CAPÍTULO 6

TEOREMAS ENERGÉTICOS

LA ENERGÍA ELÁSTICA EXPRESADA EN FUNCIÓN DE LAS CARGAS APLICADAS

Hasta ahora, habíamos utilizado la siguiente expresión de la densidad de energía elástica:

$$\omega = \frac{1}{2}\left(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{xz}\gamma_{xz}\right)$$

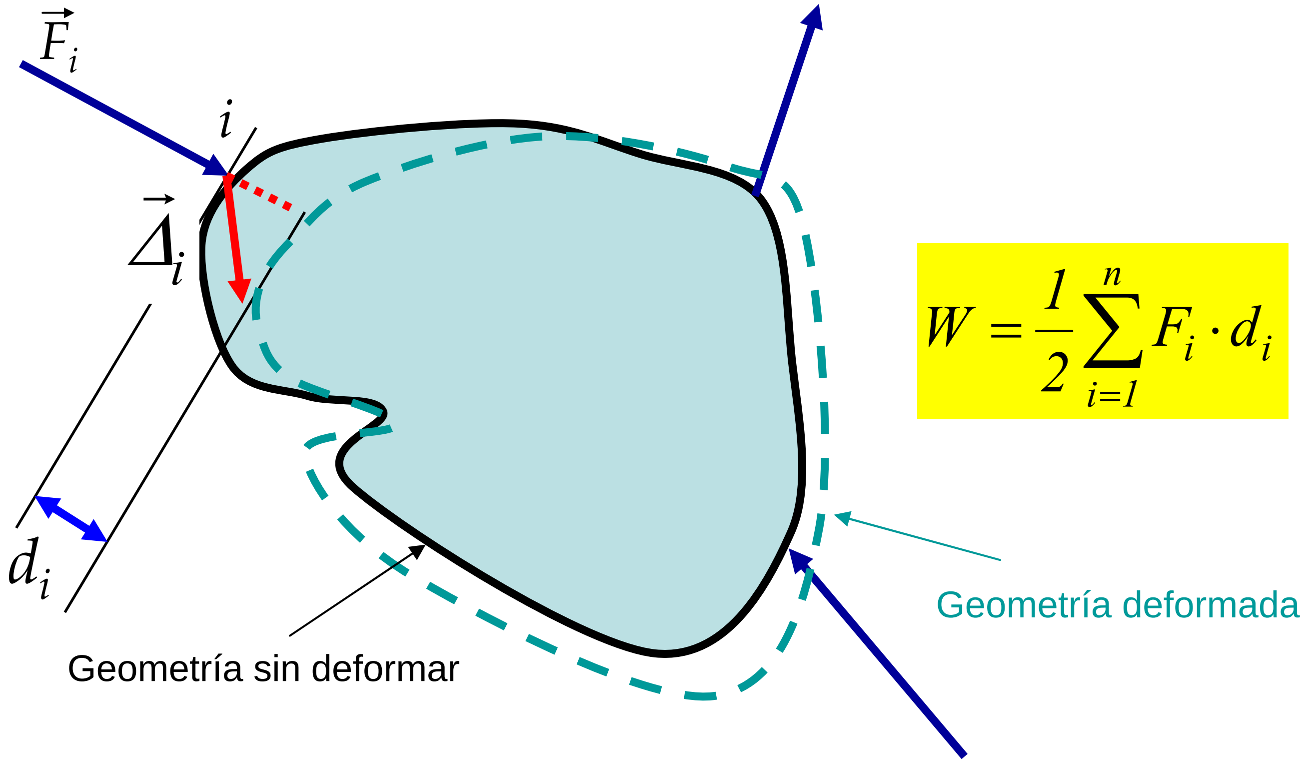
Que, integrada a lo largo de todo el sólido, nos proporcionaba la energía elástica almacenada por éste.

¿Podríamos expresar dicha energía en función de las cargas aplicadas al sólido o en función de los desplazamientos que en él se producen?

Supongamos que las cargas aplicadas al sólido crecen, progresivamente, desde cero hasta su valor final de una manera continua. En ese caso, el trabajo W realizado por todas las cargas que actúan sobre el sólido quedaría almacenado como energía elástica de deformación U en el sólido y, por tanto:

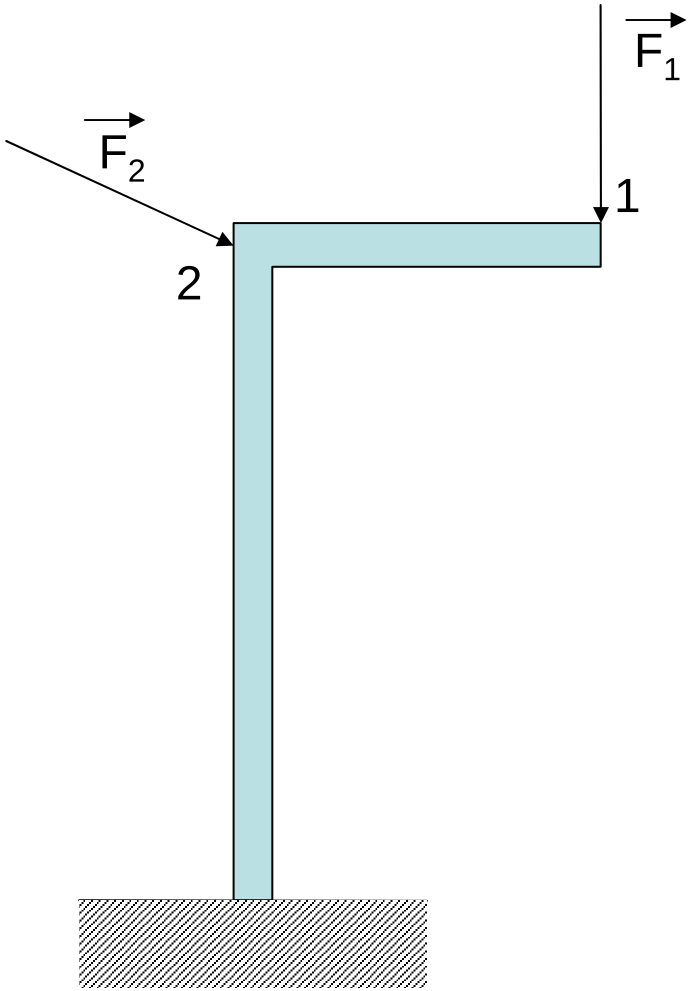
$$\boxed{U = W}$$

El trabajo realizado por las cargas exteriores aplicadas a un sólido es la mitad de la suma del producto de dichas cargas por los desplazamientos de sus puntos de aplicación (en las dirección de las mismas, por supuesto).

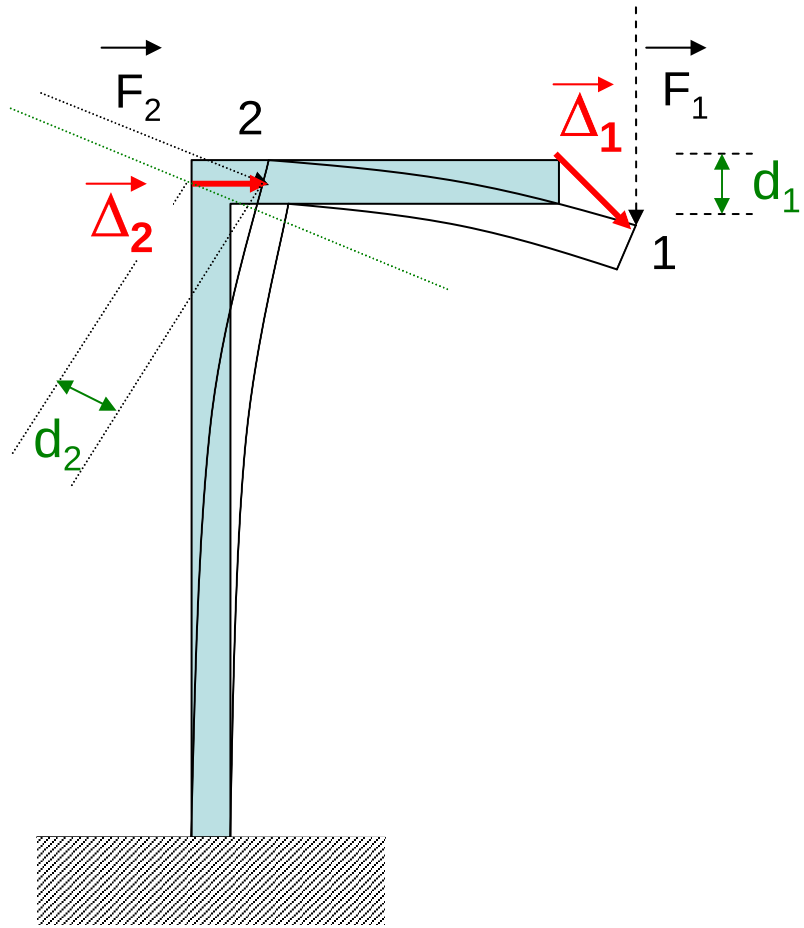


$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} F_i \cdot d_i$$

Si entre las cargas aplicadas existiera algún momento, bastaría con tener en cuenta que:
- donde se dijera fuerza se debería decir momento
- donde se dijera desplazamiento se debería decir giro
- donde se expresara trabajo (*W=Fd,* en el caso de fuerzas) se debería escribir *W=M*θ.

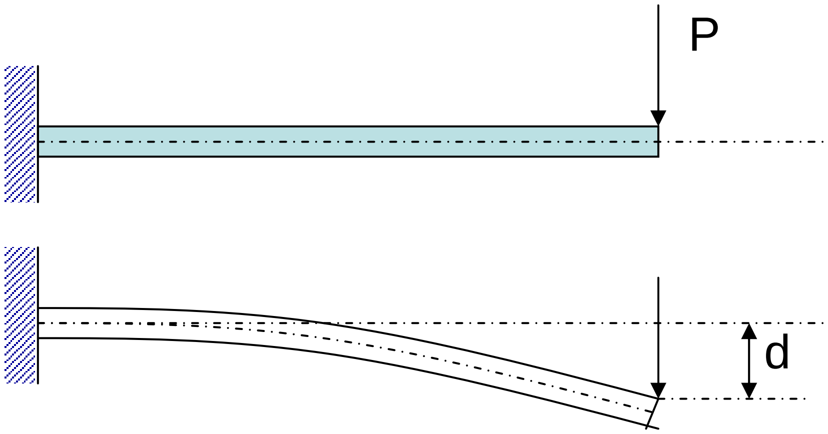


$\vec{F_1}$
1
$\vec{F_2}$
2

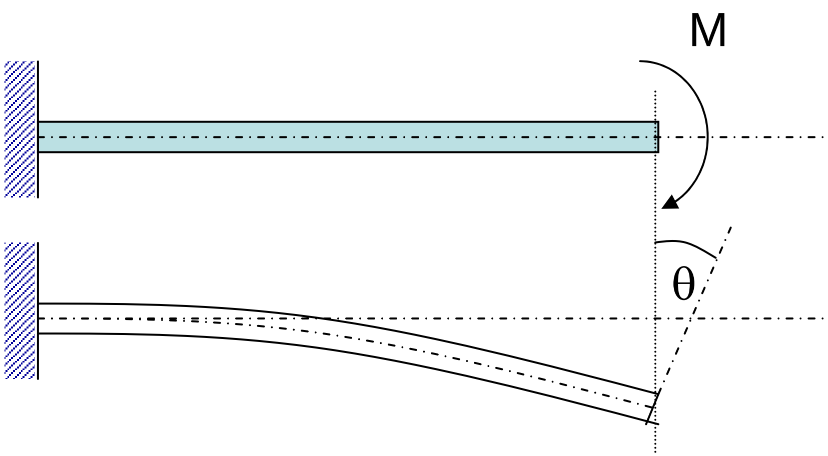


$\vec{F_2}$
2
$\vec{\Delta_1}$
$\vec{F_1}$
d_1
$\vec{\Delta_2}$
1
d_2

EJEMPLOS:

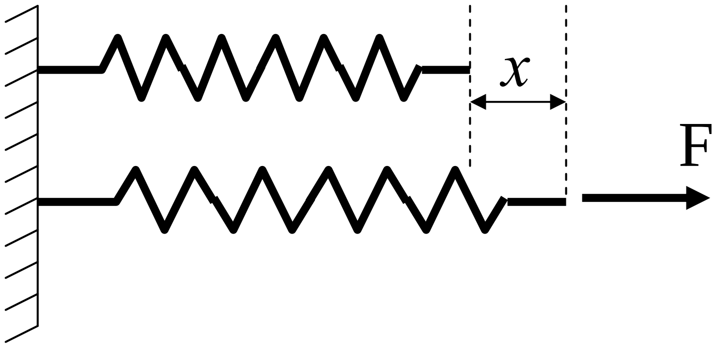


W=1/2 P.d

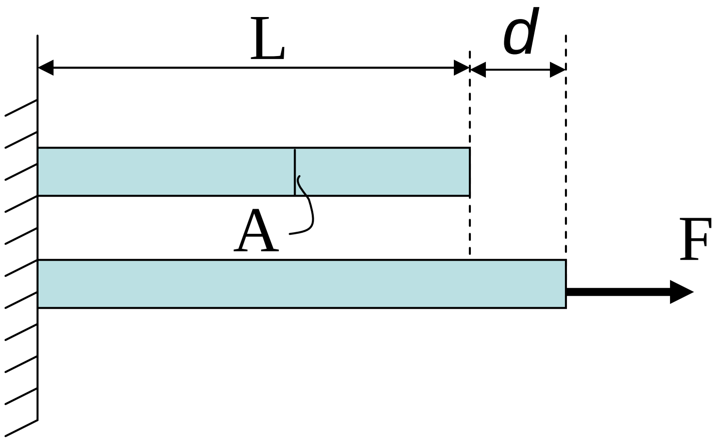


W=1/2 M.θ

ENERGÍA ELÁSTICA ALMACENADA POR UNA BARRA A TRACCIÓN



$$W = \frac{1}{2} F_o x_o$$

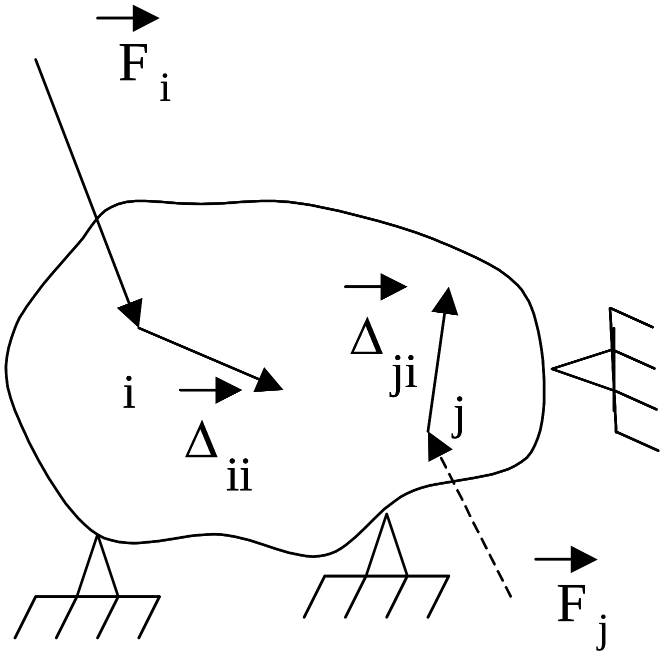


$$\sigma = \frac{F}{A}$$

$$d = \varepsilon \cdot L = \frac{\sigma}{E} \cdot L = \frac{FL}{AE}$$

$$W = U = \frac{1}{2} Fd = \frac{F^2 L}{2AE}$$

COEFICIENTES DE INFLUENCIA



Consideremos dos puntos *i* y *j* del sólido sobre los que actúan, respectivamente, las cargas: $\vec{F}_i$ $\vec{F}_j$

Representemos por $\vec{\Delta}$ los vectores desplazamientos, de manera tal que:

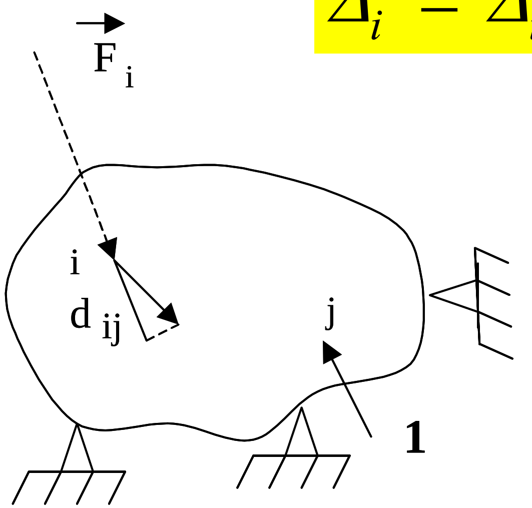
$\vec{\Delta}_{ii}$ = vector desplazamiento del punto *i* cuando sólo actúa la carga: $\vec{F}_i$

$\vec{\Delta}_{ji}$ = vector desplazamiento del punto *j* cuando sólo actúa la carga: $\vec{F}_i$

Si sobre el sólido actúa un sistema de cargas: $\vec{F}_1 , \vec{F}_2 , \ldots\ldots \vec{F}_n$

en los puntos: 1,2,……n, el vector desplazamiento total $\vec{\Delta}_i$ en el punto *i* será:

$$\vec{\Delta}_i = \vec{\Delta}_{i1} + \vec{\Delta}_{i2} + \ldots\ldots\ldots + \vec{\Delta}_{in}$$



d_{ij} = coeficiente de influencia: proyección del desplazamiento que experimenta el punto *i* , sobre la recta de acción de $\vec{F}_i$ cuando se aplica una carga unidad en el punto *j* con la misma dirección y sentido que $\vec{F}_j$

d_i = proyección del vector desplazamiento del punto *i*, según la dirección de la fuerza $\vec{F}_i$ cuando actúan todas las cargas

$$d_i = d_{i1} \cdot F_1 + d_{i2} \cdot F_2 + \ldots\ldots\ldots + d_{in} \cdot F_n$$

FÓRMULAS DE CLAPEYRON

Emile
CLAPEYRON
(1799-1864)

$$U = W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} F_i \cdot d_i$$

Como: $d_i = d_{i1} \cdot F_1 + d_{i2} \cdot F_2 + \ldots\ldots\ldots + d_{in} \cdot F_n$

$$U = W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{ij} F_i F_j$$

Cabe otra expresión alternativa a la anterior si consideramos que, del sistema de *n* ecuaciones: $d_i = d_{i1} \cdot F_1 + d_{i2} \cdot F_2 + \ldots\ldots\ldots + d_{in} \cdot F_n$ despejáramos las fuerzas:

$F_j = k_{j1} \cdot d_1 + k_{j2} \cdot d_2 + \ldots\ldots\ldots + k_{jn} \cdot d_n$

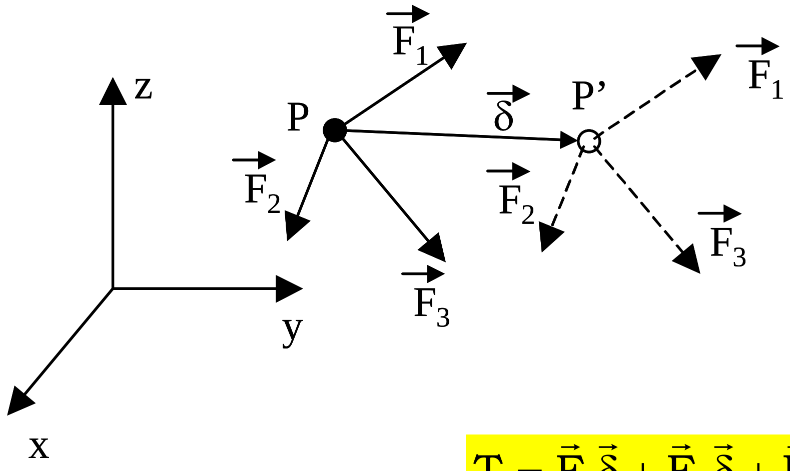
$$U = W = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} F_j \cdot d_j = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} k_{jm} d_j d_m$$

PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES

Se denomina **desplazamiento virtual** de un punto a un desplazamiento arbitrario, concebido matemáticamente y que no tiene lugar en la realidad, pero que es geométrica y físicamente posible.
El sistema al que se aplica este Principio debe encontrarse en equilibrio

Jean Baptiste Le Rond
D'ALEMBERT
(1717-1783)

Caso de una partícula puntual



$\vec{\delta}$ = desplazamiento virtual

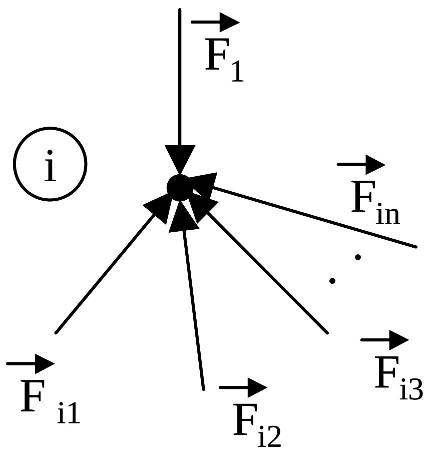
$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = R_x\vec{i} + R_y\vec{j} + R_z\vec{k}$$

$$\vec{\delta} = \delta_x\vec{i} + \delta_y\vec{j} + \delta_z\vec{k}$$

$$T = \vec{F}_1\vec{\delta} + \vec{F}_2\vec{\delta} + \vec{F}_3\vec{\delta} = \vec{R}\vec{\delta} = 0$$

$$\text{como } \vec{R} = \vec{0}, \quad T = 0 \quad \forall\vec{\delta}$$

Caso de un sólido rígido



$\vec{F}_i$ = fuerza exterior aplicada al sólido en el punto *i*

$\vec{F}_{ij}$ = fuerza interior que ejerce el punto *j* sobre el *i*

$$\vec{R} = R_x\vec{i} + R_y\vec{j} + R_z\vec{k}$$

$$\vec{M}_O = M_x\vec{i} + M_y\vec{j} + M_z\vec{k}$$

$$\delta\vec{r} = \delta x\vec{i} + \delta y\vec{j} + \delta z\vec{k}$$

$$\delta\vec{\theta} = \delta\theta_x\vec{i} + \delta\theta_y\vec{j} + \delta\theta_z\vec{k}$$

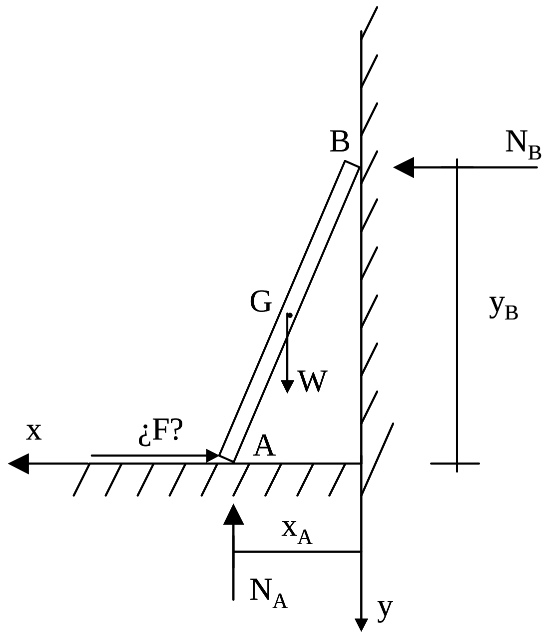
$$T_{ext} = \vec{R}\cdot\delta\vec{r} + \vec{M}_O\cdot\delta\vec{\theta} = R_x\delta x + R_y\delta y + R_z\delta z + M_x\delta\theta_x + M_y\delta\theta_y + M_z\delta\theta_z = 0 \qquad \forall\ \delta\vec{r}, \delta\vec{\theta}$$

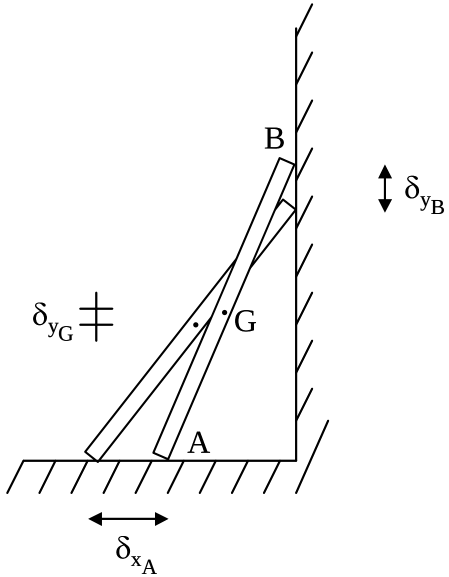
$$\delta x \neq 0,\ \ \delta y = \delta z = \delta\theta_x = \delta\theta_y = \delta\theta_z = 0 \quad \Rightarrow \quad R_x = 0$$

$$R_x = R_y = R_z = 0$$

$$M_x = M_y = M_z = 0$$

EJEMPLO





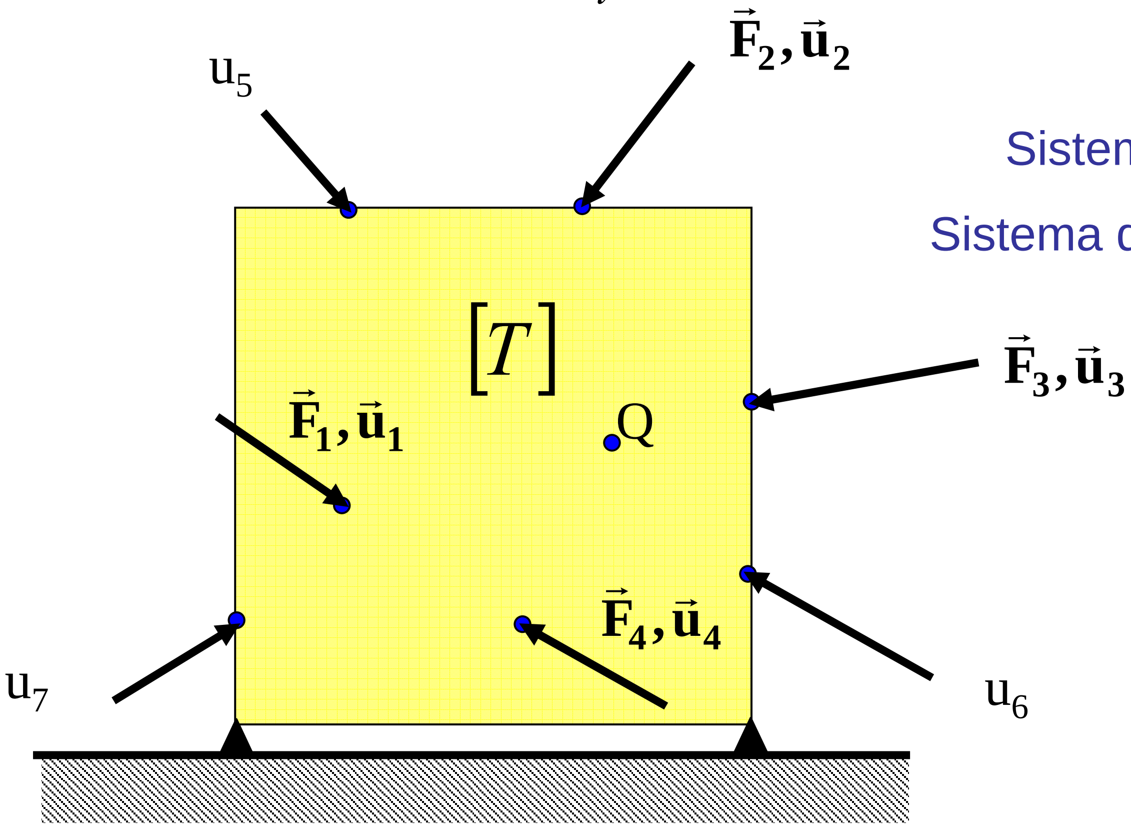
$$x_A^2 + y_B^2 = \left(x_A - \delta x_A\right)^2 + \left(y_B + \delta y_B\right)^2 = L^2$$

$$\delta y_B = \frac{x_A}{y_B}\delta x_A \quad \Rightarrow \quad \delta y_G = \frac{\delta y_B}{2} = \frac{1}{2}\frac{x_A}{y_B}\delta x_A$$

$$T_{ext} = F\delta x_A - W\delta y_G = 0 \quad \Rightarrow \quad F\delta x_A = W\frac{1}{2}\frac{x_A}{y_B}\delta x_A \quad \Rightarrow \quad F = \frac{W}{2}\frac{x_A}{y_B}$$

Caso de un sólido deformable

Consideremos un sólido en equilibrio bajo la acción de un sistema de cargas $\vec{F}_i$, como se muestra en la figura. En cualquier punto genérico (Q) del sólido, el tensor de tensiones verificará las ecuaciones de equilibrio interno. Sean $\vec{u}_i$ los desplazamientos de los puntos del sólido.

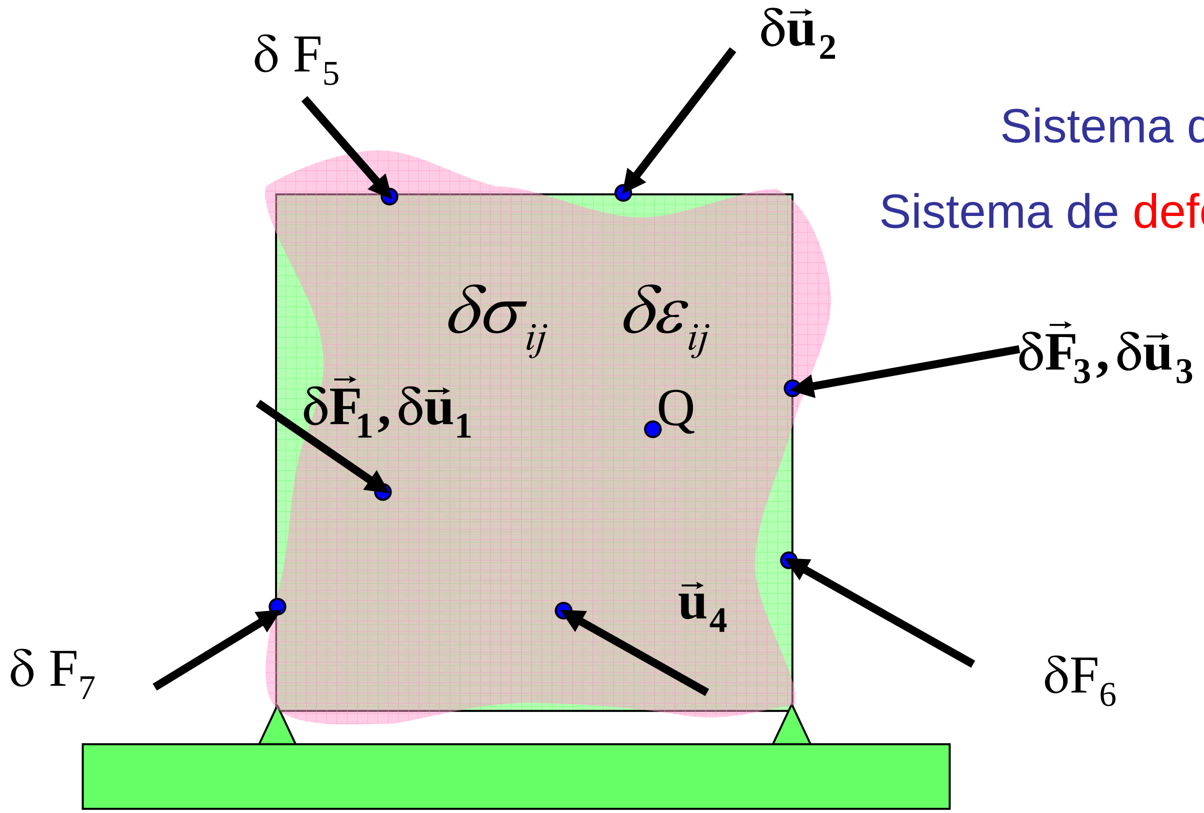


Sistema de fuerzas reales: $\vec{F}_i$

Sistema de desplazamientos reales: $\vec{u}_i$

Sólido elástico en equilibrio bajo la acción de un sistema de fuerzas y unas ligaduras

Sometamos al sólido anterior a un segundo sistema de fuerzas virtuales $\delta\vec{F}_i$ como se muestra en la figura. Sean $\delta\vec{u}_i$ los desplazamientos virtuales de los puntos del sólido, los cuales no violan las condiciones de contorno del sólido.



Sistema de tensiones virtuales: $\delta\sigma_{ij}$

Sistema de deformaciones virtuales: $\delta\varepsilon_{ij}$

Sólido elástico en equilibrio bajo la acción de un sistema de fuerzas “virtuales”

Trabajo realizado por las fuerzas exteriores reales:

$$T_{Ext}^{\delta} = \sum \vec{F}_i \cdot \delta \vec{u}_i$$

Energía interna virtual almacenada en el sólido:

$$U^{\delta} = \int_{v} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV$$

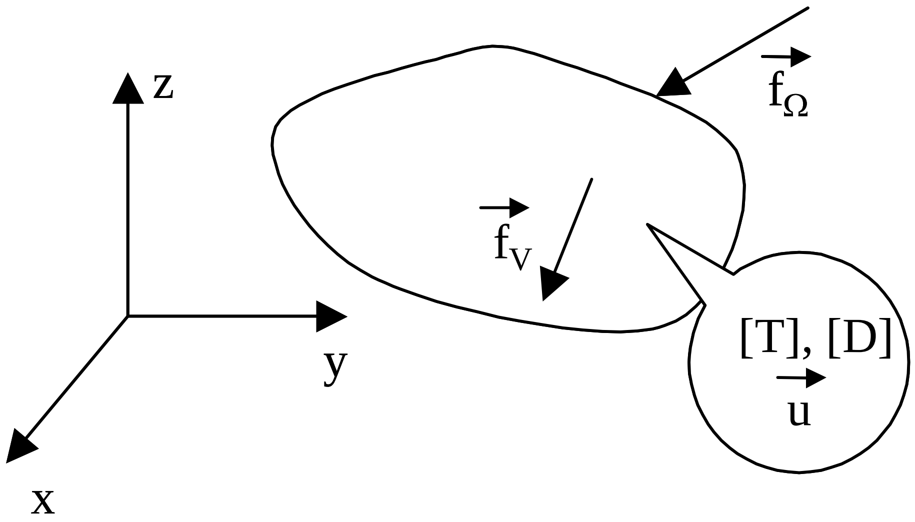
Se puede demostrar que, estos dos trabajos virtuales son iguales:

$$T_{Ext}^{\delta} = U^{\delta}$$

Lógicamente, si el cuerpo considerado fuese un sólido rígido:

$$T_{Ext}^{\delta} = U^{\delta} = 0$$

De una manera más formalista….



Campo de desplazamientos virtuales (físicamente posibles) impuestos al sólido:

$$\vec{\delta} = \delta_x \vec{i} + \delta_y \vec{j} + \delta_z \vec{k}$$

se llega a:

$$T^{\delta}_{Ext} = \iiint_V \vec{f}_V \cdot \vec{\delta}\, dVol + \iint_\Omega \vec{f}_\Omega \cdot \vec{\delta}\, d\Omega$$

$$U^{\delta} = \iiint_V \left(\sigma_x \varepsilon^{\delta}_x + \sigma_y \varepsilon^{\delta}_y + \sigma_z \varepsilon^{\delta}_z + \tau_{xy}\gamma^{\delta}_{xy} + \tau_{xz}\gamma^{\delta}_{xz} + \tau_{yz}\gamma^{\delta}_{yz}\right) dVol$$

$$T^{\delta}_{Ext} = U^{\delta}$$

Trabajo virtual realizado por las fuerzas reales (por unidad de volumen y en el contorno) aplicadas al sólido cuando se le imponen los desplazamientos virtuales

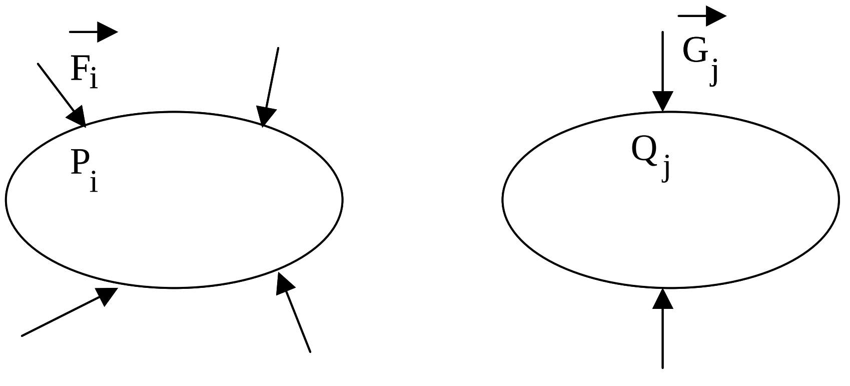
$$\boxed{\iiint_V \vec{f}_V \cdot \vec{\delta}\, dVol + \iint_\Omega \vec{f}_\Omega \cdot \vec{\delta}\, d\Omega} =$$

$$= \boxed{\iiint_V \left(\sigma_x \varepsilon_x^\delta + \sigma_y \varepsilon_y^\delta + \sigma_z \varepsilon_z^\delta + \tau_{xy}\gamma_{xy}^\delta + \tau_{xz}\gamma_{xz}^\delta + \tau_{yz}\gamma_{yz}^\delta\right) dVol}$$

Trabajo virtual de las tensiones internas caso de que el sólido sufriera el campo de desplazamientos virtuales supuesto (las componentes de tensión son las que, realmente, existen dentro del sólido, mientras que las componentes de deformación $\varepsilon^\delta, \gamma^\delta$ que aparecen se deducen del campo de desplazamientos virtuales)

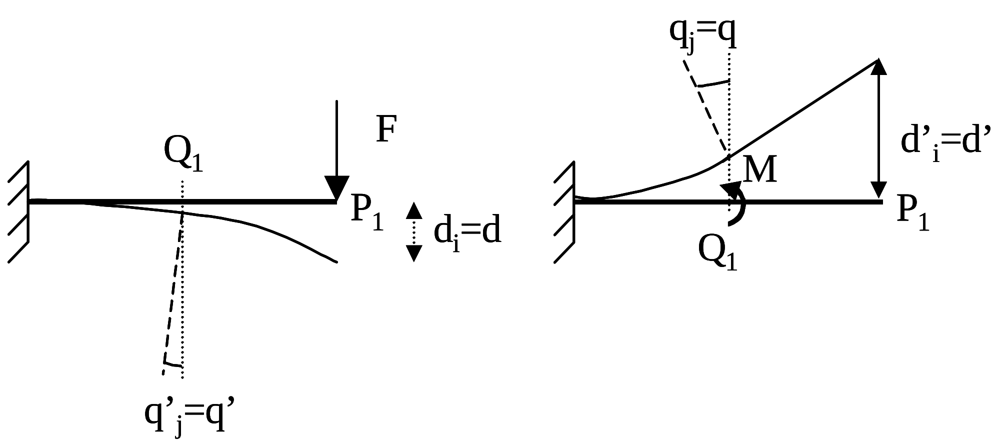
TEOREMA DE RECIPROCIDAD DE MAXWELL-BETTI

James Clerk
MAXWELL
(1831-1879)



SISTEMA I   SISTEMA II

En un sólido elástico, el trabajo realizado por un sistema de cargas $\{\vec{F}\}$ para los desplazamientos resultantes de aplicar otro sistema de cargas $\{\vec{G}\}$ distinto es idéntico al trabajo realizado por el sistema de cargas $\{\vec{G}\}$ para los desplazamientos resultantes de aplicar el sistema de cargas $\{\vec{F}\}$.



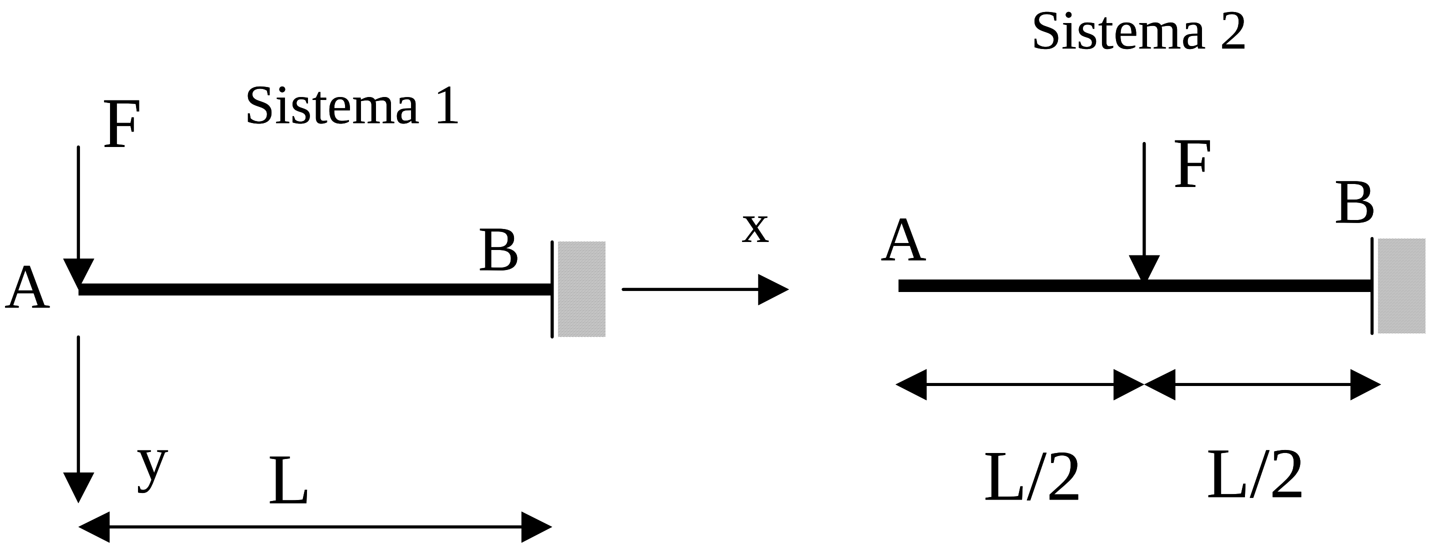
Sistema I   Sistema II

$$Fd' = Mq'$$

$$d_{ij} = d_{ji}$$

EJEMPLO DE APLICACIÓN DEL TEOREMA DE RECIPROCIDAD

Una barra de longitud "**L**" se encuentra empotrada en su extremo *B* y sometida, de forma independiente, a dos sistemas de cargas diferentes (Sistema 1 y Sistema 2), tal como se representa en la figura. Cuando actúa el sistema de cargas 1, las flechas (desplazamientos verticales, "y") que experimentan los puntos de la barra vienen dados por la ecuación (referida al sistema de ejes de la figura): $y = \frac{F}{C}(L-x)^2(2L+x)$, donde C es una constante conocida. Determinar la flecha del punto *A* cuando actúa sobre la barra el sistema de cargas 2.



Sistema 1: flecha en el punto medio: $f^{I} = \frac{5FL^3}{8C}$

Teorema de reciprocidad: $F \cdot f_A^{II} = F \cdot f^{I} = F \cdot \frac{5FL^3}{8C} \quad \Rightarrow \quad f_A^{II} = \frac{5FL^3}{8C}$

TEOREMAS DE CASTIGLIANO

Carlo Alberto
CASTIGLIANO
(1847-1884)

PRIMER TEOREMA DE CASTIGLIANO:

$$U = \frac{1}{2} \Sigma\Sigma\, d_{ij} F_i F_j = \frac{1}{2} \Sigma\Sigma\, k_{mn} d_m d_n$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial \boldsymbol{F_i}} = \sum \boldsymbol{d_{ij} F_j} = \boldsymbol{d_i}$$

La derivada de la energía elástica respecto de una de las cargas aplicadas al sólido es igual a la proyección del desplazamiento del punto de aplicación de la carga considerada según la dirección de la misma

SEGUNDO TEOREMA DE CASTIGLIANO:

$$\frac{\partial U}{\partial d_m} = \sum k_{mn} d_n = F_m$$

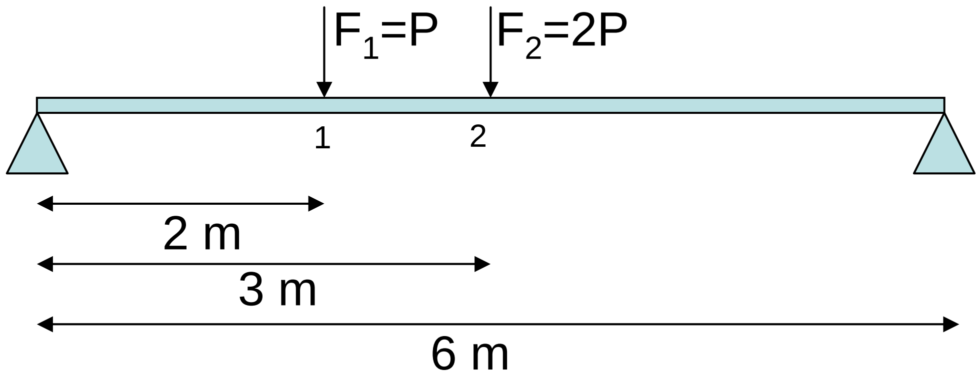
La derivada de la energía elástica de un sólido respecto del desplazamiento en uno de los puntos en los que actúa una fuerza, proporciona la componente de dicha fuerza según la dirección del desplazamiento considerado

EJEMPLO DE APLICACIÓN DEL SEGUNDO TEOREMA DE CASTIGLIANO

Sabiendo que la energía elástica almacenada en la viga de la figura toma el valor:

$$U = \frac{EI}{2}\left[0{,}3d_1^2 - 0{,}511d_2d_1 + 0{,}00476d_2^2\right]$$

determinar el valor de la carga aplicada en la sección 1.

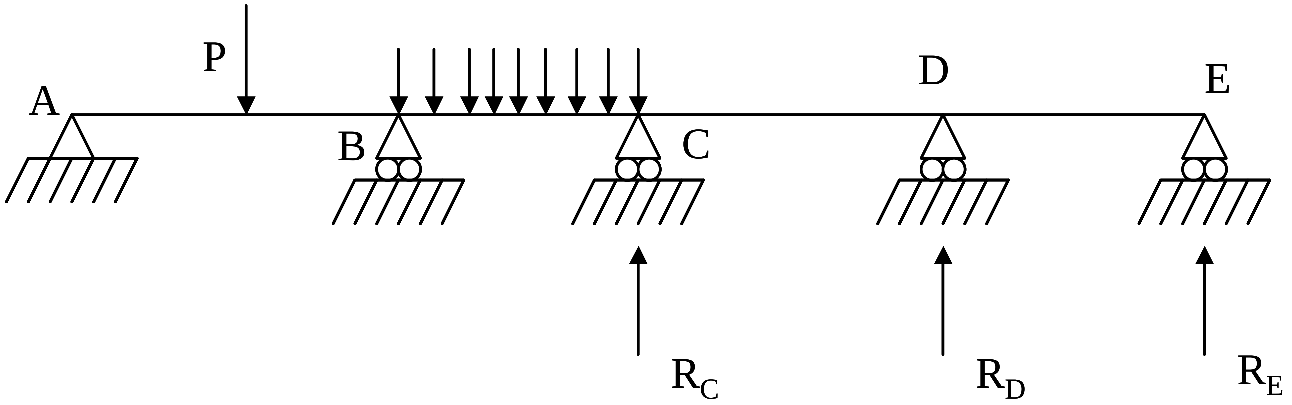


$$\frac{\partial U}{\partial d_1} = EI\left[0{,}3d_1 - 0{,}2555d_2\right] = F_1 = P$$

(Ver Ec.(2))

TEOREMA DE MENABREA
(O DEL TRABAJO MÍNIMO)

L. F.
MENABREA
(1799-1864)



Las tres reacciones hiperestáticas R_C, R_D y R_E pueden calcularse liberando todas las coacciones excepto la de los apoyos en A y en B y, por tanto, resolviendo la estructura, ya isostática, en función de las tres reacciones mencionadas.
Si calculásemos la energía elástica U almacenada en la pieza (que resultaría ser función de las tres reacciones incógnitas), podríamos aplicar el primer teorema de Castigliano teniendo en cuenta que, en la estructura original, los puntos *C, D* y *E* no sufren desplazamientos verticales, por lo que:

$$\frac{\partial U}{\partial R_C} = \frac{\partial U}{\partial R_D} = \frac{\partial U}{\partial R_E} = 0$$

Los valores de las reacciones hiperestáticas que actúan sobre un sólido hacen mínima su energía elástica