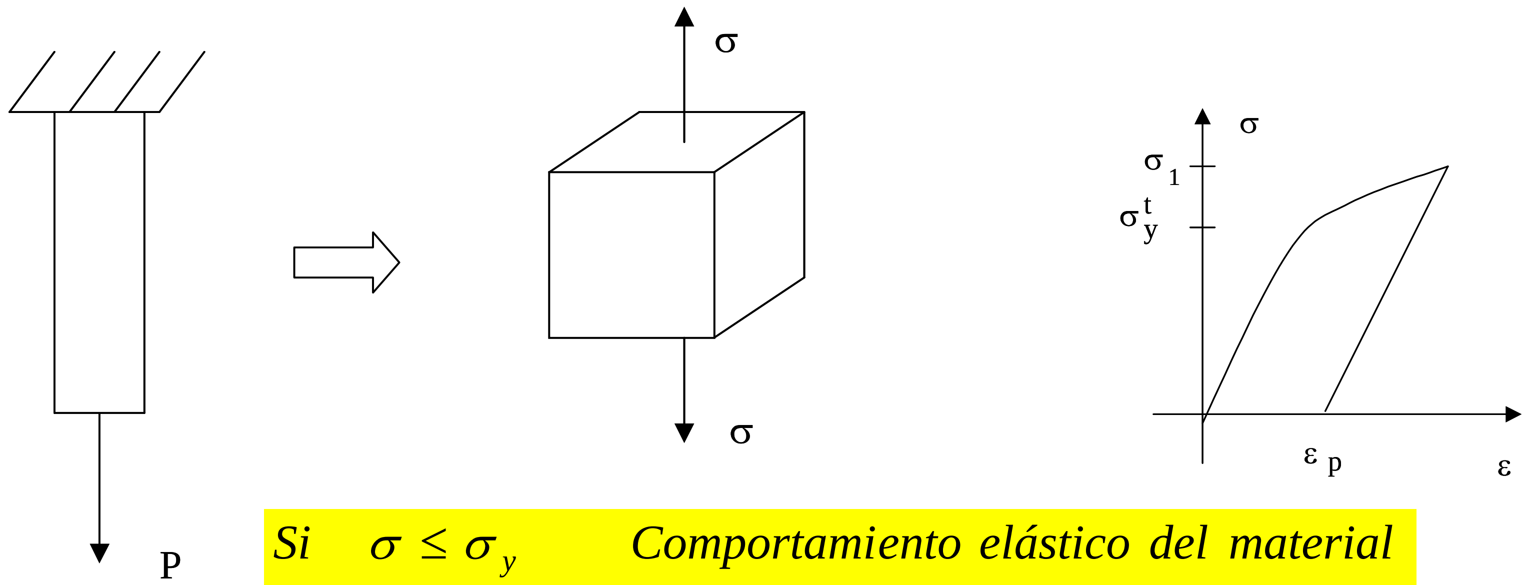
CAPÍTULO 7

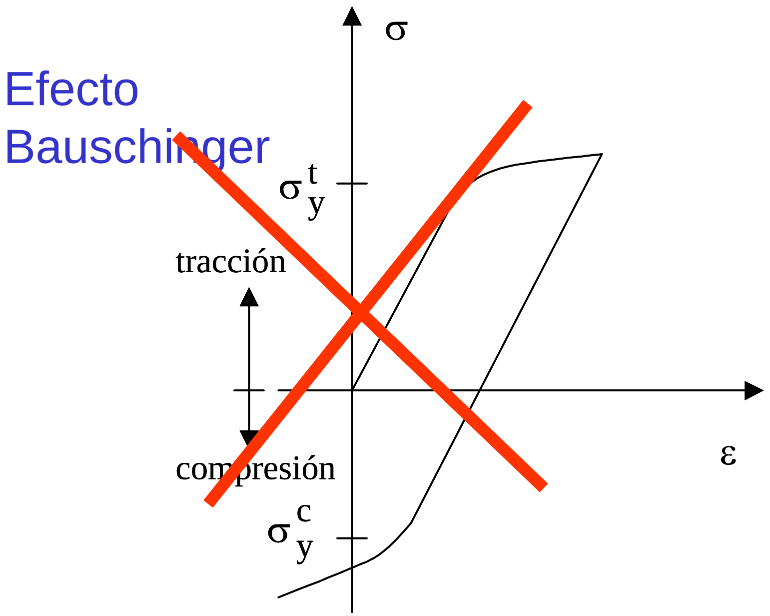
CRITERIOS DE PLASTIFICACIÓN

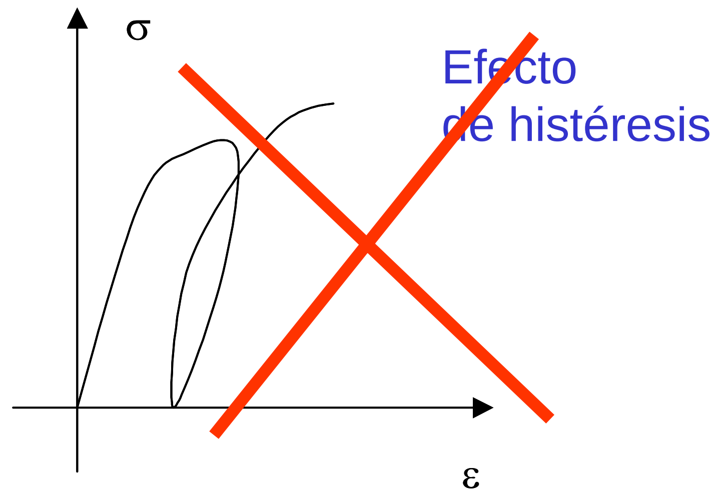
ENSAYO DE TRACCIÓN SIMPLE



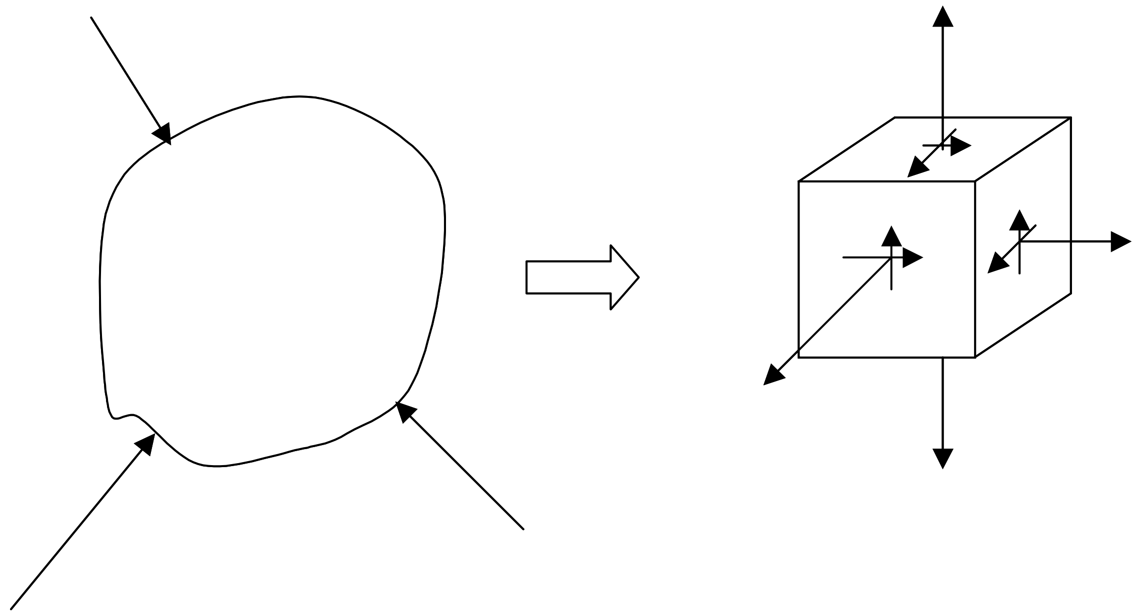
$$Si \quad \sigma \le \sigma_y \qquad Comportamiento\ elástico\ del\ material$$

$$Si \quad \sigma \ge \sigma_y \qquad Comportamiento\ plástico\ del\ material$$





ESTADO TENSIONAL TRIDIMENSIONAL



¿Cuándo se produce la plastificación de este punto elástico?

CRITERIO DE PLASTIFICACIÓN

$$f(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}) = 0$$

CRITERIO DE PLASTIFICACIÓN PARA UN MATERIAL ISÓTROPO

Las propiedades mecánicas no dependen de la dirección en que se midan. Esto lleva a la afirmación de que no existe, dentro del sólido, ninguna dirección que predomine sobre las demás. Por tanto, un criterio de plastificación debería venir expresado en función de los invariantes del tensor de tensiones (magnitudes independientes del sistema de referencia que se tome) y no en función de las componentes del tensor en un sistema de referencia en particular.
En base a esto, el criterio de plastificación debe tener la siguiente formulación:

$$f(I_1, I_2, I_3) = 0$$

En el caso de materiales metálicos, se ha comprobado experimentalmente que, el fenómeno de plastificación en un punto, es independiente de la componente hidrostática *p* del tensor de tensiones. Por tanto, en estos materiales, el criterio de plastificación debe venir expresado en función de los invariantes J_1, J_2 y J_3 de la parte desviadora del tensor de tensiones.

$$J_1 = 0$$
$$J_2 = \sigma'_1\sigma'_2 + \sigma'_2\sigma'_3 + \sigma'_3\sigma'_1$$
$$J_3 = \sigma'_1\sigma'_2\sigma'_3$$

$$p = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

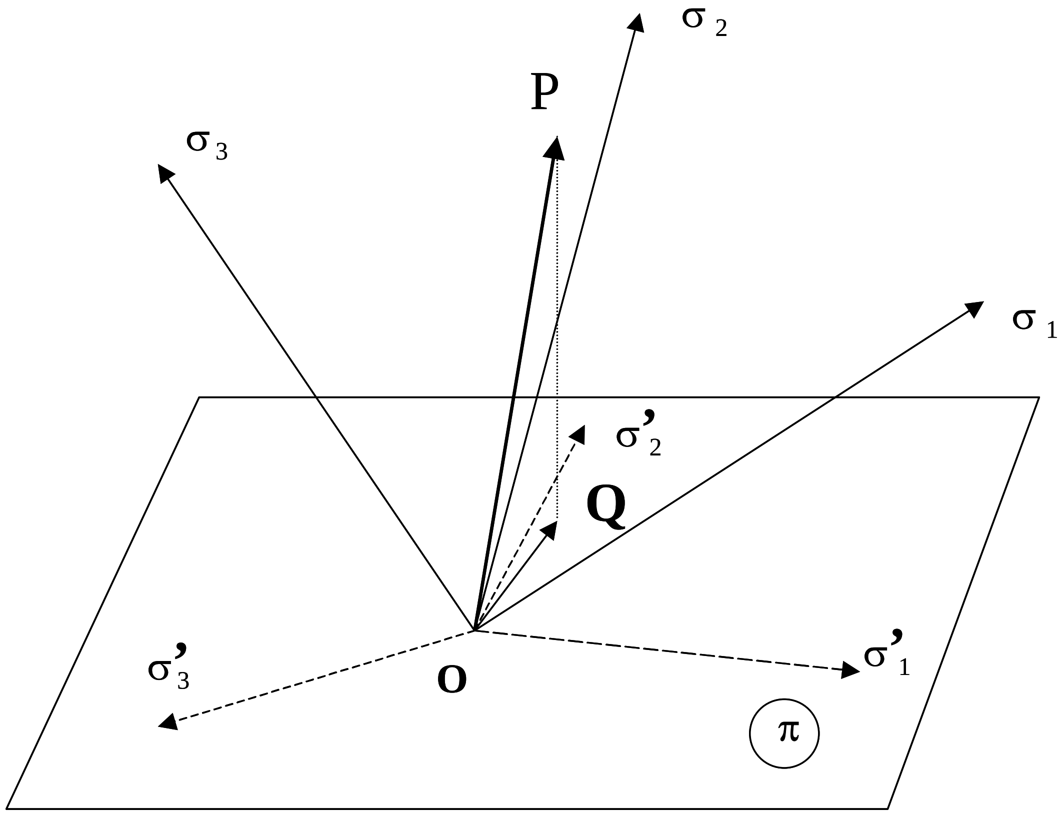
$$\sigma'_1 = \sigma_1 - p$$
$$\sigma'_2 = \sigma_2 - p$$
$$\sigma'_3 = \sigma_3 - p$$

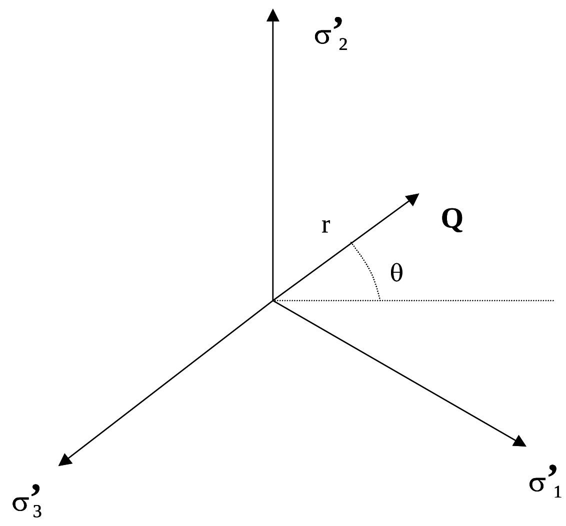
$$f(J_2, J_3) = 0$$

Si el material no posee el efecto Bauschinger, el límite elástico no cambiaría al cambiar el signo de las tensiones aplicadas. Como quiera que J_3 es función impar de $\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3$ la función de plastificación no podría depender de este invariante, por lo que, para metales, el criterio de plastificación debe ser del tipo:

$$f(J_2) = 0$$

REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE LA PLASTIFICACIÓN

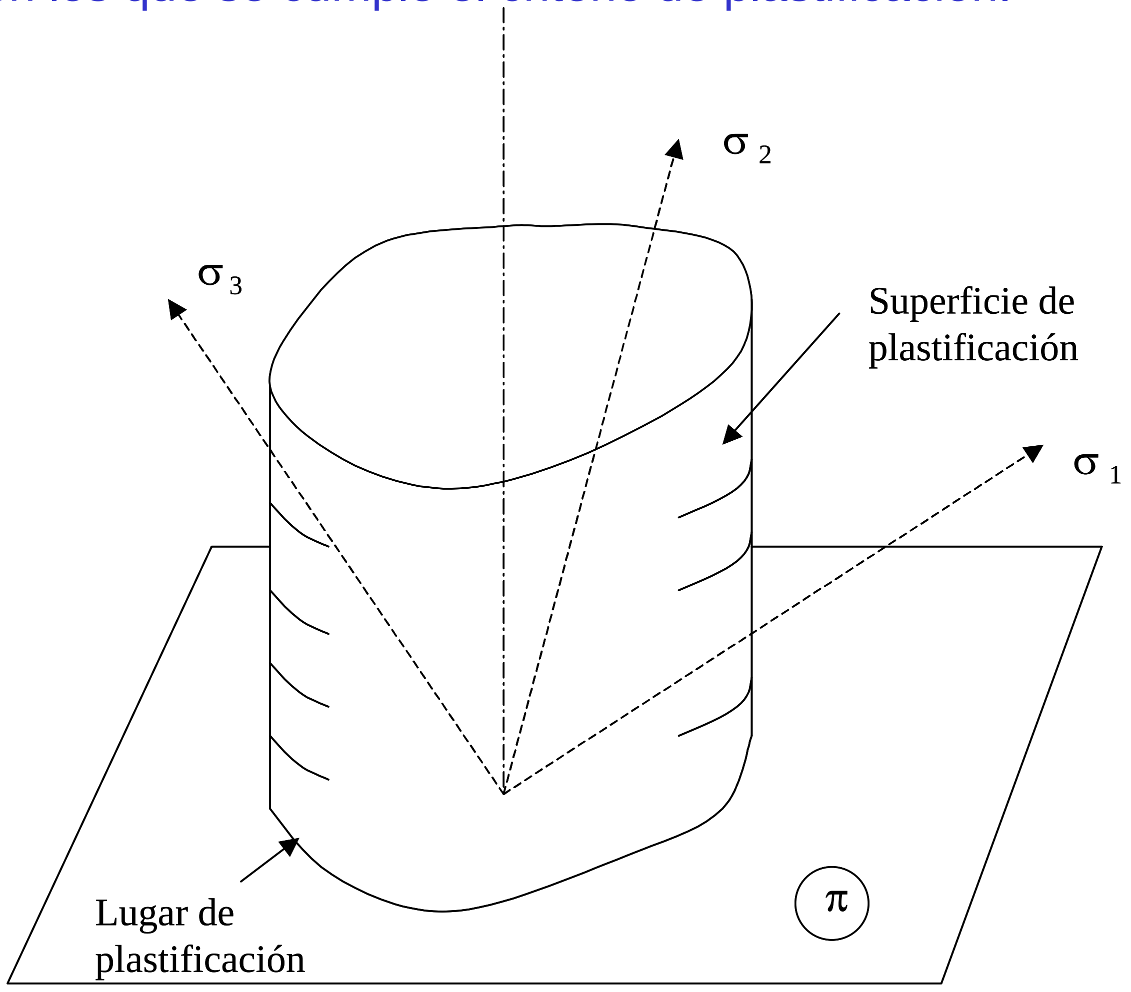




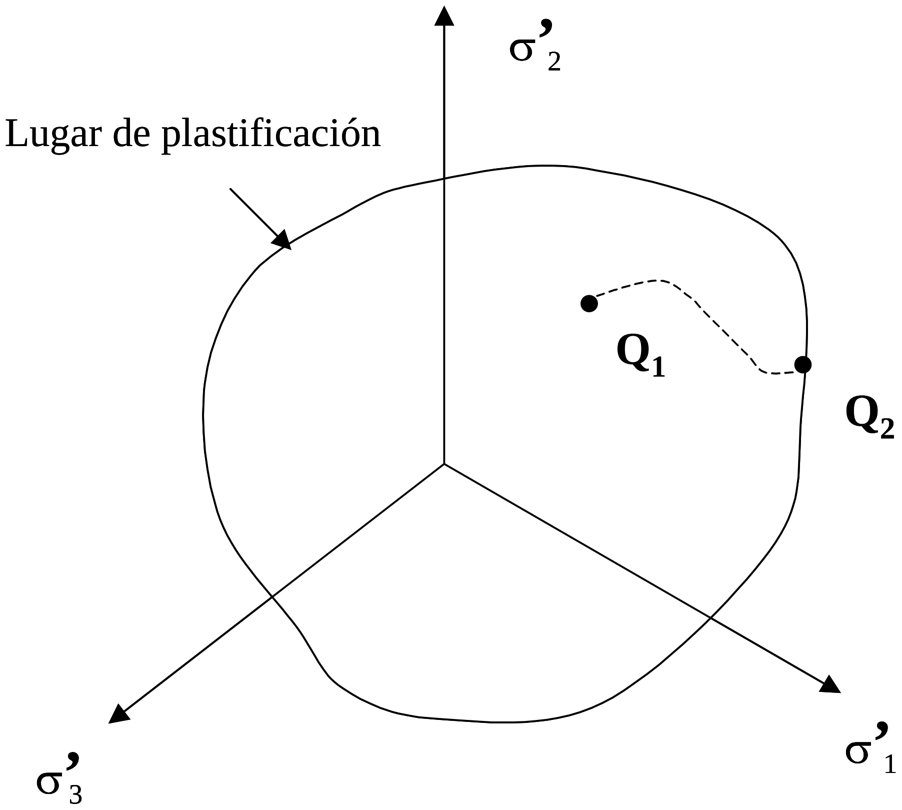
plano π: perpendicular a la bisectriz del primer cuadrante de ese sistema de referencia que, además, tiene su origen en un punto de dicho plano

SUPERFICIE Y LUGAR DE PLASTIFICACION

Superficie de plastificación se define como el lugar geométrico de los puntos $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ en los que se cumple el criterio de plastificación.



El corte de la superficie de plastificación con el plano π recibe el nombre de **lugar de plastificación**



El lugar de plastificación debe cumplir unas determinadas condiciones:

•debe ser simétrico respecto de los ejes ya que el criterio de plastificación no varía al intercambiar la dirección de las tensiones principales.

•debe ser simétrico respecto de las rectas perpendiculares a los ejes en el origen como consecuencia de que el material no presenta el efecto Bauschinger.

CRITERIO DE PLASTIFICACION DE TRESCA

Henri
TRESCA
(1841-1884)

La plastificación de un punto elástico tendrá lugar cuando la máxima tensión tangencial que actúe sobre el punto elástico considerado alcance un valor crítico *k*.

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

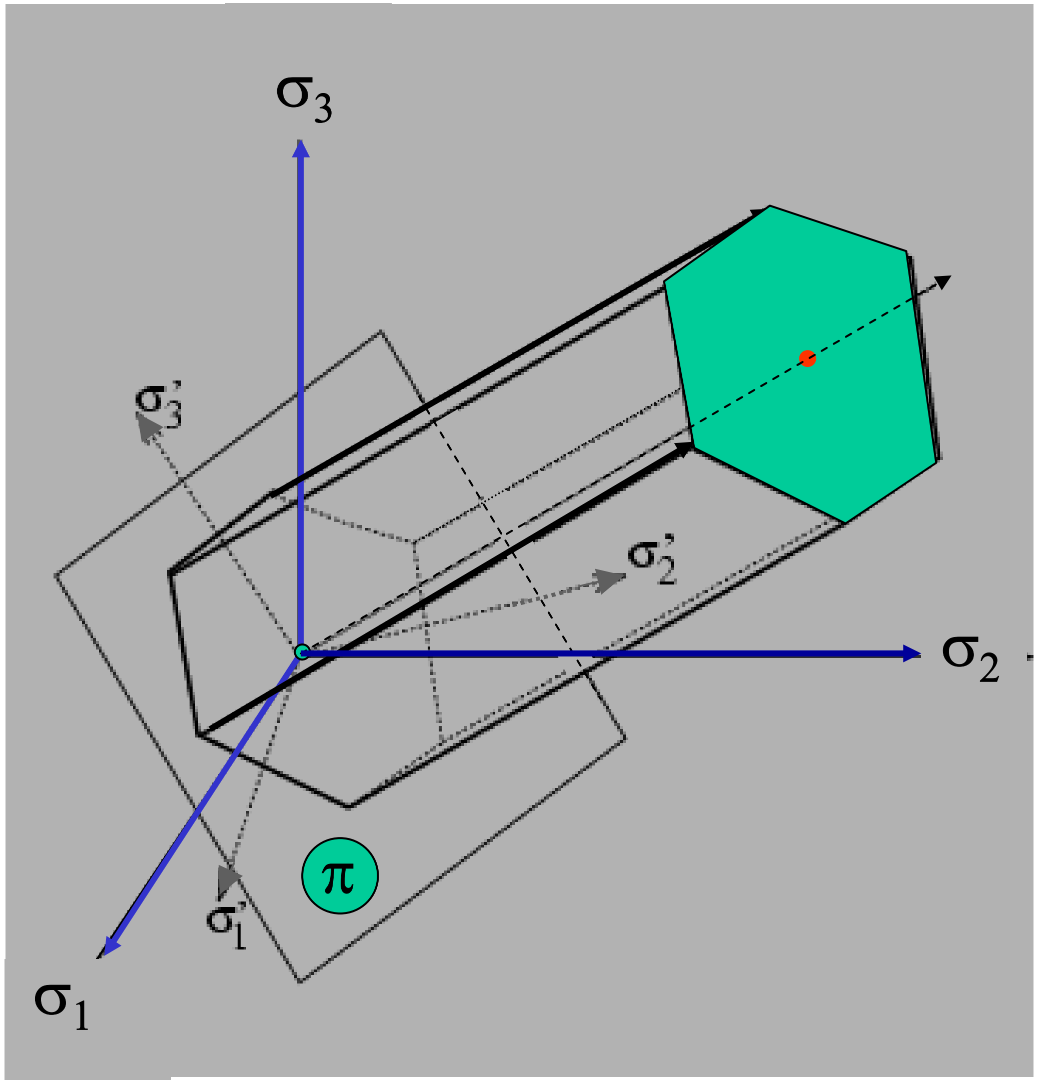
$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2k$$

¿Cómo podemos deducir el valor de *k* a partir, por ejemplo, de la tensión de plastificación σ_y obtenida en un ensayo convencional de tracción o Dde compresión?

$$\sigma_1 = \sigma_y \qquad \sigma_2 = \sigma_3 = 0$$

$$k = \frac{\sigma_y}{2}$$

SUPERFICIE DE PLASTIFICACION DE TRESCA



CRITERIO DE PLASTIFICACION DE VON MISES

Richard VON MISES (1883-1953)

La plastificación tiene lugar cuando el segundo invariante del tensor de tensiones desviadoras es igual al cuadrado de una constante *k’* propiedad del material

$$J_2 = (k')^2$$

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 6(k')^2$$

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2) = 6(k')^2$$

La forma de determinar el valor del parámetro *k’* es similar a la que vimos para el criterio de Tresca:

$$\sigma_1 = \sigma_y, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$$

$$J_2 = 2\sigma_y^2$$

$$J_2 = 2\sigma_y^2 = 6(k')^2 \quad \Rightarrow \quad k' = \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}}$$

Principio físico de la teoría de Von Mises

La plastificación se produce si U_d (Energía de distorsión) alcanza el mismo valor de U_d cuando se produce la plastificación en un ensayo de tracción

Concepto de Energía de distorsión :

Energía consumida para obtener un cambio de forma del punto elástico sin que éste cambie ni de dimensiones y ni de volumen.

$$U_d = U_T - U_V$$

E. de distorsión

E. Total

E. necesaria para un cambio de volumen

1- Calculemos el cambio de volumen de un punto elástico sometido a las tensiones σ_1, σ_2, σ_3.

$$\Delta \boldsymbol{V} = \left[(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3)-1\right] =$$

$$= 1+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_1\varepsilon_3+\varepsilon_2\varepsilon_3+\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3-1 \approx$$

$$\approx \varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$$

Como quiera que:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{\boldsymbol{E}} - \frac{\nu(\sigma_2+\sigma_3)}{\boldsymbol{E}} \qquad (1)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{\boldsymbol{E}} - \frac{\nu(\sigma_1+\sigma_3)}{\boldsymbol{E}} \qquad (2)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\sigma_3}{\boldsymbol{E}} - \frac{\nu(\sigma_1+\sigma_2)}{\boldsymbol{E}} \qquad (3)$$

llegamos a que: $\Delta \mathrm{V} = \dfrac{(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)(1-2\nu)}{E}$

2- Calculemos la tensión hidrostática que produciría la misma variación de volumen (ΔV):

$$\Delta \boldsymbol{V} = 3\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}} = \frac{3}{\boldsymbol{E}} \sigma_{\boldsymbol{hidrostática}} (1 - 2\nu)$$

$$\sigma_{hidrostática} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

3- Calculemos U_T para el punto elástico :

$$\boldsymbol{U_T} = \frac{1}{2}\left[\sigma_1\varepsilon_1 + \sigma_2\varepsilon_2 + \sigma_3\varepsilon_3\right]$$

U_T para un resorte :

$$U_t = F \cdot x/2 \qquad U_t = \frac{\mathrm{K}\, x^2}{2}$$

Utilizando las ecuaciones 1 , 2 y 3

$$U_T = \frac{1}{2E}\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2\right)(1-2\nu)$$

4- Calculemos U_V

$$U_V = \frac{3}{2E}\ \sigma_{av}^{\ 2}\ (1-2\nu)$$

$$\boldsymbol{U_V} = \frac{3}{2\boldsymbol{E}}\boldsymbol{\sigma}^2_{\textit{hidrostática}}(1-2\nu)$$

$$U_V = \frac{1}{6E}\ (1-2\nu)\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2\sigma_1\sigma_2 + 2\sigma_1\sigma_3 + 2\sigma_2\sigma_3\right)$$

5- Despejemos U_d

$$\underbrace{U_d = U_T - U_V = \frac{1+\nu}{3E}\left[\frac{(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_3-\sigma_1)^2}{2}\right]}_{\text{A}}$$

6- Calculemos U_d cuando se produce la plastificación en un ensayo de tracción:

$$\underbrace{U_d = \frac{1+\nu}{3E}\sigma_y^2}_{B} \qquad \sigma_y = \text{límite elástico del material}$$

7- Igualando las expresiones A y B

$$\sigma_v^2 = \frac{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}{2}$$

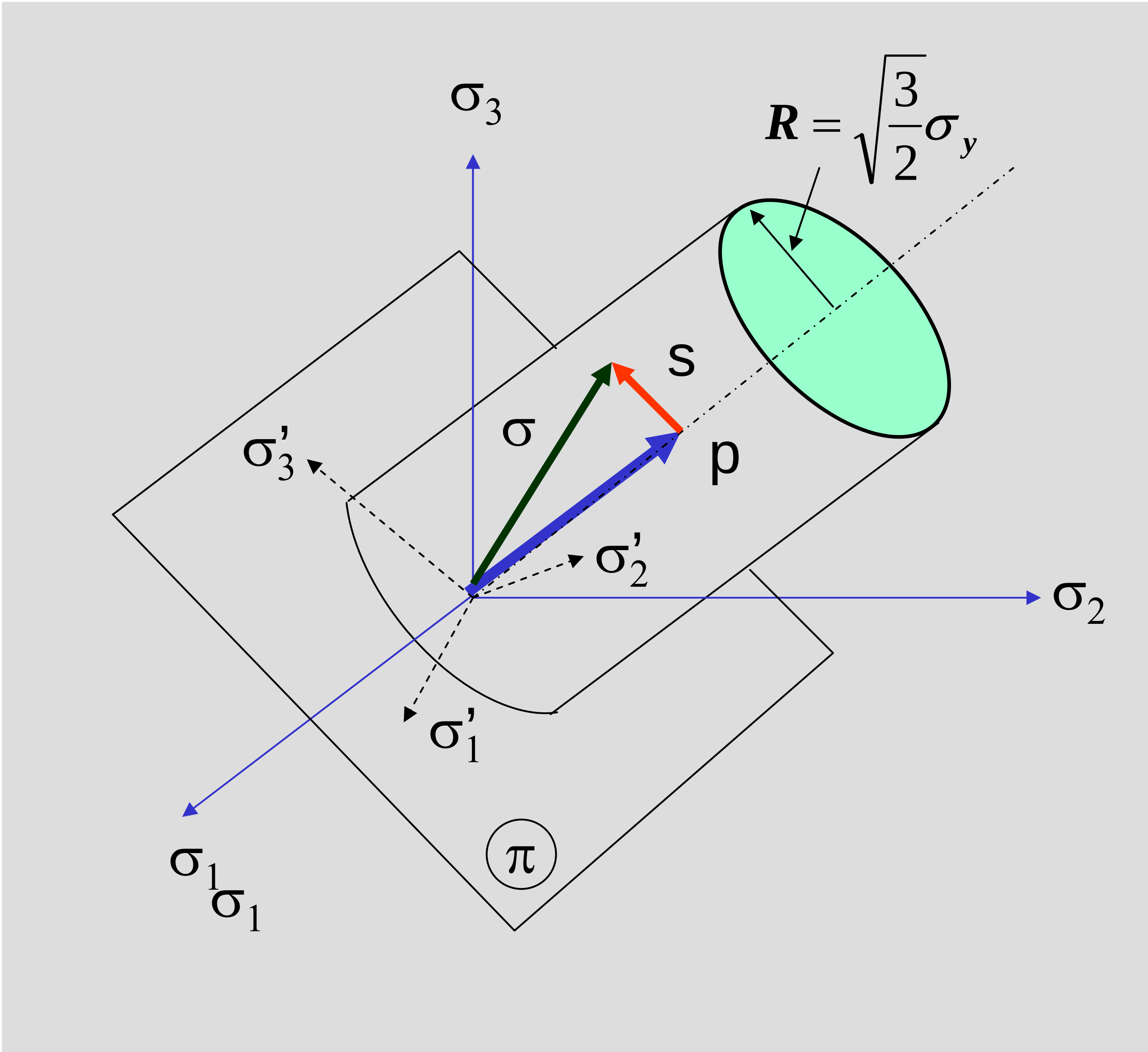
$$\sigma_y = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right]^{1/2}$$

8- Llamando $\sigma_e = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right]^{1/2}$

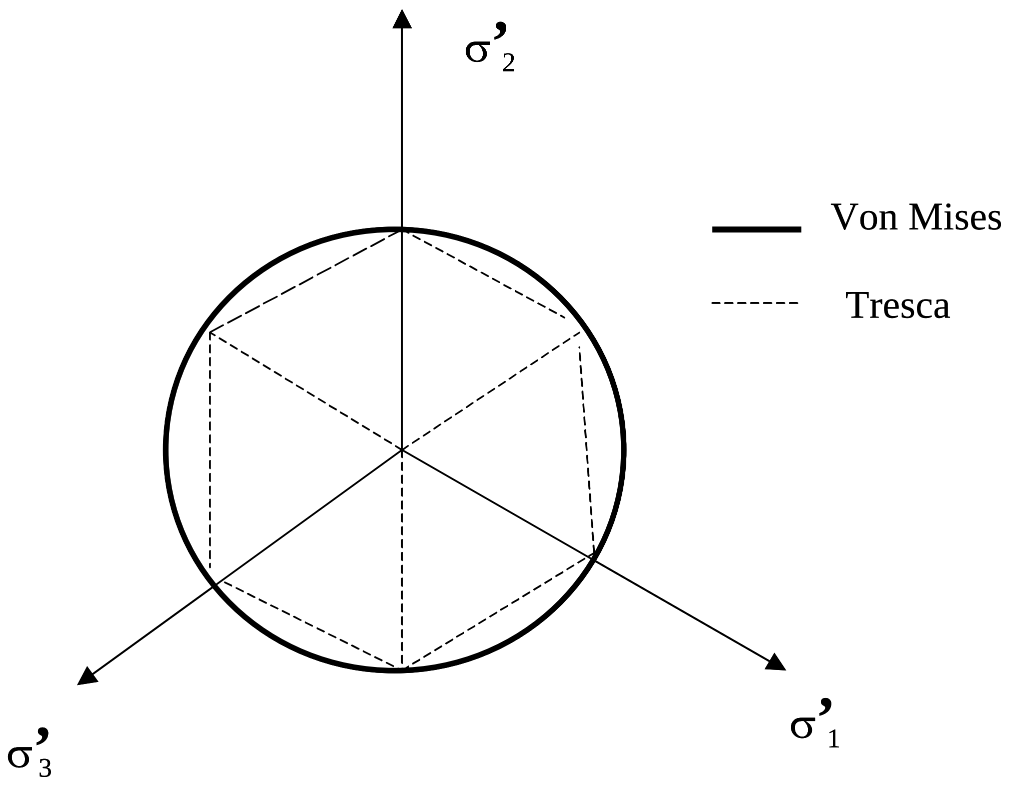
9- La plastificación se produce cuando $\sigma_e \geq \sigma_y$

Tensión equivalente de Von Mises.

SUPERFICIE DE PLASTIFICACION DE VON MISES



COMPARACIÓN ENTRE LOS LUGARES DE PLASTIFICACIÓN DE TRESCA Y VON MISES:



TENSIÓN EQUIVALENTE DE VON MISES

$$\sigma' = \sqrt{\tfrac{1}{2}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right]}$$

PLASTIFICACIÓN:

$$\sigma' \leq \sigma_y$$