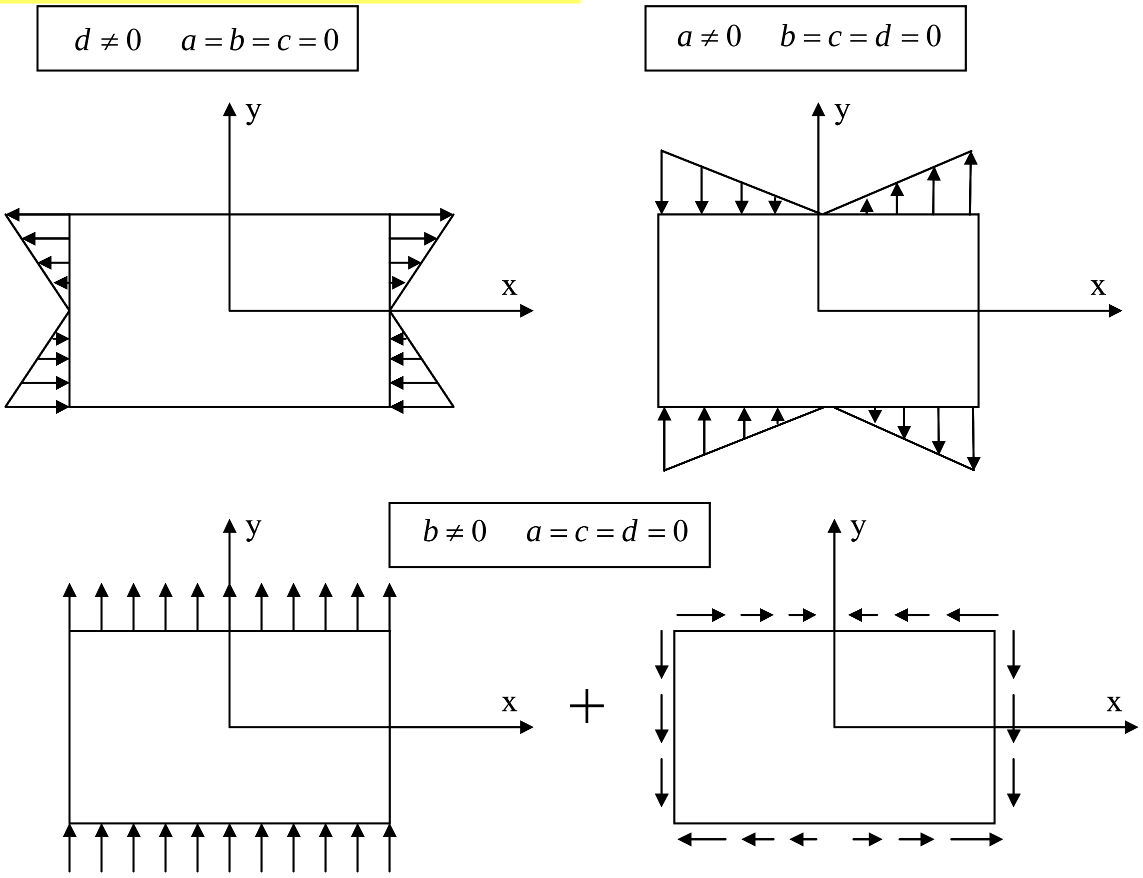
$c \neq 0$ a=b=0



POLINOMIO DE TERCER GRADO

$$\phi = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$$

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x &= 6dy + 2cx\\ \sigma_y &= 6ax + 2by\\ \tau_{xy} &= -2bx - 2cy\end{aligned}\right\}$$



POLINOMIO DE CUARTO GRADO

$$\phi = ax^4 + bx^3y + cx^2y^2 + dxy^3 + ey^4$$

$$\Delta^2\phi = \frac{\partial^4\phi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\phi}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\phi}{\partial y^4} = 24a + 8c + 24e = 0$$

$$3a + c + 3e = 0 \qquad \Rightarrow \qquad c = -3(a + e)$$

POLINOMIO DE QUINTO GRADO

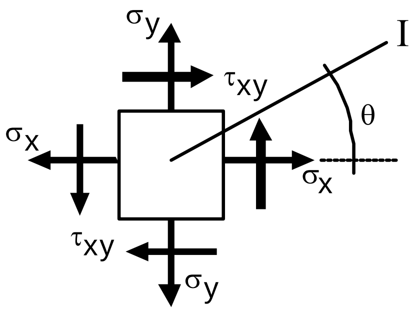
$$\phi = ax^5 + bx^4y + cx^3y^2 + dx^2y^3 + exy^4 + fy^5$$

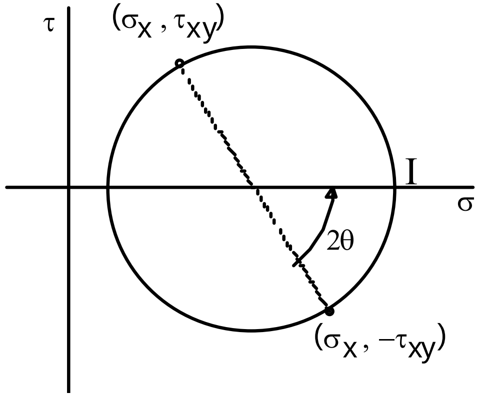
$$\Delta^2\phi = (120a + 24e + 24c)x + (120f + 24b + 24d)y = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} 5a + e + c = 0 \\ 5f + b + d = 0 \end{array}\right\}$$

CURVAS CARACTERISTICAS EN ELASTICIDAD PLANA

ISOSTÁTICAS Curvas envolventes de las tensiones principales





El ángulo θ que forma la dirección principal mayor con el eje *x* será:

$$\mathrm{tg}\ 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2\ \mathrm{tg}\ \theta}{1 - \mathrm{tg}^2\theta}$$

$$\mathrm{tg}\ \theta = \frac{\partial y}{\partial x} \qquad \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) - 1 = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}\right)^2 + 1}$$

$\downarrow$

Las dos familias de isostáticas

Puntos singulares:

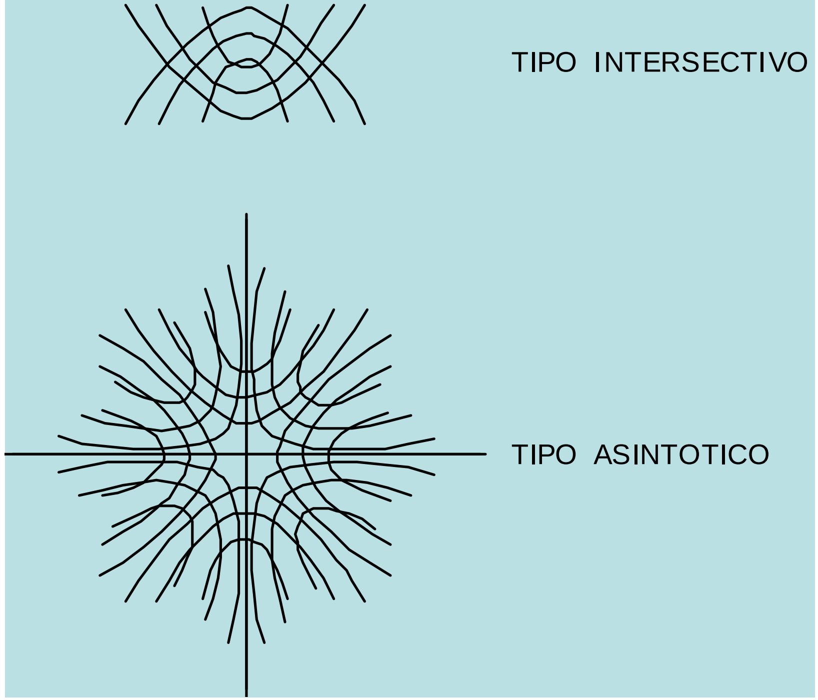
-Punto singular, circular o isotrópo

$$\sigma_x = \sigma_y \qquad \tau_{xy} = 0$$

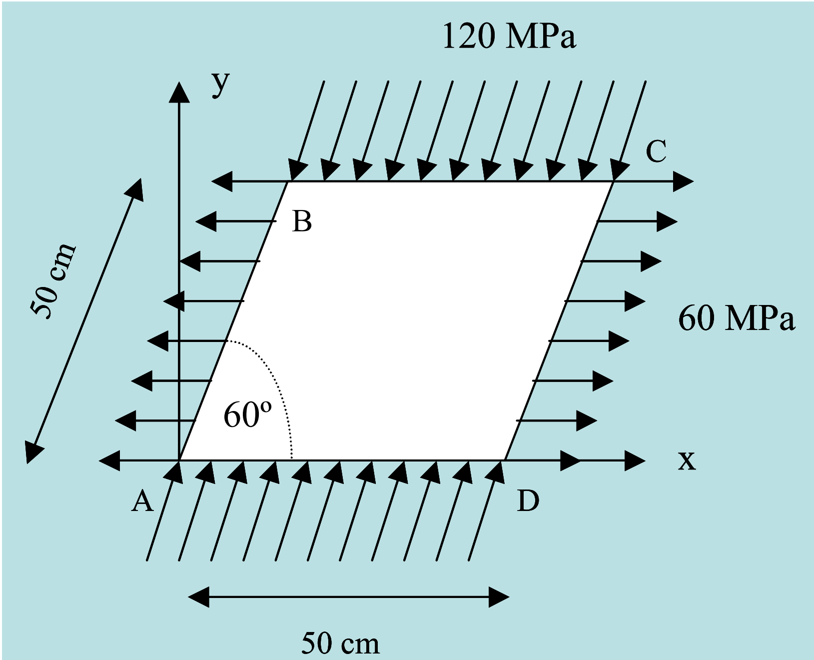
- Punto neutro

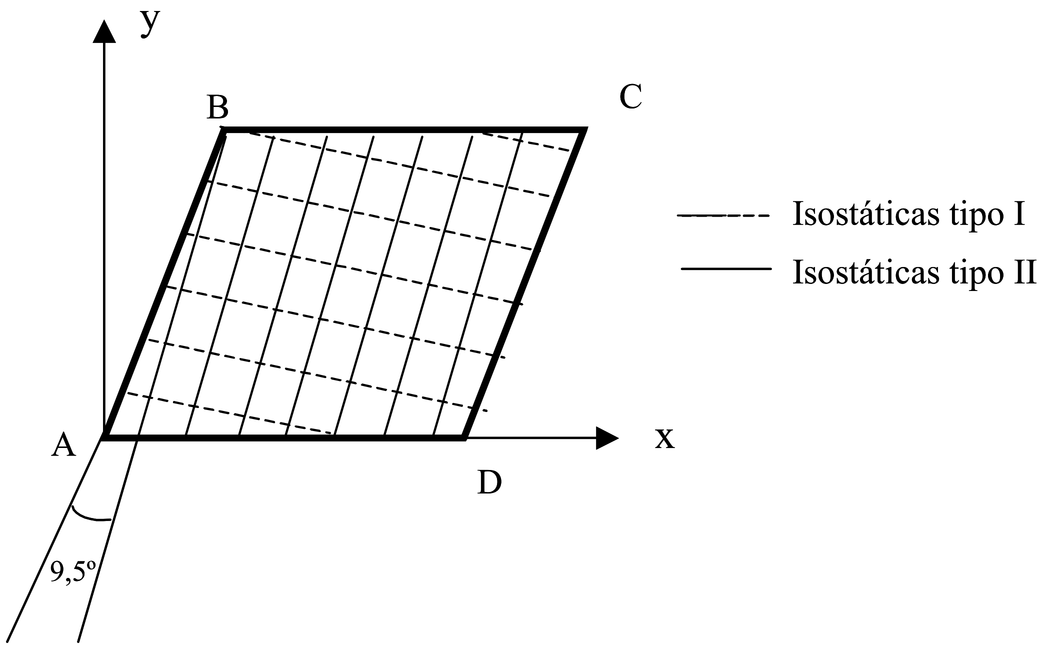
$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$$

En las proximidades de estos punto singulares, las isostáticas pueden tomar estas formas:



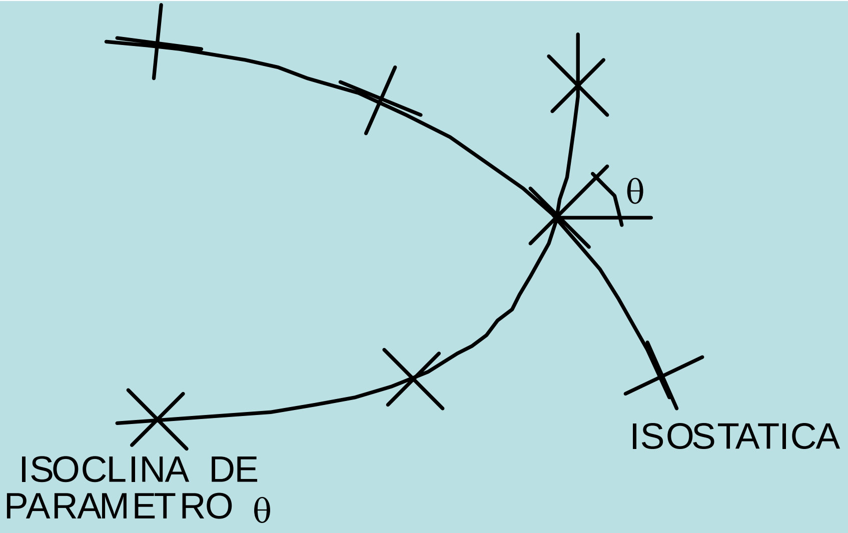
EJEMPLO:


120 MPa
y
C
B
50 cm
60 MPa
60º
x
A
D
50 cm


y
B
C
Isostáticas tipo I
Isostáticas tipo II
A
x
D
9,5º

ISOCLINAS: Lugar geométrico de los puntos en los que las tensiones principales son paralelas a una dirección prefijada, y que se denomina parámetro de la isoclina.

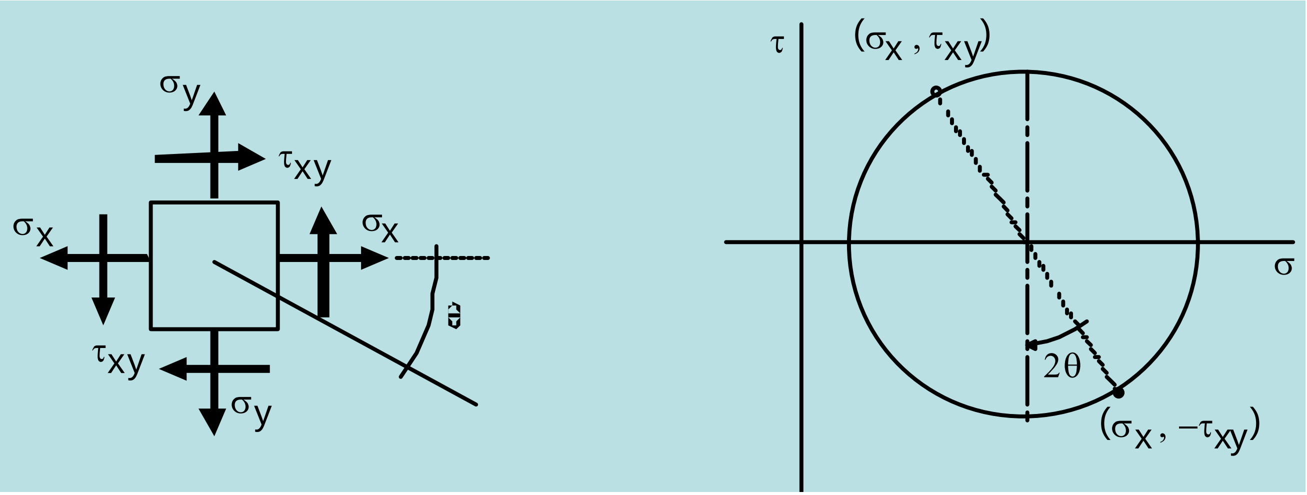
$$\mathrm{tg}\ 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \mathrm{cte}$$



Las propiedades de las isoclinas son las siguientes:

- Todas las isoclinas pasan por un punto isotrópo.
- Sólo puede pasar una isoclina por un punto que no sea isotrópo.
- Una isoclina de parámetro θ es idéntica a otra de parámetro $\theta \pm \frac{\pi}{2}$
- Si un sólido tiene un eje de simetría, y está simétricamente cargado respecto a dicho eje, el eje de simetría es una isoclina.
- En un borde sobre el que no actúan tensiones tangenciales, el parámetro de una isoclina que lo corta, coincide con el del ángulo de inclinación de la tangente al borde en el punto de corte.

CURVAS DE TENSION TANGENCIAL MAXIMA: envolventes de las direcciones en las que la tensión tangencial es máxima en cada uno de sus puntos.



$$\operatorname{tg} 2\theta = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} = \frac{2\operatorname{tg}\theta}{1 - \operatorname{tg}^2\theta} \quad ,, \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{\partial y}{\partial x}$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - \frac{4\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) - 1 = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \pm \sqrt{\left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right)^2 + 1}$$

↓

dos familias

ISOCROMÁTICAS: **aquellas curvas en las que la diferencia entre los valores de las tensiones principales toma un determinado valor:** $\sigma_1 - \sigma_2 = cte$

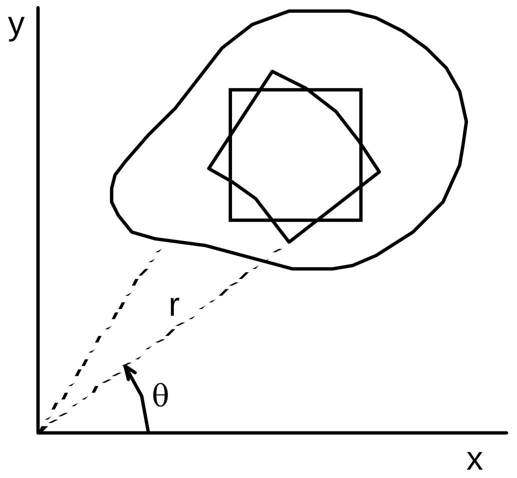
$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

ISOBARAS: **lugar geométrico de los puntos en los que:** $\sigma_1 = cte$ ó $\sigma_2 = cte$

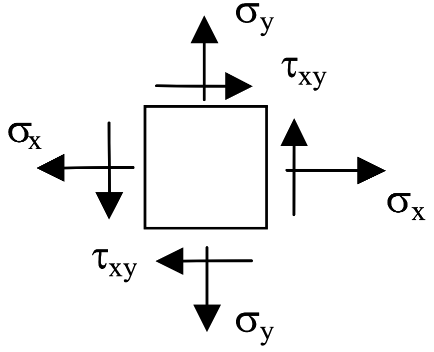
$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = cte$$

PROBLEMAS BIDIMENSIONALES EN COORDENADAS POLARES

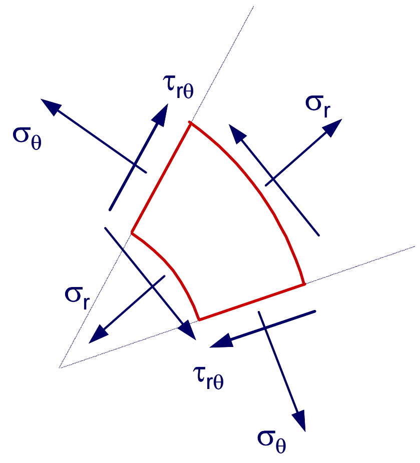
El punto elástico en coordenadas polares:



Coordenadas cartesianas



Coordenadas polares

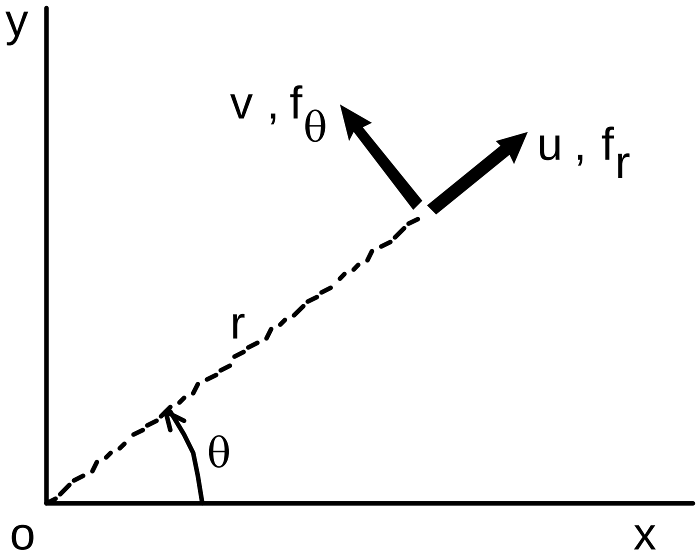


σ_r: tensión radial

σ_θ: tensión circunferencial

$\tau_{r\theta}$: tensión tangencial o cortante

DESPLAZAMIENTOS Y FUERZAS POR UNIDAD DE VOLUMEN:



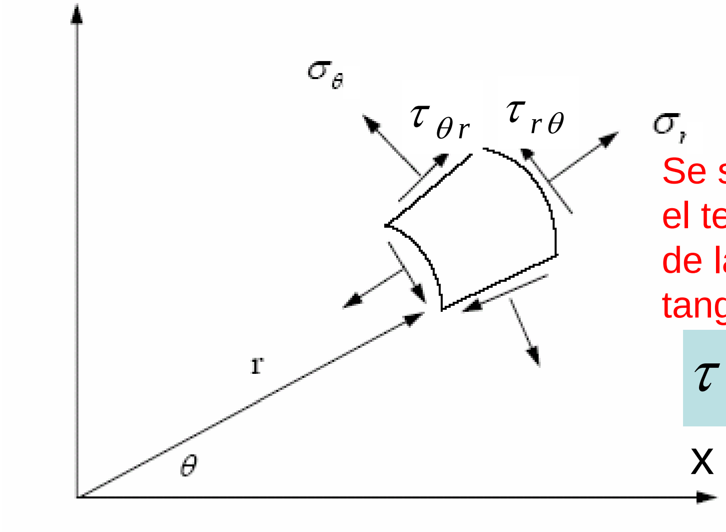
Campo de desplazamientos:

$$u = u\,(r,\theta)$$
$$v = v\,(r,\theta)$$

Fuerzas internas por unidad de volumen:

$$f_r = f_r\,(r,\theta)$$
$$f_q = f_q\,(r,\theta)$$

TENSIONES EN UN PUNTO ELASTICO



Se sigue verificando
el teorema de reciprocidad
de las tensiones
tangenciales:

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r}$$

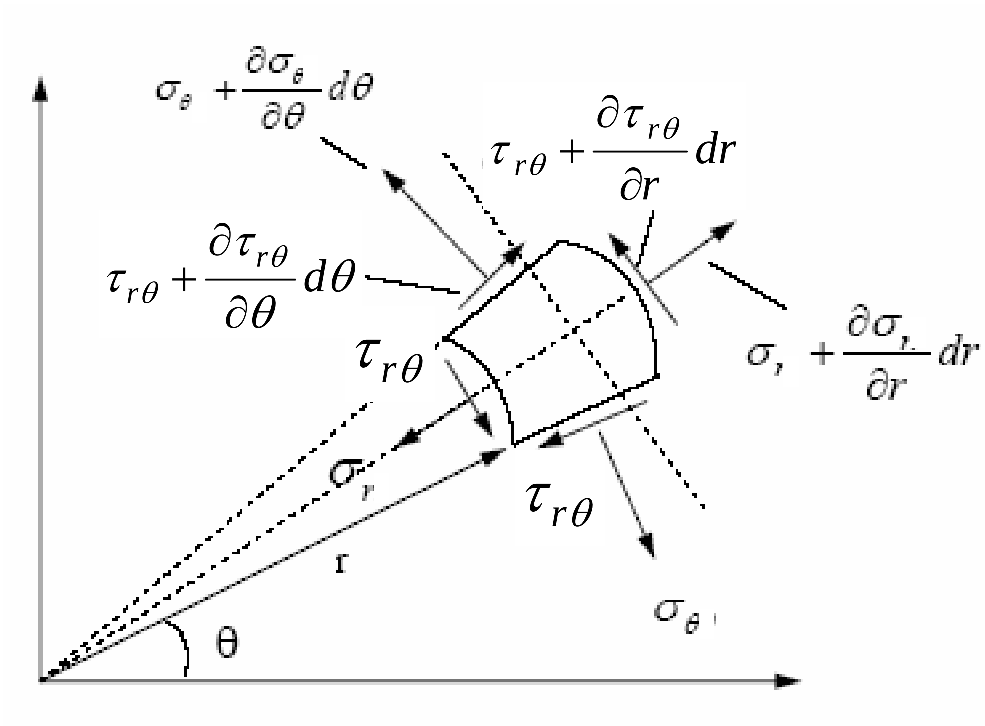
TENSOR DE TENSIONES

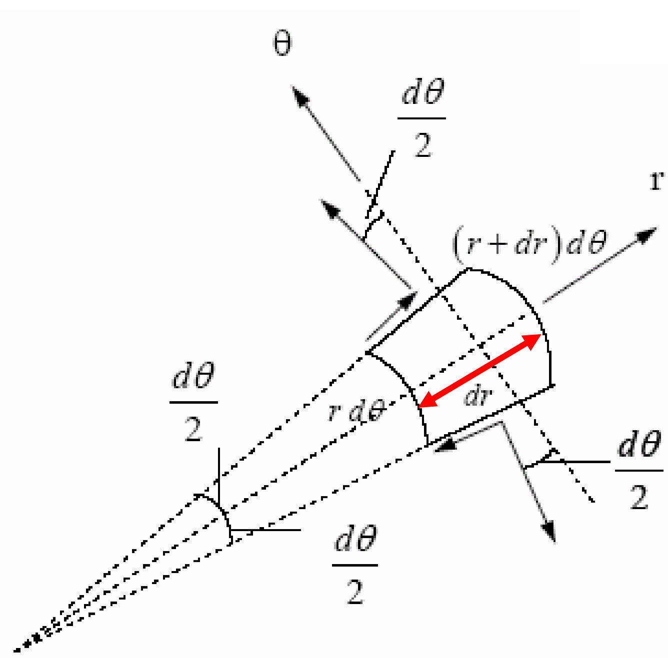
$$\begin{bmatrix} \sigma_r & \tau_{r\theta} & 0 \\ \tau_{r\theta} & \sigma_\theta & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Tensión plana: $\sigma_z = 0$

Deformación plana $\sigma_z \neq 0$

ECUACIONES DE EQUILIBRIO INTERNO:





Según r: $$-\sigma_r r d\theta + \left(\sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr\right)(r+dr)d\theta - \tau_{r\theta} dr - \left(\tau_{r\theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} d\theta\right)dr - 2\sigma_\theta dr \frac{d\theta}{2} + f_r r d\theta dr = 0$$

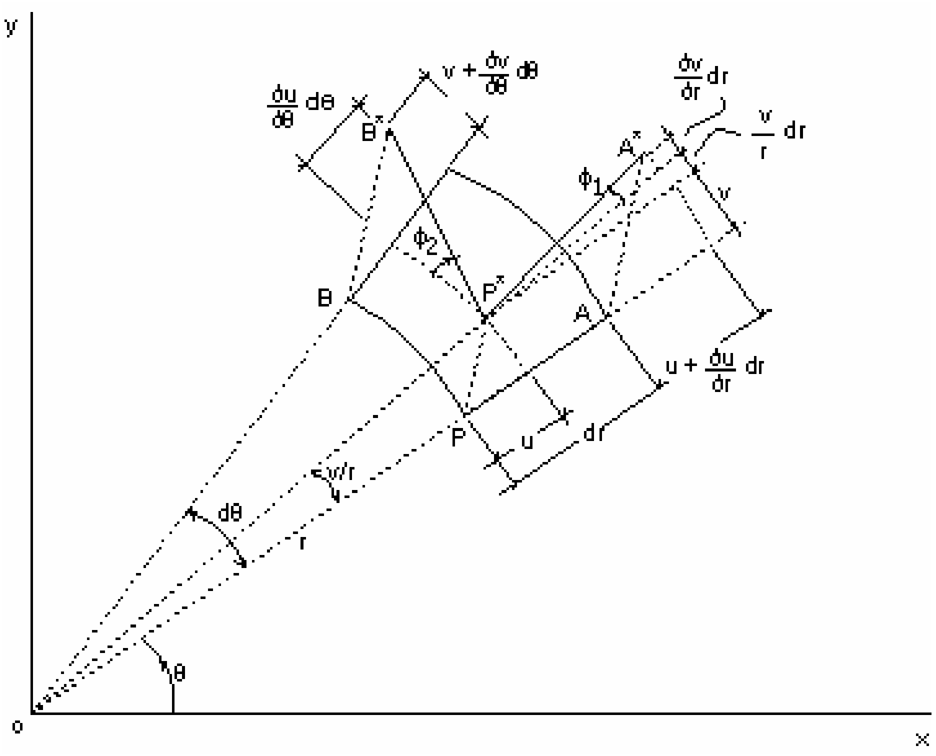
Según θ: $$-\sigma_\theta dr + \left(\sigma_\theta + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} d\theta\right)dr - \tau_{r\theta} r d\theta + \left(\tau_{r\theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} dr\right)(r+dr)d\theta + 2\tau_{r\theta} \frac{d\theta}{2} dr + f_\theta r d\theta dr = 0$$

ECUACIONES DE EQUILIBRIO INTERNO (Cont.):

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + f_r = 0$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + 2\frac{\tau_{r\theta}}{r} + f_\theta = 0$$

DEFORMACIONES:



$$\varepsilon_r = \frac{P^*A^* - PA}{PA} = \frac{\left(dr + u + \frac{\partial u}{\partial r}dr - u\right) - dr}{dr}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{P^*B^* - PB}{PB} = \frac{\left(v + \frac{\partial v}{\partial \theta}d\theta + rd\theta - v\right) - rd\theta}{rd\theta} + \frac{u}{r}$$

$$\gamma_{r\theta} = \Phi_1 + \Phi_2 = \frac{\frac{\partial v}{\partial r}dr - \frac{v}{r}dr}{dr} + \frac{\frac{\partial u}{\partial \theta}d\theta}{rd\theta}$$

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r}$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r}$$

ECUACIONES CONSTITUTIVAS:

$$\varepsilon_r = \frac{\sigma_r}{E} - \frac{\nu}{E} \cdot (\sigma_\theta + \sigma_z)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{\sigma_\theta}{E} - \frac{\nu}{E} \cdot (\sigma_r + \sigma_z)$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\tau_{r\theta}}{G}$$

$$\left.\begin{array}{l} \tau_{rz} = \tau_{\theta z} = 0 \\ \gamma_{rz} = \gamma_{\theta z} = 0 \end{array}\right\}$$

Tensión plana:

$$\sigma_z = 0$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_r + \sigma_\theta)$$

Deformación plana:

$$\sigma_z = \nu \cdot (\sigma_r + \sigma_\theta)$$

$$\varepsilon_z = 0$$

PLANTEAMIENTO DE UN PROBLEMA ELÁSTICO:

$$I_1^r = \sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z = cte$$

$$\left.\begin{array}{lll} D.P. & \rightarrow & \sigma_Z = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta) \\ T.P. & \rightarrow & \sigma_Z = 0 \end{array}\right\} \sigma_r + \sigma_\theta = cte$$

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_r + \sigma_\theta$$

$$\Delta(\sigma_x + \sigma_y) = \Delta(\sigma_r + \sigma_\theta)$$

DEFORMACIÓN PLANA:

$$\Delta(\sigma_r + \sigma_\theta) = -\frac{1}{1-\nu}\, div\, \vec{f}_v$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

$$div\, \vec{f}_v = \frac{\partial f_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f_\theta}{\partial \theta} + \frac{f_r}{r}$$

$$\Delta(\sigma_r + \sigma_\theta) = 0$$

$f_r = 0$
$f_\theta = cte.$

TENSIÓN PLANA:

$$\Delta(\sigma_r + \sigma_\theta) = -(1+\nu)\, div\, \vec{fv}$$

$$\Delta(\sigma_r + \sigma_\theta) = 0$$

FUNCIÓN DE TENSIÓN O DE AIRY

$$\phi = \phi(r,\theta)$$

$$\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2\phi}{\partial r\partial\theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\ \frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)$$

$$\Delta^2\phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}\right) = 0$$

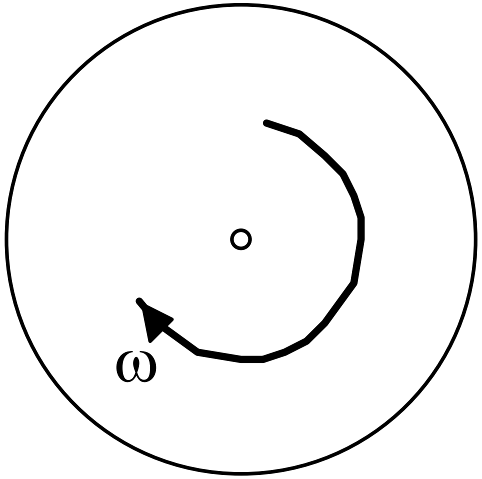
EXPRESIÓN GENERAL DE LA FUNCIÓN DE TENSIÓN O DE AIRY:

$$\phi = a_0 \ln r + b_0 r^2 + c_0 r^2 \ln r + d_0 r^2 \theta + e_0 \theta + \frac{a_1}{2} r\theta \operatorname{sen}\theta + \left(b_1 r^3 + c_1 \frac{1}{r} + d_1 r \ln r \right) \cos\theta -$$

$$- \frac{c_1}{2} r\theta \cos\theta + \left(e_1 r^3 + f_1 \frac{1}{r} + g_1 r \ln r \right) \operatorname{sen}\theta + \sum_{n=2}^{\infty} \left[a_n r^n + b_n r^{n+2} + c_n \frac{1}{r^n} + d_n \frac{1}{r^{n-2}} \right] \cos n\theta +$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \left[e_n r^n + f_n r^{n+2} + g_n \frac{1}{r^n} + h_n \frac{1}{r^{n-2}} \right] \operatorname{sen} n\theta$$

DISCO GIRATORIO



$$f_r = \rho \omega^2 r$$

Ecuación de equilibrio interno:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + fr = 0$$

$$\frac{d}{dr}\left(r \cdot \sigma_r\right) - \sigma_\theta + \rho \cdot \omega^2 \cdot r^2 = 0$$

$$\sigma_r = C + C_1 \frac{1}{r^2} - \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 r^2$$

$$\sigma_\theta = C - C_1 \frac{1}{r^2} - \frac{1+3\nu}{8} \rho \omega^2 r^2$$

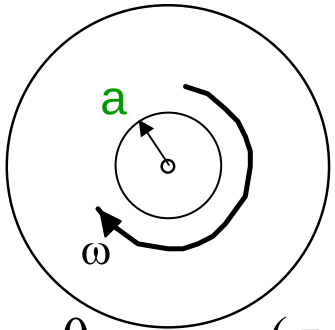
DISCO MACIZO SIN TENSIONES SOBRE SU CONTORNO

$$\sigma_r = \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2(R^2 - r^2)$$

$$\sigma_\theta = \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2R^2 - \frac{1+3\nu}{8}\rho\omega^2 r^2$$

$$r = 0, \quad (\sigma_r)_{max} = (\sigma_\theta)_{max} = \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2R^2$$

DISCO CON UN AGUJERO DE RADIO “a”



$$(\sigma_r)_{r=a} = 0 \qquad (\sigma_r)_{r=R} = 0$$

$$\sigma_r = \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2\left(R^2 + a^2 - \frac{a^2R^2}{r^2} - r^2\right)$$

$$\sigma_\theta = \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2\left(R^2 + a^2 - \frac{a^2R^2}{r^2} - \frac{1+3\nu}{3+\nu}r^2\right)$$

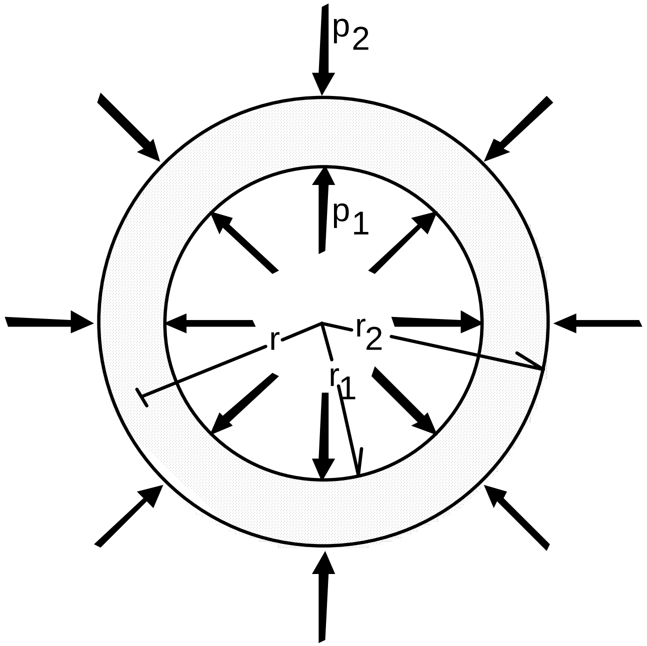
$$(\sigma_r)_{max} \rightarrow r = \sqrt{aR} \qquad (\sigma_r)_{max} = \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2(R-a)^2$$

$$(\sigma_\theta)_{max} \rightarrow r = a \qquad (\sigma_\theta)_{max} = \frac{3+\nu}{4}\rho\omega^2\left(b^2 + \frac{1-\nu}{3+\nu}a^2\right)$$

$$(\sigma_\theta)_{max} > (\sigma_r)_{max}$$

$$\text{Si} \quad a \rightarrow 0 \qquad (\sigma_\theta)_{max} \rightarrow 2(\sigma_\theta)_{max}^{\text{disco macizo}}$$

TUBO CIRCULAR SOMETIDO A PRESION



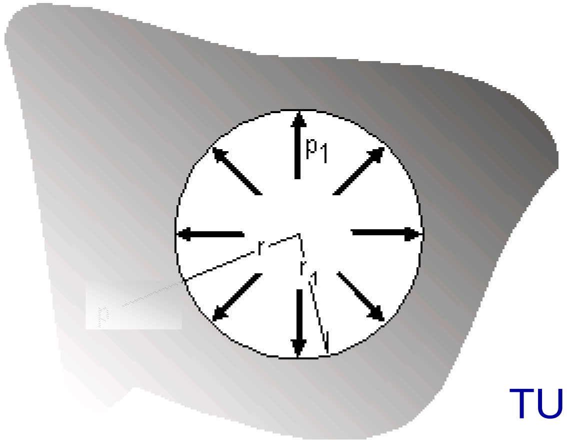
$$\phi = \phi(r) = A \ln r + B\, r^2 \ln r + C\, r^2 + D$$

$$\sigma_r = \frac{1}{r_2^2 - r_1^2}\left[r_1^2 p_1 - r_2^2 p_2 + \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2}(p_2 - p_1) \right]$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{r_2^2 - r_1^2}\left[r_1^2 p_1 - r_2^2 p_2 - \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2}(p_2 - p_1) \right]$$

$$\tau_{r\theta} = 0$$

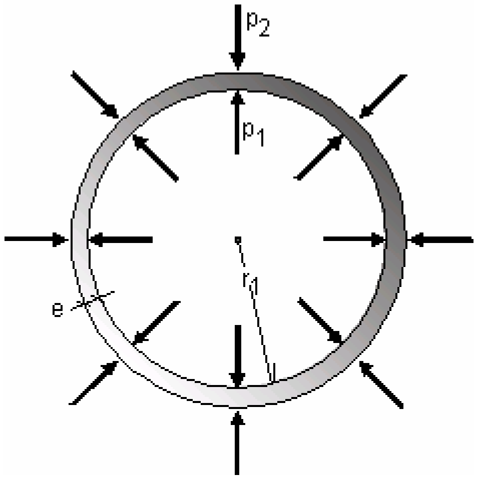
AGUJERO EN MACIZO INDEFINIDO



$$r_2 = \infty \qquad\qquad p_2 = 0$$

$$\sigma_r = -\sigma_\theta = -\frac{r_1^2}{r^2}\, p_1$$

TUDO DE PARED DELGADA



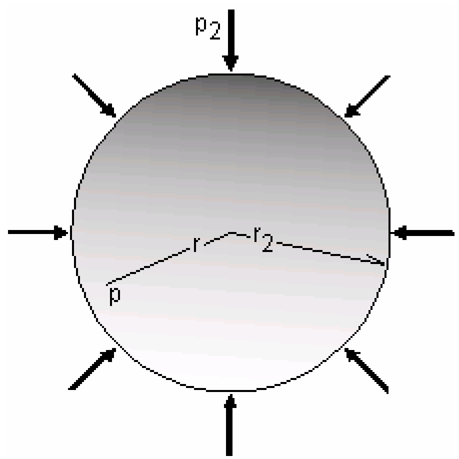
$$r_1^2 \cong r_2^2 \cong r^2$$

$$r_2^2 - r_1^2 = (r_2 - r_1)\cdot(r_2 + r_1) = 2\,r\,e$$

$$\sigma_\theta = (p_1 - p_2)\cdot \frac{r}{e}$$

$$\sigma_r = \tau_{r\theta} = 0$$

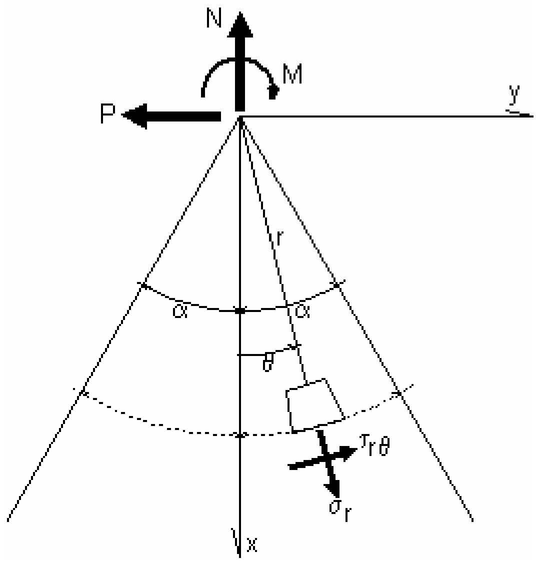
RODILLO



$$r_1 = 0 \qquad\qquad p_1 = 0$$

$$\sigma_r = -\sigma_\theta = -p_2 \quad \text{(estado equitensional)}$$

CUÑA CON CARGA EN LA PUNTA



FUNCIÓN DE AIRY:

$$\phi = \phi_N + \phi_P + \phi_M$$

$$\phi_N = A\, r\, \theta\, \mathrm{sen}\theta$$

$$\phi_P = B\, r\, \theta\, \cos\theta$$

$$\phi_M = C\left(\frac{1}{2}\ \mathrm{sen}2\theta - \theta\ \cos 2\alpha\right)$$

CONDICIONES DE CONTORNO:

$$\theta = \pm\alpha \qquad \tau_{r\theta} = 0 \qquad \sigma_\theta = 0$$

CAMPO TENSIONAL:

$$\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} = 2A\frac{\cos\theta}{r} - 2B\frac{\mathrm{sen}\theta}{r} - 2C\frac{\mathrm{sen}2\theta}{r^2}$$

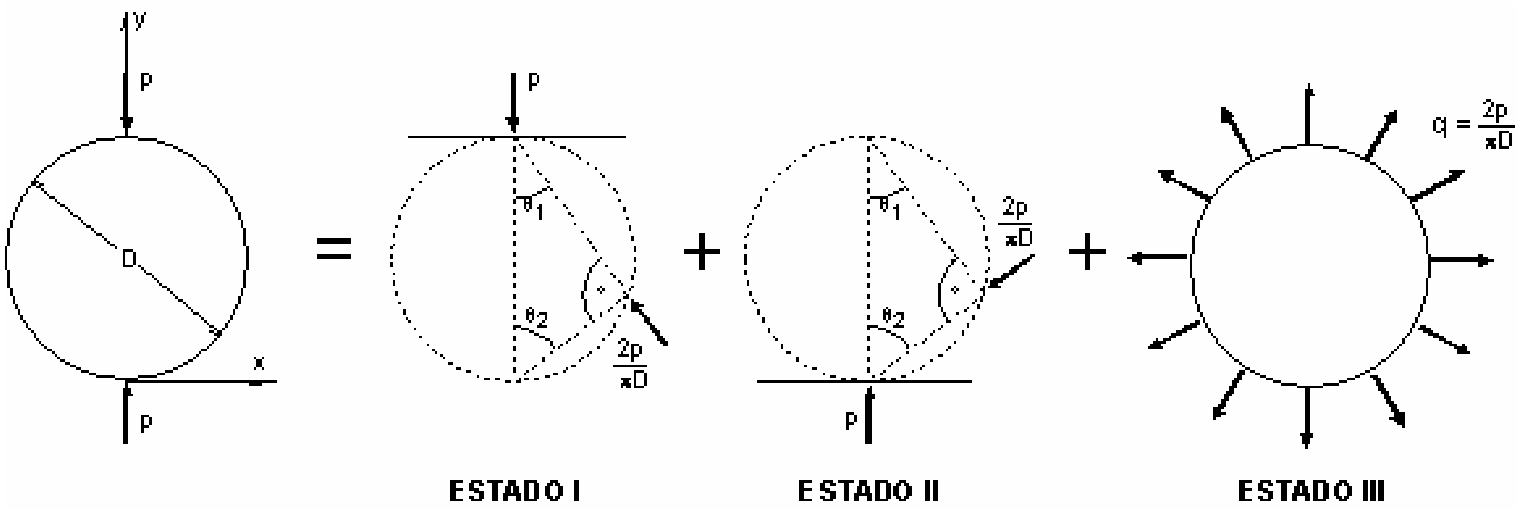
$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} = 0$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) = \frac{c}{r^2}(\cos 2\theta - \cos 2\alpha)$$

$$\left.\begin{aligned} N &= \int_{-\alpha}^{\alpha} (\sigma_r \cos\theta - \tau_{r\theta}\ \mathrm{sen}\theta)\ r\ d\theta \\ P &= \int_{-\alpha}^{\alpha} (\sigma_r \mathrm{sen}\theta - \tau_{r\theta}\ \cos\theta)\ r\ d\theta \\ M &= \int_{-\alpha}^{\alpha} \tau_{r\theta}\ r^2\ d\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} A &= \frac{N}{2\alpha + \mathrm{sen}2\alpha} \\ B &= \frac{-P}{2\alpha - \mathrm{sen}2\alpha} \\ C &= \frac{M}{\mathrm{sen}2\alpha - 2\alpha\ \cos 2\alpha} \end{aligned}$$

CILINDRO SOMETIDO A DOS CARGAS A LO LARGO DE GENERATRICES OPUESTAS (PROBLEMA DE HERTZ)

Heinrich Rudolf HERTZ (1857-1894)

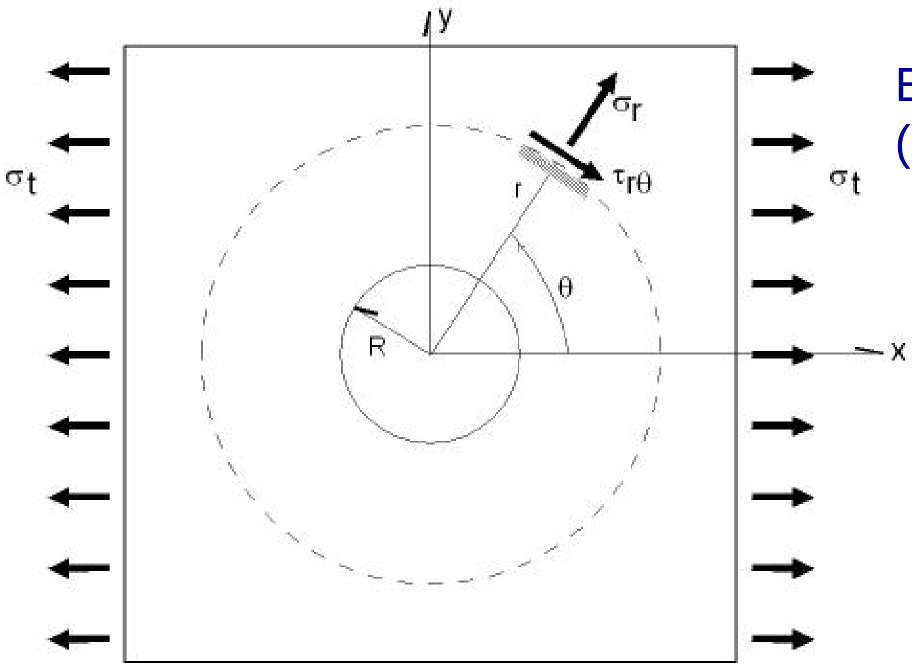


$$\sigma_x = -\frac{2P}{\pi}\left[\frac{\cos\theta_1 \operatorname{sen}^2\theta_1}{r_1} + \frac{\cos\theta_2 \operatorname{sen}^2\theta_2}{r_2} - \frac{1}{D}\right]$$

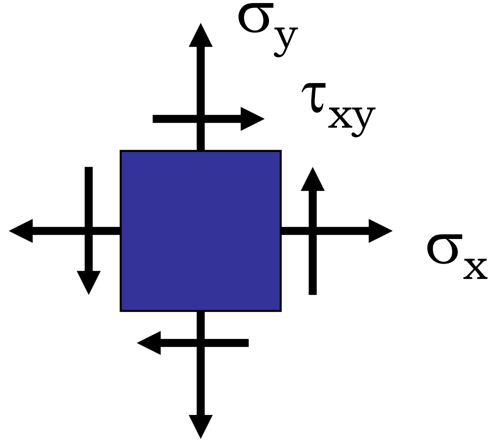
$$\sigma_y = -\frac{2P}{\pi}\left[\frac{\cos^3\theta_1}{r_1} + \frac{\cos^3\theta_2}{r_2} - \frac{1}{D}\right]$$

$$\tau_{xy} = -\frac{2P}{\pi}\left[\frac{\cos^2\theta_2 \operatorname{sen}\theta_2}{r_2} + \frac{\cos^2\theta_1 \operatorname{sen}\theta_1}{r_1}\right]$$

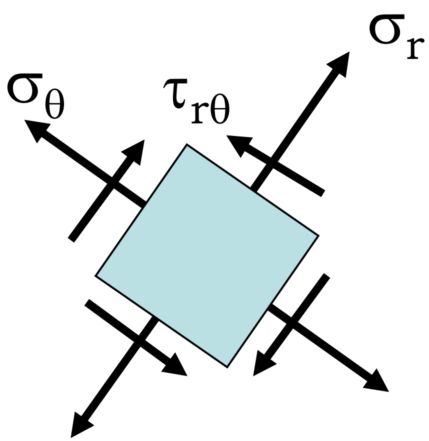
PLACA INDEFINIDA CON UN TALADRO CIRCULAR

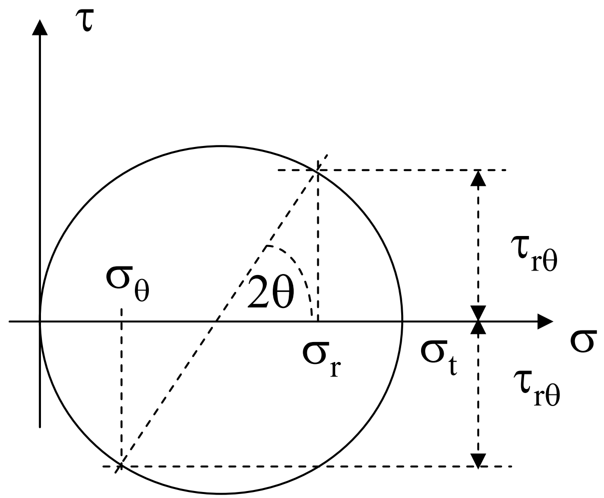


En puntos muy alejados del agujero (Principio de Saint-Venant):



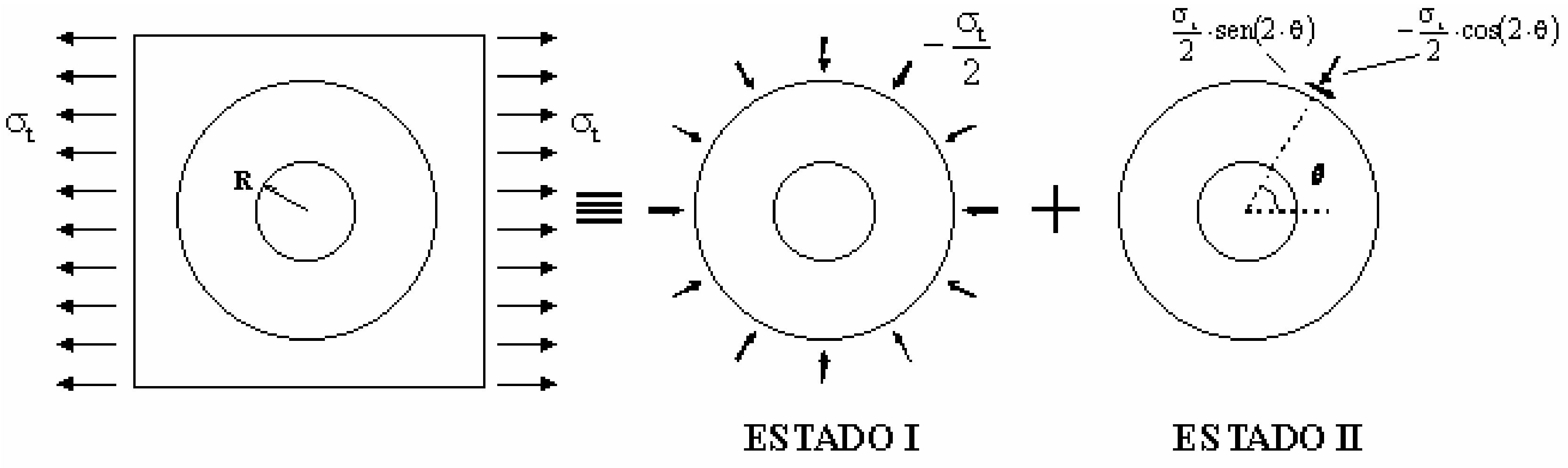
$$\sigma_x = \sigma_t \qquad \sigma_y = 0 \qquad \tau_{xy} = 0$$





$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\sigma_t}{2} + \frac{\sigma_t}{2}\cos 2\theta \\ \sigma_\theta &= \frac{\sigma_t}{2} - \frac{\sigma_t}{2}\cos 2\theta \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{\sigma_t}{2}\operatorname{sen} 2\theta \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\boxed{\sigma_r = \frac{\sigma_t}{2} + \frac{\sigma_t}{2}\cos 2\theta} \\
&\sigma_\theta = \frac{\sigma_t}{2} - \frac{\sigma_t}{2}\cos 2\theta \\
&\boxed{\tau_{r\theta} = -\frac{\sigma_t}{2}\operatorname{sen} 2\theta}
\end{aligned}\right\}$$

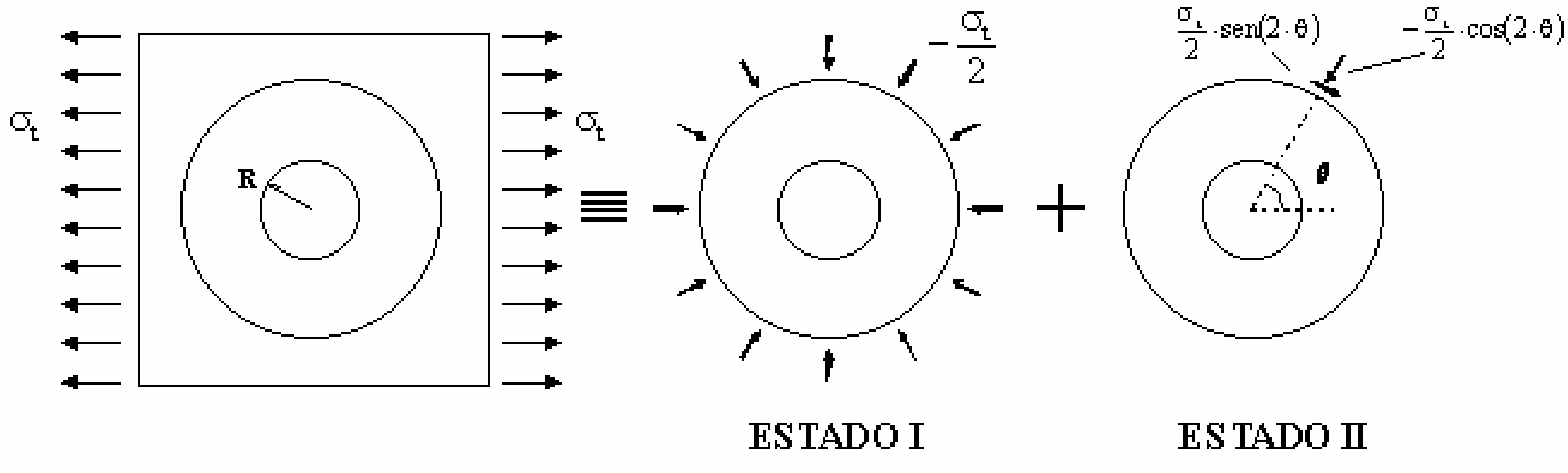


Del Estado I (tubo sometido a presiones) conocemos su solución:

$$\sigma_r^I = \frac{\sigma_t}{2}\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)$$

$$\sigma_\theta^I = \frac{\sigma_t}{2}\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right)$$

$$\tau_{r\theta}^I = 0$$



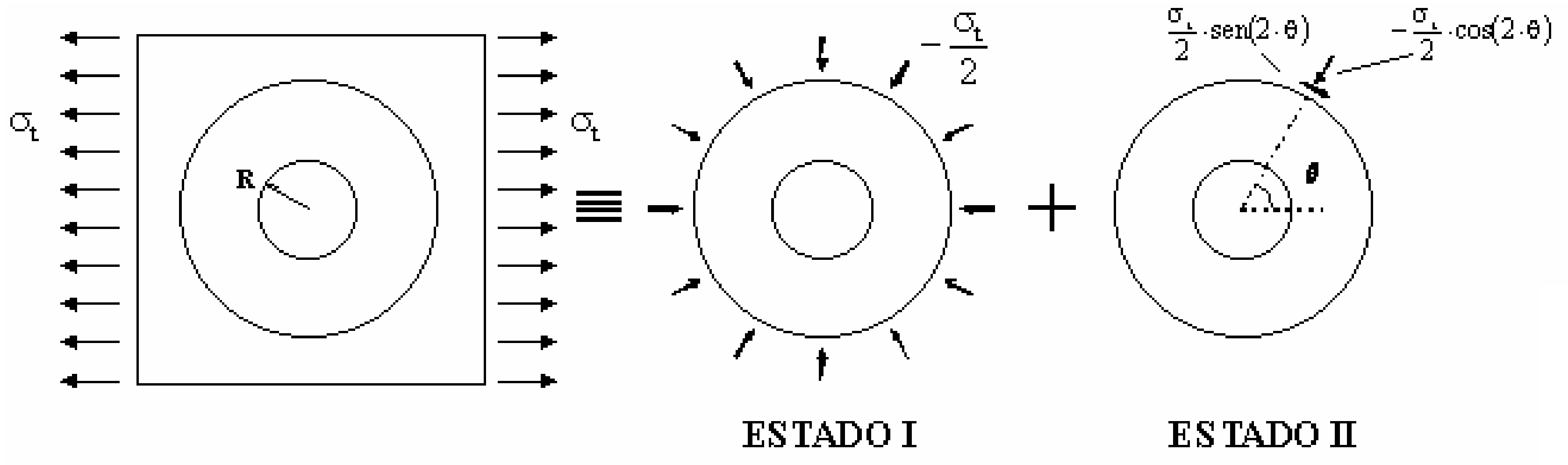
La solución Estado II es algo más complicada. La función de Airy de este problema se conoce y de ella pueden obtenerse las tensiones:

$$\phi = \left(Ar^2 + Br^4 + \frac{C}{r^2} + D \right) \cos 2\theta$$

$$\sigma_r^{II} = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} = -\left(2A + \frac{6C}{r^4} + \frac{4D}{r^2} \right) \cos 2\theta$$

$$\sigma_\theta^{II} = \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} = \left(2A + 12Br^2 + \frac{6C}{r^4} \right) \cos 2\theta$$

$$\tau_{r\theta}^{II} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} \right) = \left(2A + 6Br^2 - \frac{6C}{r^4} - \frac{2D}{\rho^2} \right) \mathrm{sen}\, 2\theta$$



$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_r^{I} + \sigma_r^{II} \\ \sigma_\theta &= \sigma_\theta^{I} + \sigma_\theta^{II} \\ \tau_{r\theta} &= \tau_{r\theta}^{I} + \tau_{r\theta}^{II} \end{aligned}\right\}$$

$$\sigma_r^{I} = \frac{\sigma_t}{2}\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)$$

$$\sigma_\theta^{I} = \frac{\sigma_t}{2}\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right)$$

$$\tau_{r\theta}^{I} = 0$$

$$\sigma_r^{II} = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} = -\left(2A + \frac{6C}{r^4} + \frac{4D}{r^2}\right)\cos 2\theta$$

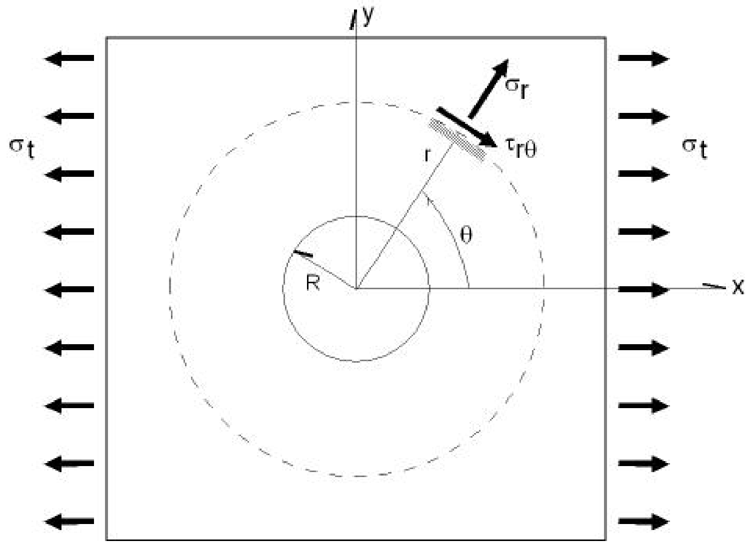
$$\sigma_\theta^{II} = \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} = \left(2A + 12Br^2 + \frac{6C}{r^4}\right)\cos 2\theta$$

$$\tau_{r\theta}^{II} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) = \left(2A + 6Br^2 - \frac{6C}{r^4} - \frac{2D}{\rho^2}\right)\mathrm{sen}\,2\theta$$

Las constantes A, B, C y D se determinan imponiendo las siguientes condiciones de contorno:

$$r = R \qquad \sigma_r = 0 \qquad \tau_{r\theta} = 0$$

$$r = \infty \qquad \sigma_r = \sigma_t \qquad \tau_{r\theta} = 0$$



$$\sigma_r = \frac{\sigma_t}{2}\cdot\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)+\frac{\sigma_t}{2}\cdot\left(1+3\cdot\frac{R^4}{r^4}-4\cdot\frac{R^2}{r^2}\right)\cdot\cos(2\cdot\theta)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_t}{2}\cdot\left(1+\frac{R^2}{r^2}\right)-\frac{\sigma_t}{2}\cdot\left(1+3\cdot\frac{R^4}{r^4}\right)\cdot\cos(2\cdot\theta)$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\sigma_t}{2}\cdot\left(1-3\cdot\frac{R^4}{r^4}+2\cdot\frac{R^2}{r^2}\right)\cdot\mathrm{sen}(2\cdot\theta)$$

Para r=R:

$$\sigma_r = 0$$

$$\sigma_\theta = \sigma_t - 2\sigma_t\cos 2\theta$$

$$\tau_{r\theta} = 0$$

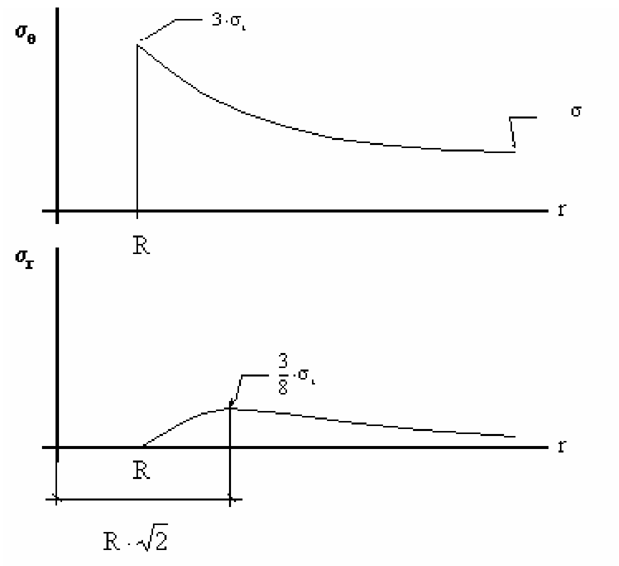
$$(\sigma_\theta)_{max} = 3\sigma_t \qquad \text{cuando} \qquad \theta = \frac{\pi}{2}$$

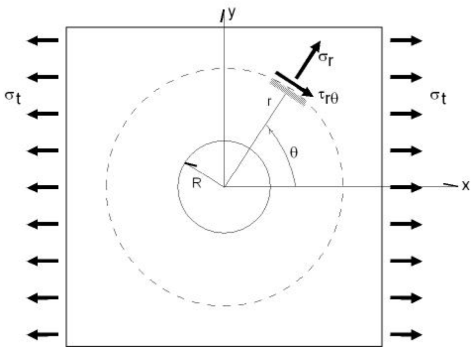
Para $\theta = \dfrac{\pi}{2}$:

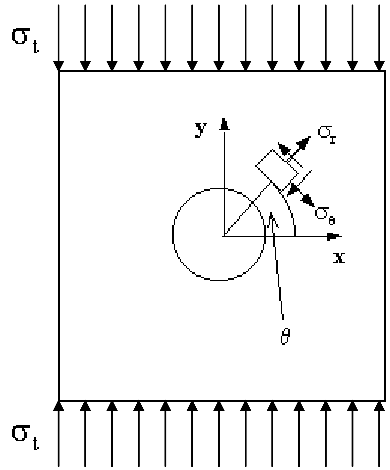
$$\sigma_r = \frac{3\sigma_t}{2}\left(\frac{R^2}{r^2}-\frac{R^4}{r^4}\right)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_t}{2}\left(2+\frac{R^2}{r^2}+3\frac{R^4}{r^4}\right)$$

$$\tau_{r\theta} = 0$$







$$\sigma_r = \frac{\sigma_t}{2}\cdot\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)+\frac{\sigma_t}{2}\cdot\left(1+3\cdot\frac{R^4}{r^4}-4\cdot\frac{R^2}{r^2}\right)\cdot\cos(2\cdot\theta)$$

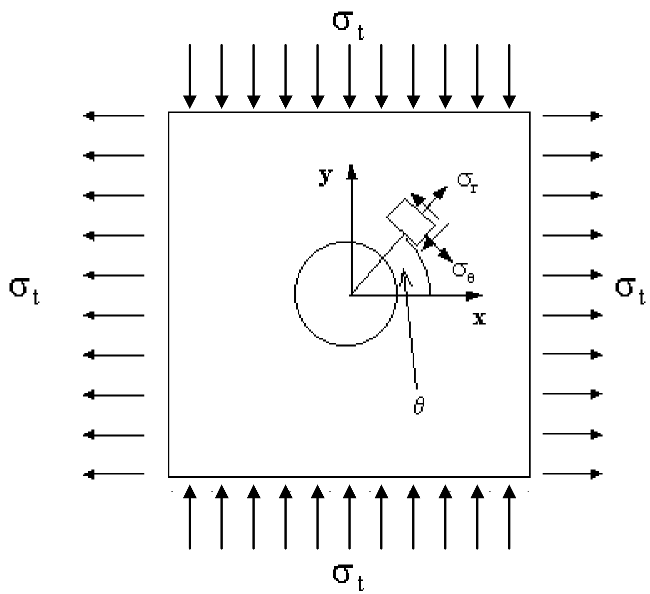
$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_t}{2}\cdot\left(1+\frac{R^2}{r^2}\right)-\frac{\sigma_t}{2}\cdot\left(1+3\cdot\frac{R^4}{r^4}\right)\cdot\cos(2\cdot\theta)$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\sigma_t}{2}\cdot\left(1-3\cdot\frac{R^4}{r^4}+2\cdot\frac{R^2}{r^2}\right)\cdot \mathrm{sen}(2\cdot\theta)$$

$$\sigma_r = \frac{\sigma_t}{2}\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)+\frac{\sigma_t}{2}\left(1+3\frac{R^4}{r^4}-4\frac{R^2}{r^2}\right)\cos 2\theta$$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_t}{2}\left(1+\frac{R^2}{r^2}\right)-\frac{\sigma_t}{2}\left(1+3\frac{R^4}{r^4}\right)\cos 2\theta$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\sigma_t}{2}\left(1-3\frac{R^4}{r^4}+2\frac{R^2}{r^2}\right)\mathrm{sen}2\theta$$

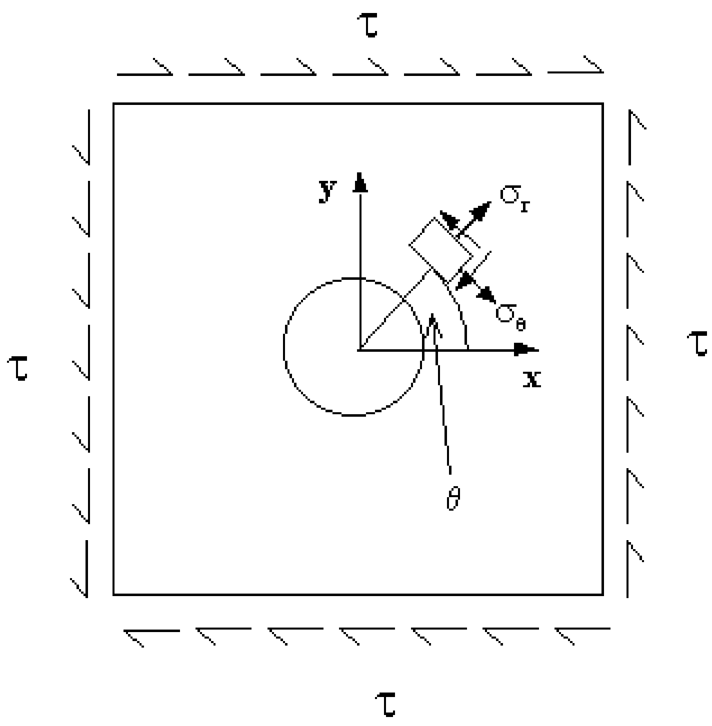


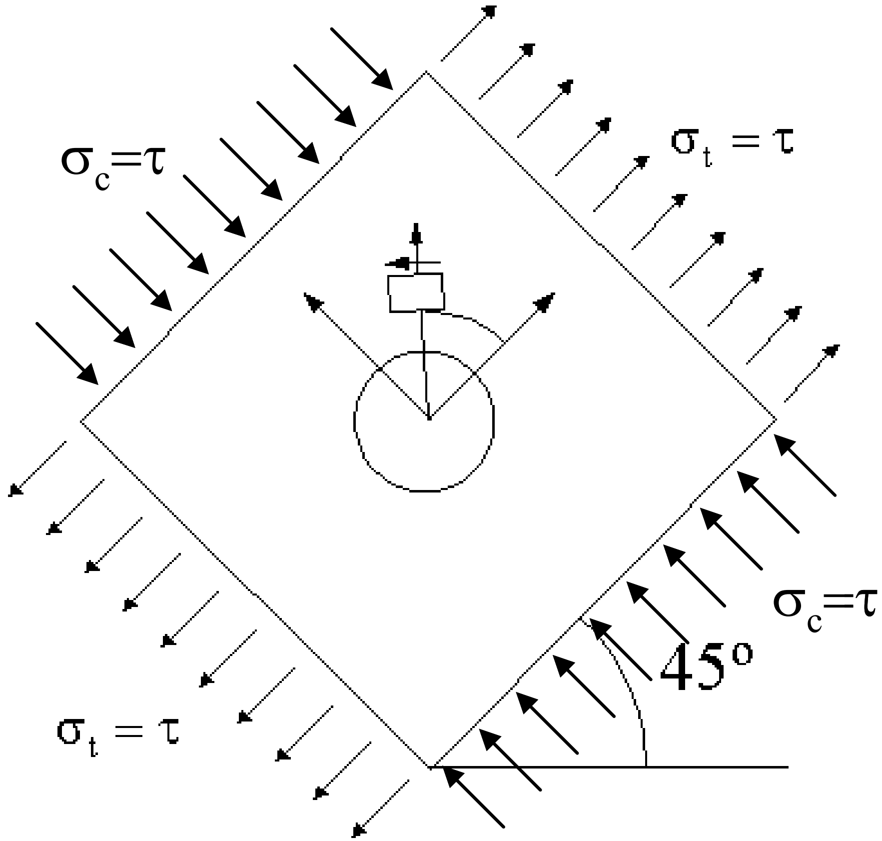
$$\sigma_r = \sigma_t\left(1+3\frac{R^4}{r^4}-4\frac{R^2}{r^2}\right)\cos 2\theta$$

$$\sigma_\theta = -\sigma_t\left(1+3\frac{R^4}{r^4}\right)\cos 2\theta$$

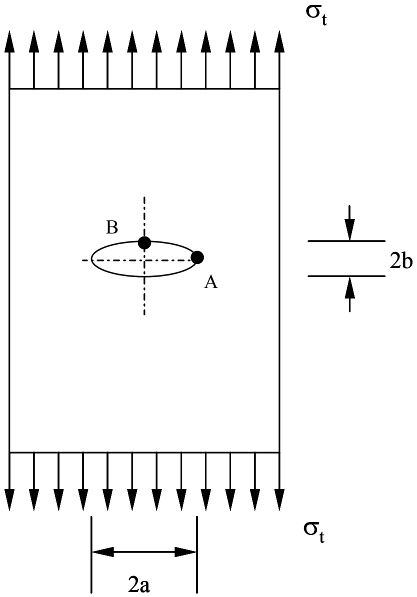
$$\tau_{r\theta} = -\sigma_t\left(1-3\frac{R^4}{r^4}+2\frac{R^2}{r^2}\right)\mathrm{sen}2\theta$$

PLACA INDEFINIDA CON UN TALADRO SOMETIDA A TENSIONES CORTANTE EN SU CONTORNO:





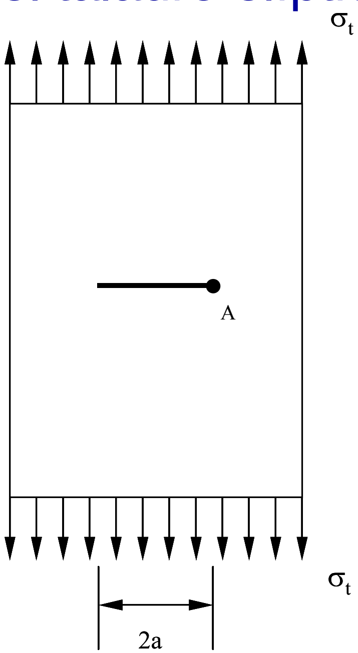
PLACA PLANA INDEFINIDA CON UN TALADRO ELÍPTICO



$$(\sigma_\theta)_A = \sigma_t \left(1 + 2\frac{a}{b}\right)$$

$$(\sigma_\theta)_B = -\sigma_t$$

Si b ⟶ 0 (el taladro elíptico se convierte en una fisura):



$$(\sigma_\theta)_A \to \infty$$