Ejercicio 2.2

El vector desplazamiento en un punto genérico de un sólido cargado viene dado (referido a un sistema cartesiano de referencia) por:

$$\vec{\delta} = (2\boldsymbol{ax} - 2\boldsymbol{az})\vec{\boldsymbol{i}} + (3\boldsymbol{ax} + 2\boldsymbol{az})\vec{\boldsymbol{k}}$$

donde ***a*** es una constante conocida. Se pide:

a) Expresión del tensor de deformaciones en un punto genérico del sólido
b) ¿Es, físicamente, posible este campo de desplazamientos?
c) ¿Qué lectura proporcionaría una banda extensométrica situada en la dirección de la bisectriz del primer cuadrante del sistema cartesiano que se utiliza?

a) El tensor de deformaciones se obtiene del campo de desplazamientos como sigue:

$$u = u(x, y, z) = 2ax - 2az$$
$$v = v(x, y, z) = 0$$
$$w = w(x, y, z) = 3ax + 2az$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 2a$$
$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$
$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial x} = 2a$$
$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$
$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -2a + 3a = a$$
$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

El tensor de deformaciones es:

$$[D] = \begin{bmatrix} 2a & 0 & a/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ a/2 & 0 & 2a \end{bmatrix}$$

b) Para que el campo de desplazamientos, o el de deformaciones que de él se derivan, sea físicamente posible, debemos comprobar que se satisfacen las ecuaciones de compatibilidad de deformaciones:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \cdot \partial y}; \quad 2 \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \cdot \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right.$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \cdot \partial z}; \quad 2 \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \cdot \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \cdot \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \cdot \partial z}; \quad 2 \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \cdot \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \cdot \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)$$

En estas ecuaciones sólo aparecen derivadas segundas de las deformaciones, por lo que se verifica automáticamente al ser el campo deformaciones líneal. Por tanto, el campo de desplazamientos dado es físicamente posible.

c) El vector unitario de la bisectriz del primer cuadrante del es:

$$\vec{\boldsymbol{u}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{\boldsymbol{i}} + \vec{\boldsymbol{j}} + \vec{\boldsymbol{k}})$$

El vector deformación unitaria sería:

$$\{\vec{\varepsilon}\,*\} = [D]\{\vec{u}\} = \begin{bmatrix} 2a & 0 & a/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ a/2 & 0 & 2a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{Bmatrix} 5a/2 \\ 0 \\ 5a/2 \end{Bmatrix}$$

La deformación longitudinal correspondiente (la medida de la banda) es:

$$\varepsilon = \vec{\varepsilon}\,* \cdot \vec{u} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left\| 5a/2 \quad 0 \quad 5a/2 \right\| \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\left(\frac{5a}{2} + \frac{5a}{2}\right) = \frac{5}{3}a$$