

Ejercicio 1.5

El tensor de tensiones en un punto de un sólido viene definido, respecto de un sistema de coordenadas cartesianas, por la siguiente matriz:

$$[T] = \begin{bmatrix} 50 & -20 & 0 \\ -20 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1.- Determinar de forma analítica:

- Los dos primeros invariantes del tensor de tensiones
- Los valores de las tres tensiones principales
- Los tres vectores unitarios que definen las tres direcciones principales
- La tensión tangencial máxima que se produce en las proximidades del punto considerado

a) $I_1 = 50 + 20 = 70$
 $I_2 = 50 \cdot 20 - 20^2 = 600$

b) Una de las tensiones principales (σ_z) es nula. Las otras dos las calcularemos resolviendo:

$$|T - \sigma I| = 0 \quad \begin{vmatrix} 50 - \sigma & -20 \\ -20 & 20 - \sigma \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \sigma_1 = 60 \quad \sigma_2 = 10$$

Por tanto, las tensiones principales son: $\sigma_1 = 60 \quad \sigma_2 = 10 \quad y \quad \sigma_3 = 0$

c) Como el eje z es una dirección principal ($\vec{u}_3 = \vec{k}$), las otras dos las calcularemos resolviendo: $\begin{bmatrix} 50 - \sigma & -20 \\ -20 & 20 - \sigma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

Dirección principal 1: $\begin{bmatrix} -10 & -20 \\ -20 & -40 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \vec{u}_1 = 0,8943\vec{i} - 0,4473\vec{j}$

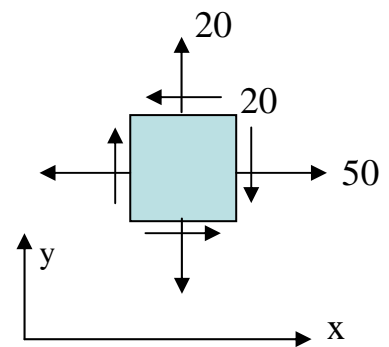
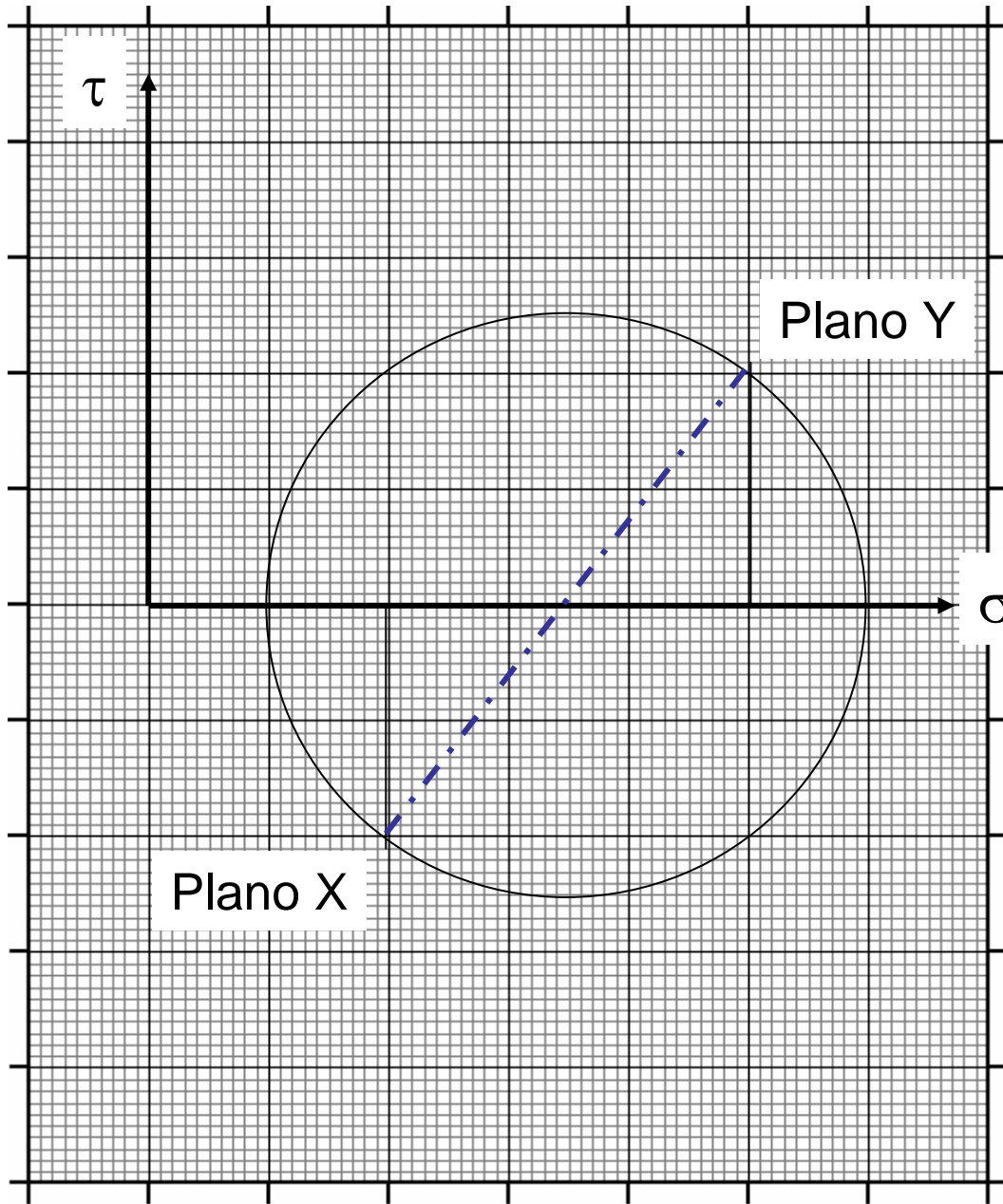
Dirección principal 2: $\begin{bmatrix} 40 & -20 \\ -20 & 10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \vec{u}_2 = 0,4473\vec{i} + 0,8943\vec{j}$

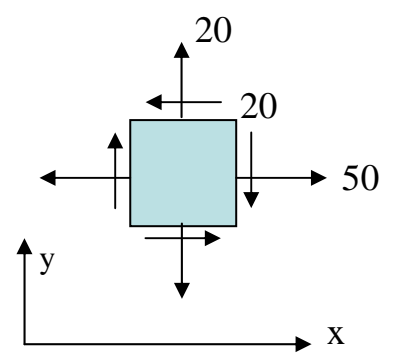
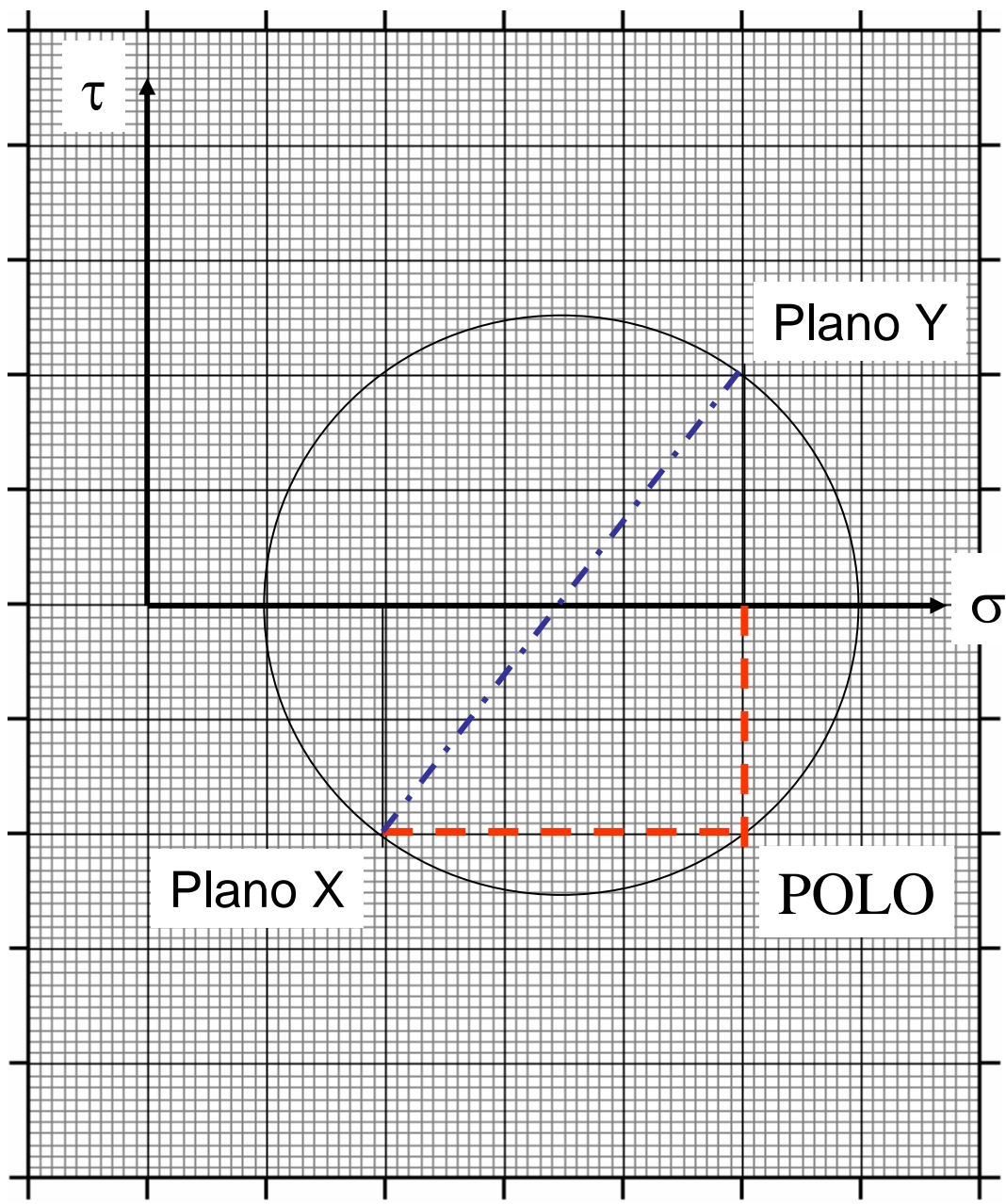
d) La tensión tangencial máxima será:

$$\tau_{\max} = \max\left(\frac{60-10}{2}, \frac{60}{2}, \frac{10}{2}\right) = \max(25, 30, 5) = 30$$

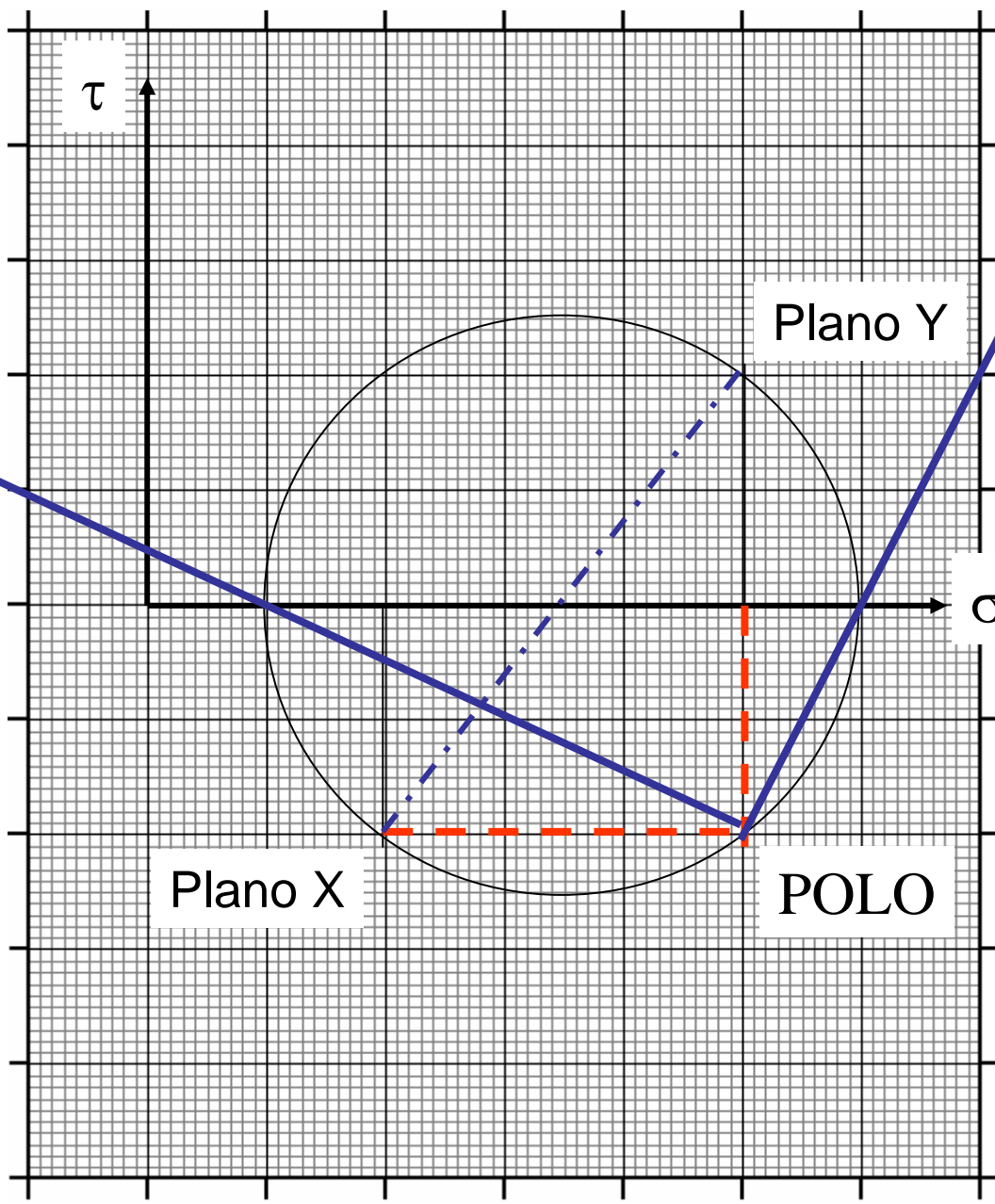
2.- Para el estado tensional relativo al plano x - y , **determinar gráficamente:**

- e) El círculo de Mohr
- f) Las coordenadas (σ, τ) del polo de dicho círculo
- g) Los dos planos principales que se obtienen de dicho círculo
- h) Los dos planos sobre los que actúa la tensión tangencial máxima
- i) Los planos, paralelos al eje z , sobre los que el vector tensión forma el mayor ángulo posible con la normal a dichos planos.
- j) El plano al que representa el polo del círculo de Mohr

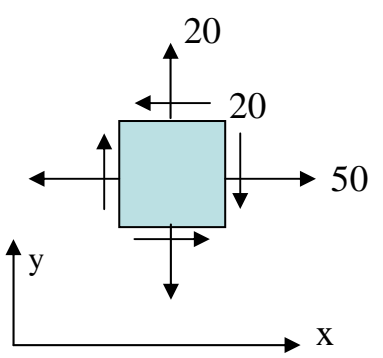




Plano principal II

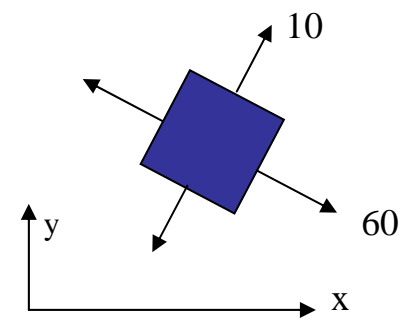


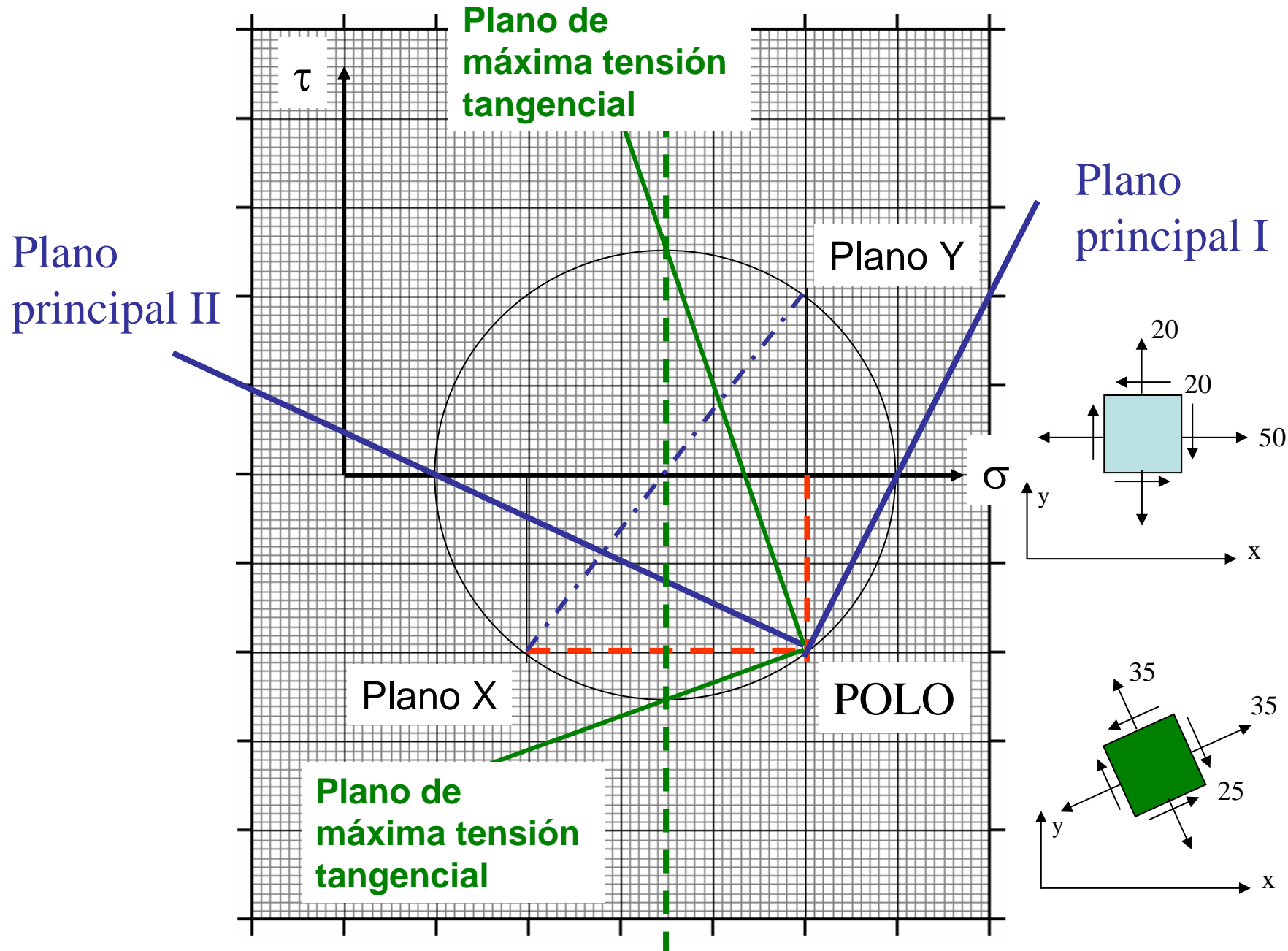
Plano principal I

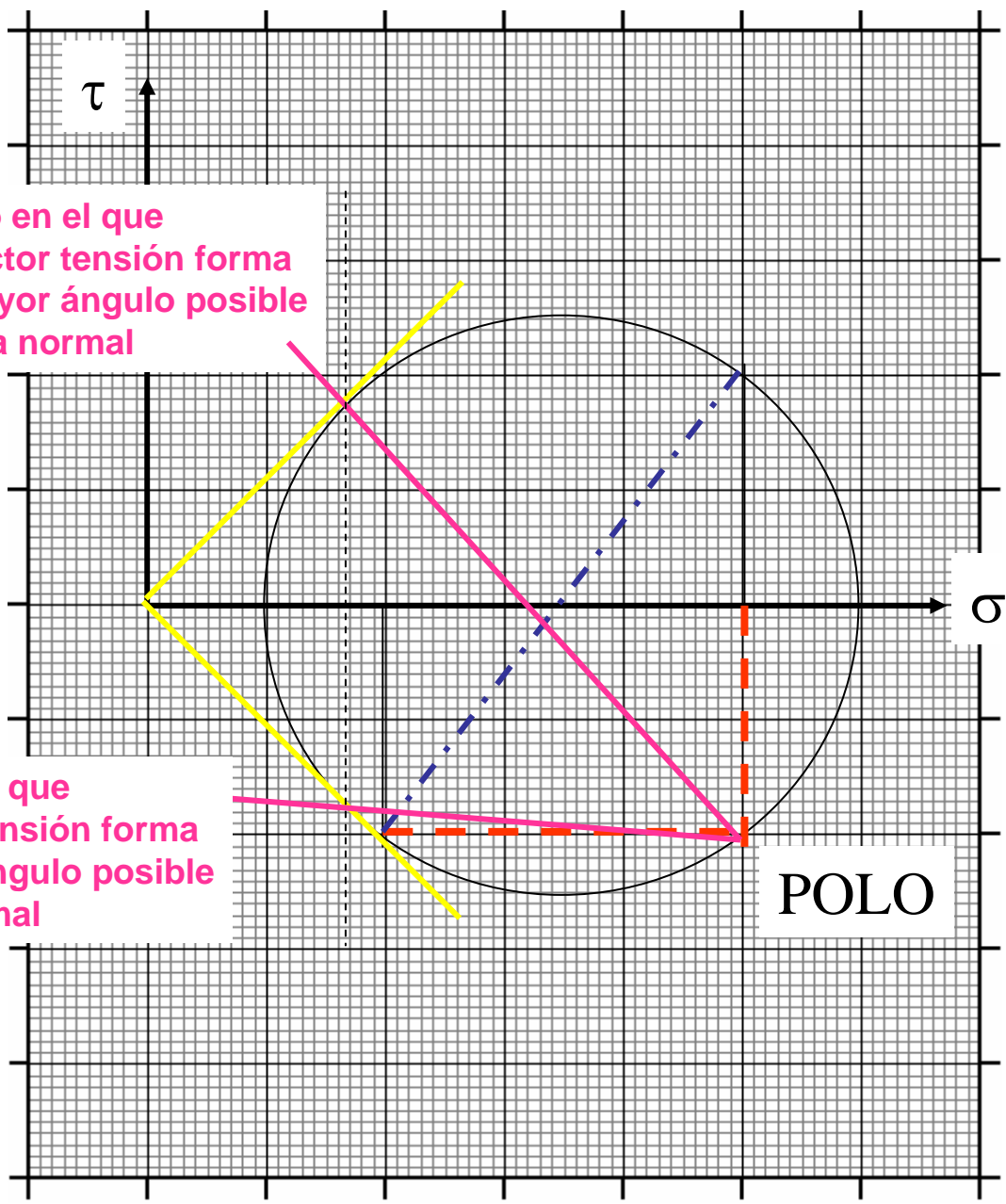


Plano X

POLO



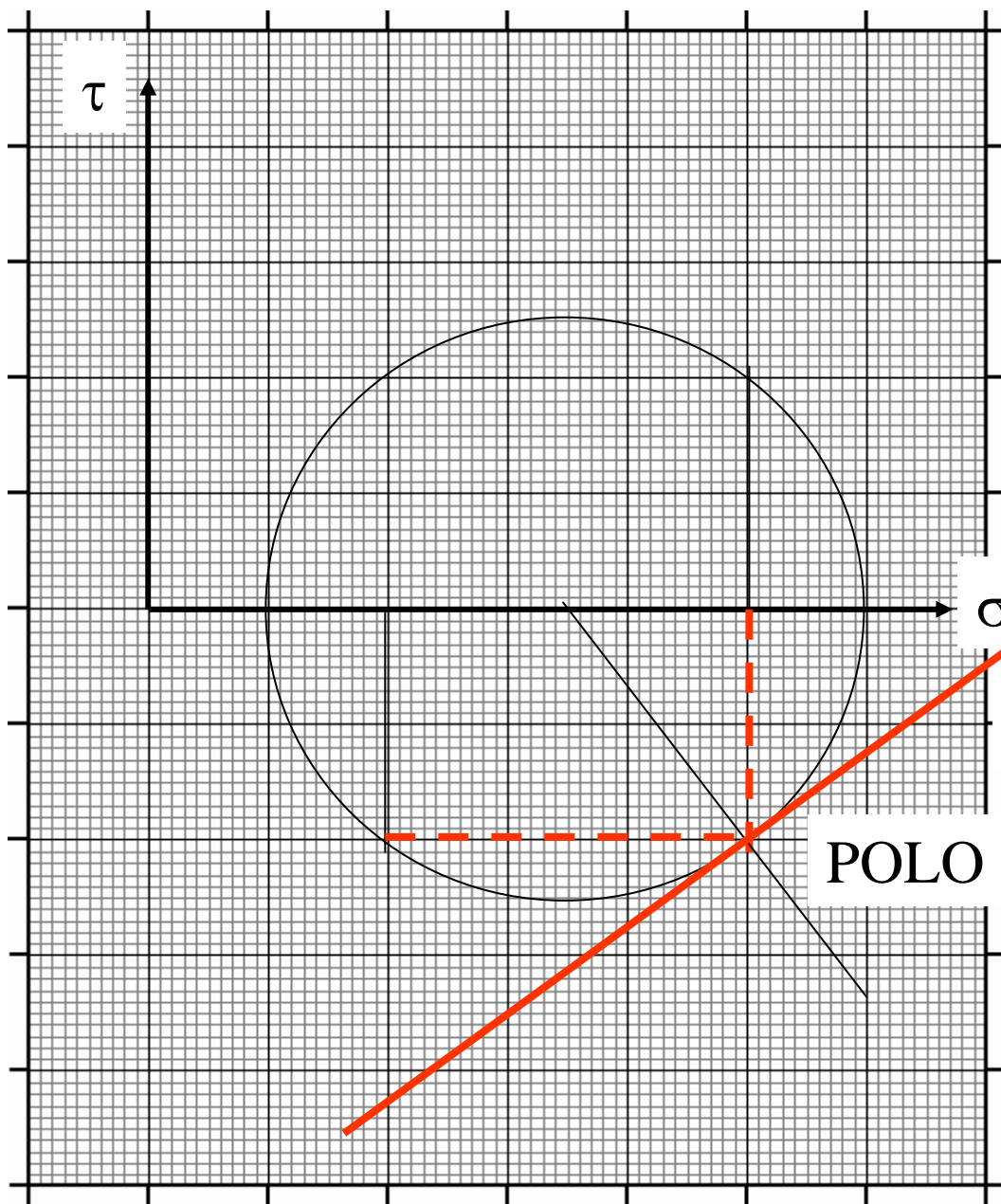




Plano en el que el vector tensión forma el mayor ángulo posible con la normal

Plano en el que el vector tensión forma el mayor ángulo posible con la normal

POLO



Plano correspondiente al polo del círculo de Mohr

POLO