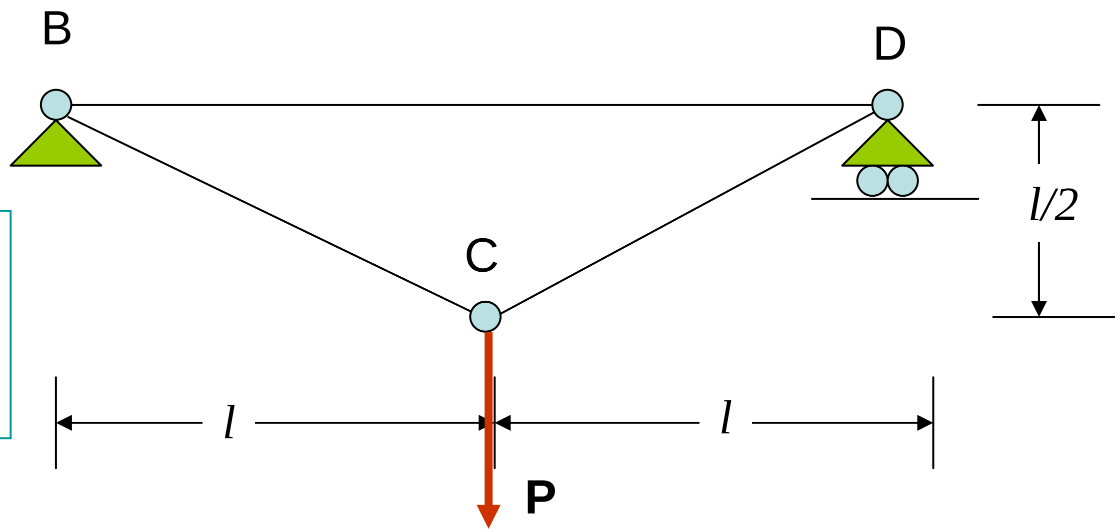
Ejercicio 6.6

En el sistema articulado de la figura formado por tres barras de idéntico material y siendo las áreas de sus respectivas secciones transversales: A, para las barras BC y CD, y 2A para la barra BD, determinar, cuando, sobre él actúa la carga P:

a.- Las fuerzas axiles a las que se encuentran sometidas cada una de las barras

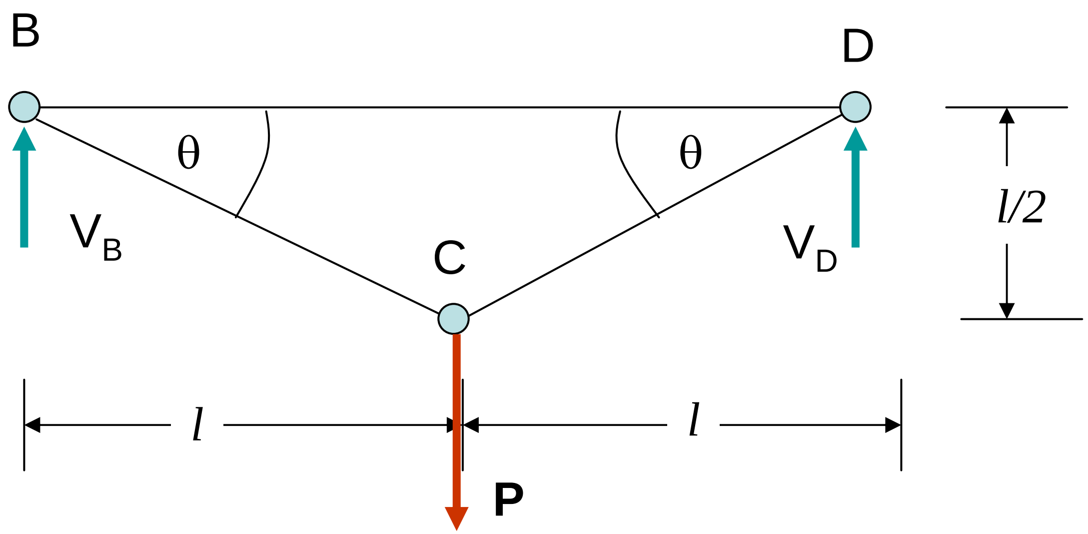
b.- La energía elástica que almacena el sistema

c.- El desplazamiento vertical del nudo C y el horizontal del nudo D.



Áreas:
Barra BD: 2A
Barras BC y CD: A

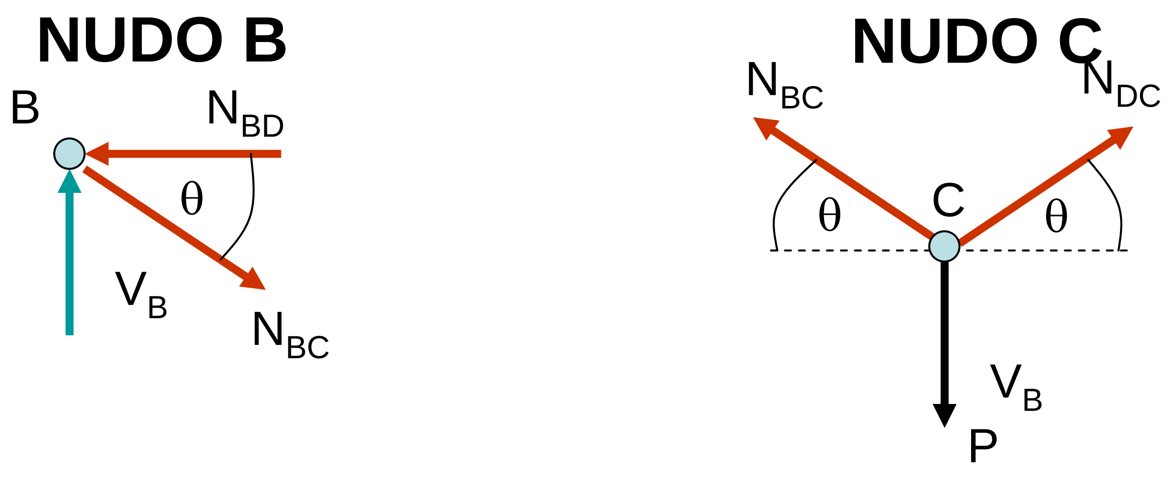
ASPECTOS GEOMÉTRICOS DE LA ESTRUCTURA ARTICULADA



$$\theta = \arctan\left(\frac{l/2}{l}\right) = 26{,}565^{o}$$

$$CD = CB = \frac{l}{\cos\theta} = 1{,}118l$$

RESOLUCIÓN DE LA EXTRUCTURA POR EQUILIBRIO DE NUDOS:



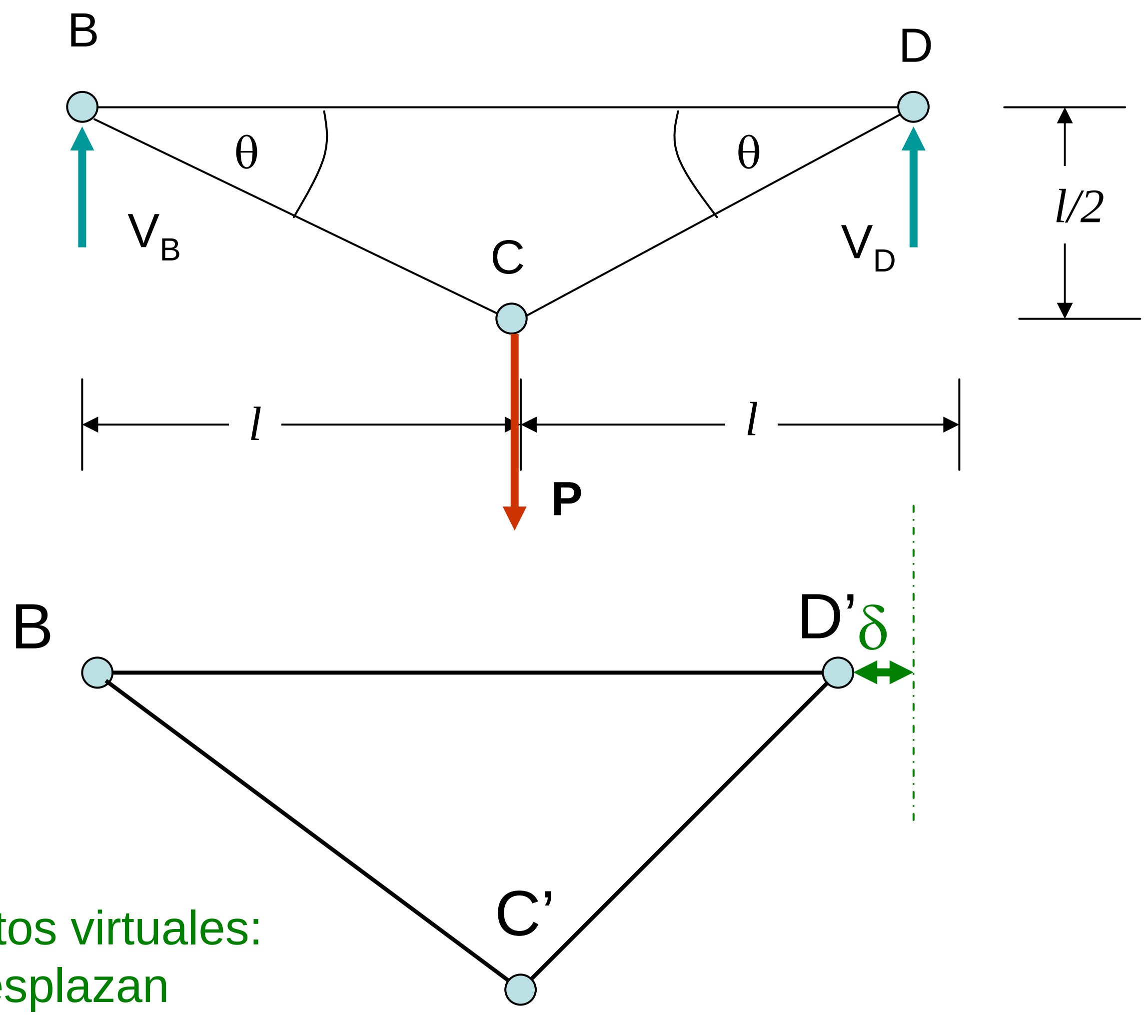
$$\boldsymbol{N_{BC}=N_{CD}} \text{ por simetría}$$

$$2N_{CD}sen\theta = P$$

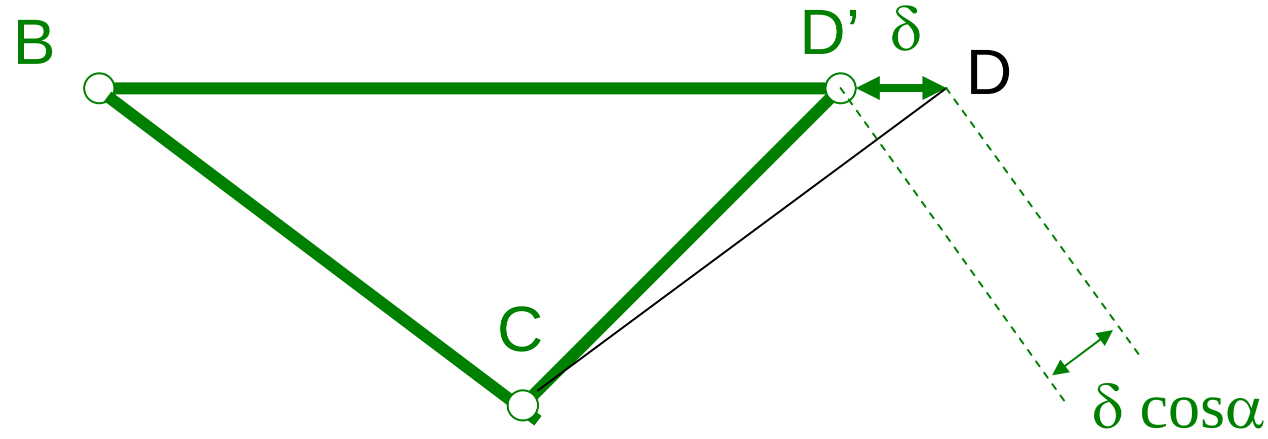
$$N_{DC} = N_{BC} = 1{,}118P$$

$$N_{BD} = 1{,}118P \cdot \cos\theta = P$$

RESOLUCIÓN DE LA ESTRUCTURA POR EL P.T.V.:



Desplazamientos virtuales:
B y C no se desplazan
D lo hace hacia su izquierda
una magnitud δ



$$\varepsilon_{CD}^{\delta} = \frac{\delta\cos\alpha}{l'} \qquad \varepsilon_{BD}^{\delta} = \frac{\delta}{2l}$$

Trabajo fuerzas actuantes: $\delta W_{ext}=0$

Trabajo fuerzas internas:

$$\delta W_{\text{int}} = \sigma_{CD}\varepsilon_{CD}^{\delta}\cdot Al' + \sigma_{BD}\varepsilon_{BD}^{\delta}\cdot(2A\cdot 2l) = \sigma_{CD}\frac{\delta\cos\alpha}{l'}\cdot Al' + \sigma_{BD}\frac{\delta}{2l}(2A\cdot 2l) =$$

$$= \frac{N_{CD}}{A}\frac{\delta\cos\alpha}{l'}\cdot Al + \frac{N_{BD}}{2A}\frac{\delta}{2l}(2A\cdot 2l) = N_{CD}\cdot\delta\cos\alpha + N_{BD}\cdot\delta$$

$$\delta W_{ext} = \delta W_{\text{int}} \quad\Rightarrow\quad 0 = N_{CD}\cdot\delta\cos\alpha + N_{BD}\cdot\delta \quad \forall\delta \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad N_{CD}\cdot\cos\alpha + N_{BD} = 0$$

$$U = U_{DB} + U_{BC} + U_{CD} = \frac{P^2(2l)}{2\cdot(2A)\cdot E} +$$

$$+ \frac{(1{,}118P)^2(1{,}118l)}{2\cdot A\cdot E} + \frac{(1{,}118P)^2(1{,}118l)}{2\cdot A\cdot E} =$$

$$= \frac{1{,}898P^2 l}{AE}$$

$$\boxed{U = W}$$

NUDO C:

$$\frac{1}{2}Pd = \frac{1{,}898P^2 l}{AE} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{3{,}796Pl}{AE}$$

NUDO D:

$$\bar{u} = \varepsilon_{BD}\cdot(2l) = \frac{P/2A}{E} = \frac{P\cdot(2l)}{2EA} = \frac{P\cdot l}{EA}$$

PRIMER TEOREMA DE CASTIGLIANO:

$$d = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{1{,}898 \cdot 2Pl}{AE} = \frac{3{,}796Pl}{AE}$$