Sea el laminado definido por:

Lámina	*Espesor (m)*	*E_1 (MPa)*	*E_2 (MPa)*	*ν_{21}*	*G_{12} (MPa)*
1	0.001	50000	15000	0.25	8000
2	0.050	200	200	0.40	70
3	0.001	50000	15000	0.25	8000

1.- Sabiendo que el tensor de tensiones es:

CARA SUPERIOR.

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 60 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

CARA INFERIOR

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

Determinar:

a) La matriz de rigidez del laminado.
b) Los vectores de deformaciones y curvaturas.
c) El estado de carga al que está sometido el laminado..

2.- Se elimina ahora la lámina central y se somete al laminado así construido al estado de carga calculado en el apartado 1.c). Determinar:

a) La nueva matriz de rigidez
b) Los vectores de deformaciones y curvaturas.

1.-
a). Primero se calculan los coeficientes que faltan:

$$\nu_{12} = \nu_{21} \cdot \frac{E_2}{E_1}$$

Lámina	**ν_{12}**
1	0.075
2	0.400
3	0.075

2. Matrices de rigidez de cada lámina:

LAMINA 1 y 3

$$[Q] = \begin{bmatrix} 50995.41 & 3821.66 & 0 \\ 3821.66 & 15286.62 & 0 \\ 0 & 0 & 8000 \end{bmatrix} \textbf{ MPa}$$

LAMINA 2

$$[Q]=\begin{bmatrix}238.10 & 95.24 & 0\\ 95.24 & 238.10 & 0\\ 0 & 0 & 70\end{bmatrix}\ \mathbf{MPa}$$

LAMINA	Z_i (m)	Z_{i-1} (m)	h_i (m)	Δ_i^2 (m^2)	Δ_i^3 (m^3)
1	0.026	0.025	0.001	$25.5\cdot10^{-6}$	$6.5\cdot10^{-7}$
2	0.025	-0.025	0.050	0	$1.04\cdot10^{-5}$
3	-0.025	-0.026	0.001	$-25.5\cdot10^{-6}$	$6.5\cdot10^{-7}$

Donde :

$$\Delta_i^2=\frac{Z_i^2-Z_{i-1}^2}{2} \qquad \Delta_i^3=\frac{Z_i^3-Z_{i-1}^3}{3}$$

MATRIZ A.

$$[A]=\sum[Q_i]\cdot h_i$$

$$[A]=\begin{bmatrix}113.82 & 12.40 & 0\\ 12.40 & 42.48 & 0\\ 0 & 0 & 19.50\end{bmatrix}\ \text{MN/m}$$

MATRIZ B
Por ser laminado simétrico esta matriz es nula.

MATRIZ D

$$[D]=\sum[Q_i]\cdot\Delta_i^3$$

$$[D]=\begin{bmatrix}68.72 & 5.96 & 0\\ 5.96 & 22.35 & 0\\ 0 & 0 & 11.13\end{bmatrix}\cdot10^{-3}\ \text{MN}$$

b) Conocemos la tensión en la lámina superior y en la inferior. Colocando el origen de los ejes en el punto medio del laminado.

En z = 0.026 (lamina 1)

$$\{\sigma\}=\begin{Bmatrix}60\\ 2\\ 0\end{Bmatrix}=[Q]\cdot\{\varepsilon\}_{\text{sup}}$$

Como se conoce la matriz de rigidez de esa lámina se puede obtener la deformación en la lámina superior.

$$\{\varepsilon\}_{\text{sup}} = \begin{Bmatrix} 1.189 \\ -0.166 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

En z = -0.026 (lamina 3)

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} 20 \\ -2 \\ 0 \end{Bmatrix} = [Q] \cdot \{\varepsilon\}_{\text{inf}}$$

Como se conoce la matriz de rigidez de esa lámina se puede obtener la deformación en la lámina inferior.

$$\{\varepsilon\}_{\text{inf}} = \begin{Bmatrix} 0.410 \\ -0.233 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

Como la distribución de deformaciones es lineal a lo largo del espesor.

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon^{o}\} + z \cdot \{k\}$$

$$\begin{Bmatrix} 1.189 \\ -0.166 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-3} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + 0.026 \cdot \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} 0.410 \\ -0.233 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-3} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} - 0.026 \cdot \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix}$$

De donde:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.8 \\ -0.2 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

$$\begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 14.98 \\ 1.30 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-3} \quad 1/\text{m}$$

c) $\{N\} = [A] \cdot \{\varepsilon^{o}\}$

$\{M\} = [D] \cdot \{k\}$

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.089 \\ 0.001 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{MN/m}$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.03 \\ 0.118 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-3} \, \text{MN}$$

2.-
a) MATRIZ A

$$[A] = \begin{bmatrix} 102 & 7.64 & 0 \\ 7.64 & 30.6 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix} \quad \text{MN/m}$$

MATRIZ D

$$[D] = \begin{bmatrix} 34 & 2.55 & 0 \\ 2.55 & 10.2 & 0 \\ 0 & 0 & 5.33 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3} \quad \text{MN}$$

b)

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.88 \\ -0.17 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

$$\begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 30.24 \\ 4.06 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-3} \quad \text{1/m}$$

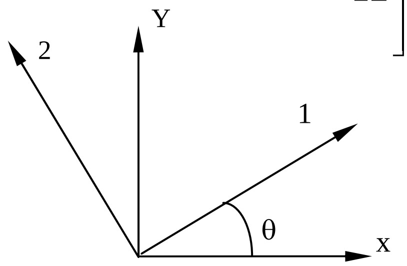
Un laminado de fibra de vidrio en matriz poliester presenta la siguiente secuencia de apilado: $[45_2\ /\ -45_2\ /\ 0]_s$. Calcule el módulo de elasticidad aparente del laminado en dirección X y dirección Y.

E_1 = 40 GPa **G_{12} =2.8 GPa**
E_2 = 9.8 GPa **ν_{21} = 0,3**

Matriz de rigidez de una lámina en ejes materiales.

$$[Q]=\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Qss \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{E_1}{1-\nu_{12}\bullet\nu_{21}} & \dfrac{\nu_{21}\bullet E_2}{1-\nu_{12}\bullet\nu_{21}} & 0 \\ \dfrac{\nu_{12}\bullet E_1}{1-\nu_{12}\bullet\nu_{21}} & \dfrac{E_2}{1-\nu_{12}\bullet\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix}$$

$$[Q]=\begin{bmatrix} 40.90 & 3.01 & 0 \\ 3.01 & 10.02 & 0 \\ 0 & 0 & 2.80 \end{bmatrix}\ \text{GPa}$$



Matriz de rigidez de las láminas a 45º.

Utilizando las expresiones para el cálculo de la matriz de rigidez para cualquier orientación de fibras se obtiene:

$$[Q]=\begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xS} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{Sx} & Q_{Sy} & Qss \end{bmatrix}$$

ejes xy: ejes globales
ejes 12: ejes materiales

Llamando: cos θ = C
sin θ = S

$$Q_{xx}=Q_{11}\bullet C^4+2\bullet(Q_{12}+2\bullet Q_{SS})\bullet S^2\bullet C^2+Q_{22}\bullet S^4$$

$$Q_{yx} = (Q_{11} + Q_{22} - 4 \bullet Q_{SS}) \bullet S^2 \bullet C^2 + Q_{12} \bullet (S^4 + C^4)$$
$$Q_{yy} = Q_{11} \bullet S^4 + 2 \bullet (Q_{12} + 2 \bullet Q_{SS}) \bullet S^2 \bullet C^2 + Q_{22} \bullet C^4$$
$$Q_{xS} = (Q_{11} - Q_{12} - 2 \bullet Q_{SS}) \bullet S \bullet C^3 + (Q_{12} - Q_{22} + 2 \bullet Q_{SS}) \bullet S^3 \bullet C$$
$$Q_{yS} = (Q_{11} - Q_{12} - 2 \bullet Q_{SS}) \bullet S^3 \bullet C + (Q_{12} - Q_{22} + 2 \bullet Q_{SS}) \bullet S \bullet C^3$$
$$Q_{SS} = (Q_{11} + Q_{22} - 2 \bullet Q_{12} - 2 \bullet Q_{SS}) \bullet S^2 \bullet C^2 + Q_{SS} \bullet (S^4 + C^4)$$

$$[Q] = \begin{bmatrix} 17.03 & 11.43 & 7.72 \\ 11.43 & 17.03 & 7.72 \\ 7.72 & 7.72 & 7.01 \end{bmatrix} \text{GPa}$$

Matriz de rigidez de las láminas a -45º.
Análogamente al caso de 45º:

$$[Q] = \begin{bmatrix} 17.03 & 11.43 & -7.72 \\ 11.43 & 17.03 & -7.72 \\ -7.72 & -7.72 & 7.01 \end{bmatrix} \text{GPa}$$

Matriz de rigidez en tensión plana del laminado.

$$[A] = \sum_i [Q]_i \bullet h_i$$

En este caso la matriz es: $[A] = ([Q]_{0^o} + 2 \cdot [Q]_{45^o} + 2 \cdot [Q]_{-45^o}) \bullet 2 \bullet h$.
Siendo ***h*** el espesor de una lámina.

$$[A] = \begin{bmatrix} 218.04 & 97.46 & 0 \\ 97.46 & 156.28 & 0 \\ 0 & 0 & 61.68 \end{bmatrix} \cdot 10^9 \cdot h \quad \text{N/m}$$

Matriz de rigidez normalizada en tensión plana del laminado.

$$[A^*] = \frac{[A]}{10 \cdot h} = \begin{bmatrix} 21.80 & 9.75 & 0 \\ 9.75 & 15.63 & 0 \\ 0 & 0 & 6.17 \end{bmatrix} \text{GPa}$$

- Aplicando un esfuerzo de tracción en dirección X.

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_x \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

O en forma de tensión media que actúa sobre el laminado

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x^o \\ \sigma_y^o \\ \tau_{xy}^o \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

La relación entre tensiones medias y deformaciones en el laminado es:

$$\{\sigma\} = \left[A^*\right] \cdot \{\varepsilon\}$$

Se puede calcular el estado de deformaciones para el estado de carga aplicado.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.06362 \\ -0.03969 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-9} \cdot \sigma_x$$

En particular en dirección del eje X la relación entre deformación y tensión es:

$$\varepsilon_x = 0.06362 \cdot 10^{-9} \cdot \sigma_x$$

Por tanto el módulo de elasticidad aparente en dirección X es:

E_x = 15.72 GPa

- Aplicando un esfuerzo de tracción en dirección Y.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x^o \\ \sigma_y^o \\ \tau_{xy}^o \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \sigma_y \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Ahora el estado de deformaciones es:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.03969 \\ 0.08874 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-9} \cdot \sigma_y$$

En dirección del eje Y.

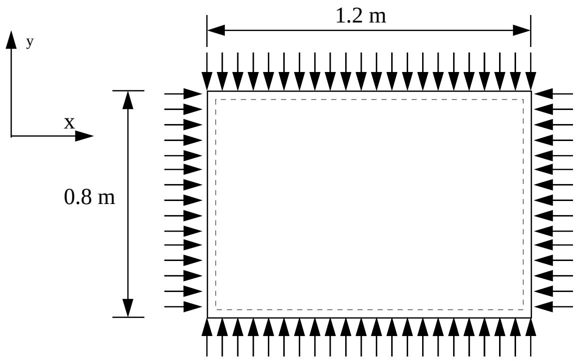
$$\varepsilon_y = 0.08874 \cdot 10^{-9} \cdot \sigma_y$$

Por tanto el módulo de elasticidad aparente en dirección Y es:

E_y = 11.27 GPa

Se desea fabricar una placa laminada a base de láminas compuestas de fibra de vidrio en matriz epoxi (PRFV). El laminado se forma mediante n sublaminados cada uno de los cuales contiene 2 láminas con las fibras orientadas según el eje X y tres láminas orientadas según el eje Y, por lo que el laminado estará formado por 5n láminas. Dicho laminado está sometido a un estado de equicompresión en su plano definido por: $N_X = N_Y = -0.85$ MN/m.

1. Determinar el número de sublaminados, n, que serán necesarios para resistir esta solicitación con un coeficiente de seguridad de 2 y de acuerdo con el criterio de Tsai-Hill.
2. Determinar la disminución de las dimensiones de la placa así dimensionada.



DATOS:

E_1 =	38600 MPa	X =	610 MPa
E_2 =	8300 MPa	Y =	118 MPa
ν_{21} =	0.26	S =	72 MPa
G_{12} =	4100 MPa		

Espesor de cada lámina: 1 mm

----

a) Se calcula la matriz de rigidez de cada lámina.

- Láminas a 0º.

$$[Q]_{0^\circ} = \begin{bmatrix} 39169 & 2190 & 0 \\ 2190 & 8422 & 0 \\ 0 & 0 & 4100 \end{bmatrix} \text{Mpa}$$

- Láminas a 90º.

$$[Q]_{90^\circ} = \begin{bmatrix} 8422 & 2190 & 0 \\ 2190 & 39169 & 0 \\ 0 & 0 & 4100 \end{bmatrix} \text{Mpa}$$

Con estas matrices se construye la matriz de rigidez plana del laminado.

$$\{N\} = [A] \cdot \{\varepsilon^\circ\}$$

$$[A] = \sum_1^N [Q]_i \cdot h_i$$

En este caso la matriz es:

$$[A] = \left(2 \cdot n \cdot [Q]_{0^\circ} + 3 \cdot n \cdot [Q]_{90^\circ}\right) \cdot h$$

$$[A]=\begin{bmatrix}103.60 & 10.95 & 0\\ 10.95 & 134.35 & 0\\ 0 & 0 & 20.50\end{bmatrix}\cdot n \quad \text{MN·m}^{-1}$$

Se conocen los esfuerzos en su plano:

$$\begin{Bmatrix}N_x\\ N_y\\ N_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-0.85\\ -0.85\\ 0\end{Bmatrix} \quad \text{MN·m}^{-1}$$

Se pueden conocer las deformaciones que sufre el laminado.

$$\begin{bmatrix}103.60 & 10.95 & 0\\ 10.95 & 134.45 & 0\\ 0 & 0 & 20.50\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}\cdot n=\begin{Bmatrix}-0.85\\ -0.85\\ 0\end{Bmatrix}$$

De donde se obtiene:

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-7.601\\ -5.707\\ 0\end{Bmatrix}\cdot 10^{-3}\cdot\frac{1}{n}$$

Para calcular el número de sublaminados necesario para que la placa no rompa se analizan las tensiones en cada lámina utilizando la matriz de rigidez de cada lámina.

- Láminas a 0º.

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}39169 & 2190 & 0\\ 2190 & 8422 & 0\\ 0 & 0 & 4100\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}-7.601\\ -5.707\\ \end{Bmatrix}\cdot 10^{-3}\cdot\frac{1}{n}$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_{xy}\end{Bmatrix}=\frac{1}{n}\cdot\begin{Bmatrix}-310.22\\ -64.71\\ 0\end{Bmatrix} \quad \text{MPa}$$

Aplicando el criterio de Tsai-Hill.

$$\left(\frac{310.22}{610/2}\right)^2+\left(\frac{64.71}{118/2}\right)^2-\frac{310.22\cdot 64.71}{(610/2)^2}=n^2$$

La razón por la que se han dividido las resistencias del laminado por dos es para considerar el factor de seguridad tal como se indica en el enunciado.

$$n = 1.42 \sim 2$$

- Láminas a 90º.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 8422 & 2190 & 0 \\ 2190 & 39169 & 0 \\ 0 & 0 & 4100 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -7.601 \\ -5.707 \\ \end{Bmatrix} \cdot 10^{-3} \cdot \frac{1}{n}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{n} \cdot \begin{Bmatrix} -76.51 \\ -240.18 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ MPa}$$

Aplicando el criterio de Tsai-Hill.

El criterio debe aplicarse en ejes locales de la lámina, en estos ejes las tensiones los valores de las resistencias son:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{x^*} \\ \sigma_{y^*} \\ \sigma_{xy^*} \end{Bmatrix} = \frac{1}{n} \cdot \begin{Bmatrix} -240.18 \\ -76.51 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$X^* = 610$ MPa

$Y^* = 118$ MPa

$$\left(\frac{240.18}{610/2}\right)^2 + \left(\frac{76.51}{118/2}\right)^2 - \frac{76.51 \cdot 240.18}{(610/2)^2} = n^2$$

$n = 1.45 \sim 2$

Por tanto el número de sublaminados mínimo es de 2.

b) Disminución de las dimensiones.

$$\frac{\Delta L_1}{L_1} = \varepsilon_1 \longrightarrow \Delta L_1 = 4.56 \text{ mm}$$

$$\frac{\Delta L_2}{L_2} = \varepsilon_2 \longrightarrow \Delta L_1 = 2.28 \text{ mm}$$

Se construye un laminado simétrico formado por cuatro láminas iguales, dos orientadas a 0º y otras dos a 90º. El laminado está sometido a un esfuerzo de tracción en la dirección X.

1. Determínese dicho laminado.
2. Calcular las matrices de rigidez en ejes globales de cada una de las láminas.
3. Calcular la matriz de rigidez plana del laminado.
4. Determinar el estado de deformaciones existente en el laminado en función del esfuerzo aplicado.
5. Estimar el esfuerzo que produce la rotura de la primera lámina. Se empleará el criterio de tensión máxima.
6. Repetir el cálculo para la rotura de última lámina

DATOS:

Módulos elásticos	**Resistencias**	**Espesor lámina**
E_1 **= 50 GPa**	**X = 400 MPa**	**h = 0.2 mm**
E_2 **= 10 GPa**	**Y = 30 MPa**	
G_{12} **= 8 GPa**		
ν_{21} **= 0.25**		

---

1. El laminado es: $[0/90]_S$

2. Primero se determina el coeficiente que falta:

$$\nu_{12} = \frac{E_2}{E_1} \cdot \nu_{21} = 0.05$$

La matriz de rigidez de las láminas a 0º en ejes globales coincide con la matriz en ejes materiales.

$$[Q]_{0^\circ} = \begin{bmatrix} 50.63 & 2.53 & 0 \\ 2.53 & 10.13 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \text{GPa}$$

Para determinar la matriz de rigidez de las láminas a 90º en ejes globales basta permutar el término Q_{11} con el Q_{22}.

$$[Q]_{90^o} = \begin{bmatrix} 10.13 & 2.53 & 0 \\ 2.53 & 50.63 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \text{GPa}$$

3. La matriz de rigidez plana de un laminado es: $[A] = \sum_i [Q]_i \cdot h_i$. En este caso la expresión se reduce a:

$$[A] = 2 \cdot h \cdot \left([Q]_{0^o} + [Q]_{90^o}\right)$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 24.02 & 2.02 & 0 \\ 2.02 & 24.30 & 0 \\ 0 & 0 & 6.4 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \text{ N/m}$$

4.
Para un laminado simétrico la relación entre esfuerzos y deformaciones es:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = [Q] \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 41.44 \\ -3.44 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-9} \cdot N_x$$

5.
Tensiones en las láminas a 0º.

$$\{\sigma\}_{0^o} = [Q]_{0^o} \cdot \{\varepsilon\} \cdot$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{0^o} = \begin{Bmatrix} 2089.40 \\ 69.99 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot N_x \text{ Pa}$$

Tensiones en las láminas a 90º.

$$\{\sigma\}_{90º} = [Q]_{90º} \cdot \{\varepsilon\} \cdot$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{90º} = \begin{Bmatrix} 411.08 \\ -69.32 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot N_x \, \text{Pa}$$

Rotura láminas a 0º con el criterio de tensión máxima

Expresando las tensiones en ejes materiales de la lámina

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}_{0º} = \begin{Bmatrix} 2089.40 \\ 69.99 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot N_x \, \text{Pa}$$

Aplicando el criterio de la tensión máxima.

$$\sigma_1 < X$$
$$\sigma_2 < Y$$
$$|\tau_{12}| < S$$

$$2089.40 \cdot N_x < 400 \cdot 10^6$$
$$69.99 \cdot N_x < 30 \cdot 10^6$$

N_x = 191.44 kN/m

Rotura láminas a 90º con el criterio de tensión máxima

Expresando las tensiones en ejes materiales de la lámina

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}_{90º} = \begin{Bmatrix} -69.32 \\ 411.03 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot N_x \, \text{Pa}$$

$$-69.32 \cdot N_x < 400 \cdot 10^6$$
$$411.03 \cdot N_x < 30 \cdot 10^6$$

N_x= 72.99 kN/m

El esfuerzo de rotura de primera lámina es 73 kN/m, y las primeras láminas en romperse son las orientadas a 90º.

6.
Ahora solo existen láminas a 0º, la nueva matriz de rigidez del laminado será:

$$[A] = 2 \cdot h \cdot [Q]_{0^o}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 20.05 & 1.01 & 0 \\ 1.01 & 4.05 & 0 \\ 0 & 0 & 3.2 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \text{ N/m}$$

Las deformaciones en el laminado son ahora:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5 \\ -1.25 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-8} \cdot N_x$$

Las tensiones en las láminas a 0º son:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{0^o} = \begin{Bmatrix} 2499.88 \\ -0.125 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot N_x$$

Aplicando el criterio de rotura de tensión máxima

$$2499.88 \cdot N_x < 400 \cdot 10^6$$
$$-0.125 \cdot N_x < 30 \cdot 10^6$$

N_x = 160 kN/m

El esfuerzo de rotura de última lámina es 160 kN/m

Se considera el laminado de carbono/epoxi T300/5208 con la siguiente composición: $[0/90]_S$. Las propiedades del material se encuentran en las tablas adjuntas.

a) **Hallar los esfuerzos N_x que producen la rotura de la primera lámina (RPL) y los que producen rotura de última lámina (RUL). Por simplicidad los esfuerzos N_y y N_{xy} se suponen nulos.**

b) **Calcular las tensiones y deformaciones no mecánicas del laminado para una temperatura de 22ºC si la temperatura de curado es de 122ºC y la humedad es del 1%.**

DATOS:

- **Coeficientes higrotérmicos del laminado:**

  $\alpha_1 = 0.02 \cdot 10^{-6} K^{-1}$ $\qquad$ $\alpha_2 = 22.5 \cdot 10^{-6} K^{-1}$

  $\beta_1 = 0$ $\qquad$ $\beta_2 = 0.6$

- **Espesor de cada lámina:**

  h = 0.125 mm

NOTA: Supóngase que la temperatura en el laminado es aproximadamente constante.

----

a)

1.- Se obtienen las matrices de rigidez de las láminas directamente de la primera tabla.

$$[Q]_{0^\circ} = \begin{bmatrix} 181.81 & 2.90 & 0 \\ 2.90 & 10.35 & 0 \\ 0 & 0 & 7.17 \end{bmatrix} \text{ GPa}$$

$$[Q]_{90^\circ} = \begin{bmatrix} 10.35 & 2.90 & 0 \\ 2.90 & 181.81 & 0 \\ 0 & 0 & 7.17 \end{bmatrix} \text{ GPa}$$

2.- La matriz de rigidez plana del laminado será.

$$\{N\} = [A]\cdot\{\varepsilon^{o}\}\cdot$$

$$[A] = \left([Q]_{0^\circ} + [Q]_{90^\circ}\right)\cdot 2\cdot h$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 48.04 & 1.45 & 0 \\ 1.45 & 48.04 & 0 \\ 0 & 0 & 3.58 \end{bmatrix} \text{ MN·m}^{-1}$$

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = [A]\cdot\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{o} \\ \varepsilon_y^{o} \\ \gamma_{xy}^{o} \end{Bmatrix}$$

Resolviendo:

$$\varepsilon_x^{o} = 2.083\cdot 10^{-8}\cdot N_x$$
$$\varepsilon_y^{o} = -6.289\cdot 10^{-10}\cdot N_x$$

3. Cálculo de las tensiones en cada lámina.

- Láminas a 0º.

$$\{\sigma\}_{0^\circ} = [Q]_{0^\circ}\cdot\{\varepsilon^{o}\}\cdot$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{0^\circ} = \begin{Bmatrix} 3785.3 \\ 53.90 \\ 0 \end{Bmatrix}\cdot N_x$$

Aplicando el criterio de rotura de Tsai-Hill.

$$\left(\frac{\sigma_1}{X}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{Y}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{S}\right)^2 - \frac{\sigma_1\cdot\sigma_2}{X^2} = 1$$

$$\left(\frac{3785.3}{1500\cdot 10^6}\right)^2 + \left(\frac{53.90}{40\cdot 10^6}\right)^2 - \frac{3785.3\cdot 53.90}{\left(1500\cdot 10^6\right)^2} = \frac{1}{N_x^2}$$

De donde se puede despejar el valor del esfuerzo.

$$N_x = 0.351 \text{ MN·m}^{-1}$$

- Láminas a 90º.

$$\{\sigma\}_{90°} = [Q]_{90°} \cdot \{\varepsilon^o\} \cdot$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{90°} = \begin{Bmatrix} 213.60 \\ -53.90 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot N_x$$

Es necesario recordar que el criterio de Tsai-Hill se aplica en ejes locales de la lámina; el campo tensional anterior está expresado, en cambio, en ejes globales. En un caso general esto exigirá aplicar el círculo de Mohr o la matriz de cambio para calcular las tensiones en ejes locales. Para este problema el proceso es más simple:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}_{90°} = \begin{Bmatrix} -53.90 \\ 213.60 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot N_x$$

$$\left(\frac{\sigma_1}{X}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{Y}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{S}\right)^2 - \frac{\sigma_1 \cdot \sigma_2}{X^2} = 1$$

$$\left(\frac{-53.90}{1500 \cdot 10^6}\right)^2 + \left(\frac{213.60}{40 \cdot 10^6}\right)^2 + \frac{53.90 \cdot 213.60}{\left(1500 \cdot 10^6\right)^2} = \frac{1}{N_x^2}$$

$$N_x = 0.187 \text{ MN·m}^{-1}$$

La primera lámina que se rompe es la lámina a 90º. El esfuerzo de rotura de primera lámina es: N_x = 0.187 MN·m^{-1}

Para calcular el esfuerzo N_x de rotura de última lámina se resuelve de nuevo el problema considerando que ahora el laminado sólo tiene dos láminas a 0º. La nueva matriz de rigidez plana es:

$$[A] = \begin{bmatrix} 45.45 & 0.72 & 0 \\ 0.72 & 2.59 & 0 \\ 0 & 0 & 1.79 \end{bmatrix} \text{ MN·m}^{-1}$$

Operando igual que para el laminado intacto:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = [A] \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix}$$

$$\varepsilon_x = 2.209 \cdot 10^{-8} \cdot N_x$$

$$\varepsilon_y = -6.143 \cdot 10^{-9} \cdot N_x$$

Ahora sólo hay láminas a 0º.

$$\{\sigma\}_{0^\circ} = [Q]_{0^\circ} \cdot \{\varepsilon^o\} \cdot$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{0^\circ} = \begin{Bmatrix} 3998 \\ 0.481 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot N_x$$

Aplicando Tsai-Hill.

$$\left(\frac{3998}{1500 \cdot 10^6}\right)^2 + \left(\frac{0.481}{40 \cdot 10^6}\right)^2 - \frac{3998 \cdot 0.481}{\left(1500 \cdot 10^6\right)^2} = \frac{1}{N_x^2}$$

$$N_x = 0.375 \text{ MN·m}^{-1}$$

b)

1. Las deformaciones no mecánicas de las láminas son:

$$e_i = \alpha_i \cdot \Delta T + \beta_i \cdot C$$

Donde:

- α es el coeficiente de dilatación térmico
- β es el coeficiente de humedad
- $\Delta T = T_{servicio} - T_{curado}$

- Para las láminas a 0º.

$e_1 = \ - 2 \cdot 10^{-6}$

$e_2 = \ 3.75 \cdot 10^{-3}$

- Para las láminas a 90º.

$e_x = \ 3.75 \cdot 10^{-3}$

$e_y = \ -2 \cdot 10^{-6}$

2. Esfuerzos sobre el laminado.

Las tensiones que actúan sobre una lámina se pueden relacionar con las deformaciones mecánicas mediante la matriz de rigidez de la lámina.

$$\{\sigma\} = [Q]\cdot\{\varepsilon^m\}\cdot$$

Las deformaciones totales que actúan sobre una lámina son suma de las mecánicas y de las higrotérmicas.

$$\{\varepsilon^o\} = \{\varepsilon^m\} + \{e\}\cdot$$

Por lo tanto:

$$\{\sigma\} = [Q]\cdot\left(\{\varepsilon^o\} - \{e\}\right)$$

Integrando a lo largo del espesor se pueden determinar los esfuerzos que actúan sobre todo el laminado.

$$\{N\} = [A]\cdot\{\varepsilon^o\} - \{N\}^T$$

Donde:

$$\{N\}^T = \int[Q]\cdot\{e\}\cdot dz = 2\cdot h\cdot\left([Q]_{0^o}\cdot\{e\}_{0^o} + [Q]_{90^o}\cdot\{e\}_{90^o}\right)\cdot$$

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix}^T = \begin{Bmatrix} 12.33 \\ 12.33 \\ 0 \end{Bmatrix}\cdot 10^3 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$$

En este caso no existen esfuerzos mecánicos actuando sobre el laminado:

$$\begin{Bmatrix} 12.33 \\ 12.33 \\ 0 \end{Bmatrix}\cdot 10^3 = \begin{bmatrix} 48.04 & 1.45 & 0 \\ 1.45 & 48.04 & 0 \\ 0 & 0 & 3.58 \end{bmatrix}\cdot 10^9\cdot\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix}$$

3. Deformaciones totales sobre el laminado.

Resolviendo el sistema anterior se calculan las deformaciones del laminado.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.49 \\ 2.49 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-7}$$

Esta deformación es la misma para todas las láminas::

4. Deformaciones mecánicas en cada lámina.

$$\left\{\varepsilon^m\right\} = \left\{\varepsilon^o\right\} - \{e\} \cdot$$

- Láminas a 0º.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^m \\ \varepsilon_y^m \\ \gamma_{xy}^m \end{Bmatrix}_{0^\circ} = \begin{Bmatrix} 2.249 \cdot 10^{-6} \\ -3.749 \cdot 10^{-3} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

- Láminas a 90º.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^m \\ \varepsilon_y^m \\ \gamma_{xy}^m \end{Bmatrix}_{90^\circ} = \begin{Bmatrix} -3.749 \cdot 10^{-3} \\ 2.249 \cdot 10^{-6} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

5. Aplicando la matriz de rigidez en cada lámina se pueden calcular las tensiones.

- Láminas a 0º.

$$\{\sigma\}_{0^\circ} = [Q]_{0^\circ} \cdot \left\{\varepsilon^m\right\}_{0^\circ}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{0^\circ} = \begin{Bmatrix} -10.46 \\ -38.79 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ MPa}$$

- Láminas a 90º.

$$\{\sigma\}_{90^\circ} = [Q]_{90^\circ} \cdot \{\varepsilon m\}_{90^\circ}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{90^\circ} = \begin{Bmatrix} -38.79 \\ -10.46 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ MPa}$$

Se puede comprobar que el esfuerzo mecánico que actúa sobre el laminado es nulo :

$$\{N\} = h \cdot \left(3 \cdot \{\sigma\}_{0^\circ} + \{\sigma\}_{90^\circ}\right) = 0$$

Se considera el laminado de carbono/epoxi T300/5208 con la siguiente composición: [0/0/0/90]. Las propiedades del material se encuentran en las tablas adjuntas.

a) Hallar los esfuerzos N_x que producen la rotura de la primera lámina (RPL) y los que producen rotura de última lámina (RUL). Por simplicidad los esfuerzos N_y y N_{xy} se suponen nulos.

b) Calcular las tensiones y deformaciones no mecánicas del laminado para una temperatura de 22ºC si la temperatura de curado es de 122ºC y la humedad es del 1%.

DATOS:

- **Coeficientes higrotérmicos del laminado:**

  $\alpha_1 = 0.02 \cdot 10^{-6} K^{-1}$ $\qquad \alpha_2 = 22.5 \cdot 10^{-6} K^{-1}$

  $\beta_1 = 0$ $\qquad \beta_2 = 0.6$

- **Espesor de cada lámina:**

  h = 0.125 mm

NOTA: Supóngase que la temperatura en el laminado es aproximadamente constante.

---

a)

1.- Se obtienen las matrices de rigidez de las láminas directamente de la primera tabla.

$$[Q]_{0^\circ} = \begin{bmatrix} 181.81 & 2.90 & 0 \\ 2.90 & 10.35 & 0 \\ 0 & 0 & 7.17 \end{bmatrix} \text{ GPa}$$

$$[Q]_{90^\circ} = \begin{bmatrix} 10.35 & 2.90 & 0 \\ 2.90 & 181.81 & 0 \\ 0 & 0 & 7.17 \end{bmatrix} \text{ GPa}$$

2.- La matriz de rigidez plana del laminado será.

$$\{N\} = [A] \cdot \{\varepsilon^o\} \cdot$$

$$[A] = 3 \cdot [Q]_{0^\circ} \cdot h + [Q]_{90^\circ} \cdot h$$

$$[A]=\begin{bmatrix}69.47 & 1.45 & 0\\ 1.45 & 26.61 & 0\\ 0 & 0 & 3.58\end{bmatrix}\ \text{MN·m}^{-1}$$

$$\begin{Bmatrix}N_x\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}=[A]\cdot\begin{Bmatrix}\varepsilon_x^o\\ \varepsilon_y^o\\ \gamma_{xy}^o\end{Bmatrix}$$

Resolviendo:

$$\varepsilon_x^o=1.441\cdot 10^{-2}\cdot N_x$$
$$\varepsilon_y^o=-7.853\cdot 10^{-4}\cdot N_x$$

3. Cálculo de las tensiones en cada lámina.

- Láminas a 0º.

$$\{\sigma\}_{0^\circ}=[Q]_{0^\circ}\cdot\{\varepsilon^o\}\cdot$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}_{0^\circ}=\begin{Bmatrix}2617.6\\ 33.66\\ 0\end{Bmatrix}\cdot N_x$$

Aplicando el criterio de rotura de Tsai-Hill.

$$\left(\frac{\sigma_1}{X}\right)^2+\left(\frac{\sigma_2}{Y}\right)^2+\left(\frac{\tau_{12}}{S}\right)^2-\frac{\sigma_1\cdot\sigma_2}{X^2}=1$$

$$\left(\frac{2617.6}{1500}\right)^2+\left(\frac{33.66}{40}\right)^2-\frac{2617.6\cdot 33.66}{1500^2}=\frac{1}{N_x^2}$$

De donde se puede despejar el valor del esfuerzo.

$$N_x=0.519\ \text{MN·m}^{-1}$$

- Láminas a 90º.

$$\{\sigma\}_{90^\circ} = [Q]_{90^\circ} \cdot \left\{\varepsilon^{o}\right\} \cdot$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{90^\circ} = \begin{Bmatrix} 146.87 \\ -100.99 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot N_x$$

Es necesario recordar que el criterio de Tsai-Hill se aplica en ejes locales de la lámina; el campo tensional anterior está expresado, en cambio, en ejes globales. En un caso general esto exigirá aplicar el circulo de Mohr o la matriz de cambio para calcular las tensiones en ejes locales. Para este problema el proceso es más simple:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}_{90^\circ} = \begin{Bmatrix} -100.99 \\ 146.87 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot N_x$$

$$\left(\frac{\sigma_1}{X}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{Y}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{S}\right)^2 - \frac{\sigma_1 \cdot \sigma_2}{X^2} = 1$$

$$\left(\frac{-100.99}{1500}\right)^2 + \left(\frac{146.87}{40}\right)^2 - \frac{100.99 \cdot 146.87}{1500^2} = \frac{1}{N_x^2}$$

$$N_x = 0.272 \ \text{MN·m}^{-1}$$

La primera lámina que se rompe es la lámina a 90º. El esfuerzo de rotura de primera lámina es: $N_x = 0.272$ MN·m^{-1}

Para calcular el esfuerzo N_x de rotura de última lámina se resuelve de nuevo el problema considerando que ahora el laminado sólo tiene tres láminas a 0º. La nueva matriz de rigidez plana es:

$$[A] = \begin{bmatrix} 68.18 & 1.09 & 0 \\ 1.09 & 3.88 & 0 \\ 0 & 0 & 2.69 \end{bmatrix} \ \text{MN·m}^{-1}$$

Operando igual que para el laminado intacto:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = [A] \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix}$$

$$\varepsilon_x = 1.473 \cdot 10^{-2} \cdot N_x$$

$$\varepsilon_y = -4.139 \cdot 10^{-3} \cdot N_x$$

Ahora sólo hay láminas a 0º.

$$\{\sigma\}_{0^\circ} = [Q]_{0^\circ} \cdot \{\varepsilon^o\} \cdot$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{0^\circ} = \begin{Bmatrix} 2666 \\ -0.122 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot N_x$$

Aplicando Tsai-Hill.

$$\left(\frac{2666}{1500}\right)^2 + \left(\frac{0.122}{40}\right)^2 - \frac{2666 \cdot 0.122}{1500^2} = \frac{1}{N_x^2}$$

$$N_x = 0.563 \ \text{MN·m}^{-1}$$

b)

1. Las deformaciones no mecánicas de las láminas son:

$$e_i = \alpha_i \cdot \Delta T + \beta_i \cdot C$$

Donde:

- α es el coeficiente de dilatación térmico
- β es el coeficiente de humedad
- $\Delta T = T_{servicio} - T_{curado}$

- Para las láminas a 0º.

$e_1 = -2 \cdot 10^{-6}$

$e_2 = 3.75 \cdot 10^{-3}$

- Para las láminas a 90º.

$e_x = 3.75 \cdot 10^{-3}$

$e_y = -2 \cdot 10^{-6}$

2. Esfuerzos sobre el laminado.

Las tensiones que actúan sobre una lámina se puede relacionar con las deformaciones mecánicas mediante la matriz de rigidez de la lámina.

$$\{\sigma\} = [Q] \cdot \{\varepsilon^m\} \cdot$$

Las deformaciones totales que actúan sobre una lámina son suma de las mecánicas y de las higrotérmicas.

$$\{\varepsilon^o\} = \{\varepsilon^m\} + \{e\} \cdot$$

Por lo tanto:

$$\{\sigma\} = [Q] \cdot \left(\{\varepsilon^o\} - \{e\} \right)$$

Integrando a lo largo del espesor se pueden determinar los esfuerzos que actúan sobre todo el laminado.

$$\{N\} = [A] \cdot \{\varepsilon^o\} - \{N\}^T$$

Donde:

$$\{N\}^T = \int [Q] \cdot \{e\} \cdot dz = h \cdot \left(3 \cdot [Q]_{0^o} \cdot \{e\}_{0^o} + [Q]_{90^o} \cdot \{e\}_{90^o} \right) \cdot$$

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix}^T = \begin{Bmatrix} 8.79 \\ 15.87 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-3} \ \text{MN·m}^{-1}$$

En este caso no existen esfuerzos mecánicos actuando sobre el laminado:

$$\begin{Bmatrix} 8.79 \\ 15.87 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-3} = \begin{bmatrix} 69.47 & 1.45 & 0 \\ 1.45 & 26.61 & 0 \\ 0 & 0 & 3.58 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix}$$

3. Deformaciones totales sobre el laminado.

Resolviendo el sistema anterior se calculan las deformaciones del laminado.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.142 \\ 5.902 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

Esta deformación es la misma para todas las láminas::

4. Deformaciones mecánicas en cada lámina.

$$\left\{\varepsilon^m\right\} = \left\{\varepsilon^o\right\} - \{e\} \cdot$$

- Láminas a 0º.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^m \\ \varepsilon_y^m \\ \gamma_{xy}^m \end{Bmatrix}_{0^\circ} = \begin{Bmatrix} 1.162 \\ -31.60 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

- Láminas a 90º.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^m \\ \varepsilon_y^m \\ \gamma_{xy}^m \end{Bmatrix}_{90^\circ} = \begin{Bmatrix} -36.35 \\ 5.922 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

5. Aplicando la matriz de rigidez en cada lámina se pueden calcular las tensiones.

- Láminas a 0º.

$$\{\sigma\}_{0^\circ} = [Q]_{0^\circ} \cdot \left\{\varepsilon^m\right\}_{0^\circ}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{0^\circ} = \begin{Bmatrix} 11.96 \\ -32.37 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ MPa}$$

- Láminas a 90º.

$$\{\sigma\}_{90^\circ} = [Q]_{90^\circ} \cdot \{\varepsilon^m\}_{90^\circ}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{90^\circ} = \begin{Bmatrix} -35.90 \\ 97.12 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ MPa}$$

Se puede comprobar que el esfuerzo mecánico que actúa sobre el laminado es nulo :

$$\{N\} = h \cdot \left(3 \cdot \{\sigma\}_{0^\circ} + \{\sigma\}_{90^\circ}\right) = 0$$

Sea el laminado definido por:

Lámina	*Espesor (m)*	E_1 *(MPa)*	E_2 *(MPa)*	ν_{21}	G_{12} *(MPa)*
1	**0.001**	**50000**	**15000**	**0.25**	**8000**
2	**0.050**	**200**	**200**	**0.40**	**70**
3	**0.001**	**50000**	**15000**	**0.25**	**8000**

1.- Sabiendo que el tensor de tensiones es:

CARA SUPERIOR.

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 60 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \textbf{ MPa}$$

CARA INFERIOR

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \textbf{ MPa}$$

Determinar:

a) La matriz de rigidez del laminado.

b) Los vectores de deformaciones y curvaturas.

c) El estado de carga al que está sometido el laminado.

2.- Se elimina ahora la lámina central y se somete al laminado así construido al estado de carga calculado en el apartado 1.c). Determinar:

a) La nueva matriz de rigidez

b) Los vectores de deformaciones y curvaturas.

-

1.-

a). Primero se calculan los coeficientes que faltan:

$$\nu_{12} = \nu_{21} \cdot \frac{E_2}{E_1}$$

Lámina	ν_{12}
1	0.075
2	0.400
3	0.075

2. Matrices de rigidez de cada lámina:

LAMINA 1 y 3

$$[Q] = \begin{bmatrix} 50995.41 & 3821.66 & 0 \\ 3821.66 & 15286.62 & 0 \\ 0 & 0 & 8000 \end{bmatrix} \textbf{MPa}$$

LAMINA 2

$$[Q] = \begin{bmatrix} 238.10 & 95.24 & 0 \\ 95.24 & 238.10 & 0 \\ 0 & 0 & 70 \end{bmatrix} \textbf{MPa}$$

LAMINA	Z_i **(m)**	Z_{i-1} **(m)**	h_i **(m)**	Δ_i^2 **(m^2)**	Δ_i^3 **(m^3)**
1	0.026	0.025	0.001	$25.5 \cdot 10^{-6}$	$6.5 \cdot 10^{-7}$
2	0.025	-0.025	0.050	0	$1.04 \cdot 10^{-5}$
3	-0.025	-0.026	0.001	$-25.5 \cdot 10^{-6}$	$6.5 \cdot 10^{-7}$

Donde :

$$\Delta_i^2 = \frac{Z_i^2 - Z_{i-1}^2}{2} \quad \Delta_i^3 = \frac{Z_i^3 - Z_{i-1}^3}{3}$$

MATRIZ A.

$$[A] = \sum [Q_i] \cdot h_i$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 113.82 & 12.40 & 0 \\ 12.40 & 42.48 & 0 \\ 0 & 0 & 19.50 \end{bmatrix} \text{MN/m}$$

MATRIZ B

Por ser laminado simétrico esta matriz es nula.

MATRIZ D

$$[D] = \sum [Q_i] \cdot \Delta_i^3$$

$$[D] = \begin{bmatrix} 68.72 & 5.96 & 0 \\ 5.96 & 22.35 & 0 \\ 0 & 0 & 11.13 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3} \text{ MN}$$

b) Conocemos la tensión en la lámina superior y en la inferior. Colocando el origen de los ejes en el punto medio del laminado.

En z = 0.026 (lamina 1)

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} 60 \\ 2 \\ 0 \end{Bmatrix} = [Q] \cdot \{\varepsilon\}_{sup}$$

Como se conoce la matriz de rigidez de esa lámina se puede obtener la deformación en la lámina superior.

$$\{\varepsilon\}_{sup} = \begin{Bmatrix} 1.189 \\ -0.166 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

En z = -0.026 (lamina 3)

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} 20 \\ -2 \\ 0 \end{Bmatrix} = [Q] \cdot \{\varepsilon\}_{inf}$$

Como se conoce la matriz de rigidez de esa lámina se puede obtener la deformación en la lámina inferior.

$$\{\varepsilon\}_{inf} = \begin{Bmatrix} 0.410 \\ -0.233 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

Como la distribución de deformaciones es lineal a lo largo del espesor.

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon^{o}\} + z \cdot \{k\}$$

$$\begin{Bmatrix} 1.189 \\ -0.166 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-3} = \begin{Bmatrix} \varepsilon^{o}_{x} \\ \varepsilon^{o}_{y} \\ \gamma^{o}_{xy} \end{Bmatrix} + 0.026 \cdot \begin{Bmatrix} k_{x} \\ k_{y} \\ k_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} 0.410 \\ -0.233 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-3} = \begin{Bmatrix} \varepsilon^{o}_{x} \\ \varepsilon^{o}_{y} \\ \gamma^{o}_{xy} \end{Bmatrix} - 0.026 \cdot \begin{Bmatrix} k_{x} \\ k_{y} \\ k_{xy} \end{Bmatrix}$$

De donde:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon^{o}_{x} \\ \varepsilon^{o}_{y} \\ \gamma^{o}_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.8 \\ -0.2 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-3} \qquad \begin{Bmatrix} k_{x} \\ k_{y} \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 14.98 \\ 1.30 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-3} \quad 1/m$$

c) $\{N\} = [A] \cdot \{\varepsilon^{o}\}$

$$\{M\} = [D]\cdot\{k\}$$

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.089 \\ 0.001 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{MN/m} \qquad \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.03 \\ 0.118 \\ 0 \end{Bmatrix}\cdot 10^{-3}$$

MN

2.-

a) MATRIZ A

$$[A] = \begin{bmatrix} 102 & 7.64 & 0 \\ 7.64 & 30.6 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix} \quad \text{MN/m}$$

MATRIZ D

$$[D] = \begin{bmatrix} 34 & 2.55 & 0 \\ 2.55 & 10.2 & 0 \\ 0 & 0 & 5.33 \end{bmatrix}\cdot 10^{-3} \quad \text{MN}$$

b)

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.88 \\ -0.17 \\ 0 \end{Bmatrix}\cdot 10^{-3}$$

$$\begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 30.24 \\ 4.06 \\ 0 \end{Bmatrix}\cdot 10^{-3} \quad 1/\text{m}$$

Se considera una placa sandwich con la siguiente composición:

Lámina	espesor (mm)	E_1 (MPa)	E_2 (MPa)	ν_{21}	G_{12} (MPa)
1	0.5	48000	25000	0.22	2500
2	9.0	350	350	0.48	118
3	0.5	48000	25000	0.22	2500

a) Determinar la máxima carga de tracción que soportaría la placa de la figura de acuerdo con el criterio de Tsai-Hill y suponiendo que la resistencia vendrá definida por las láminas extremas. (Figura 1)

b) Repetir el apartado anterior para el caso de un momento flector en la dirección 1. (Figura 2)

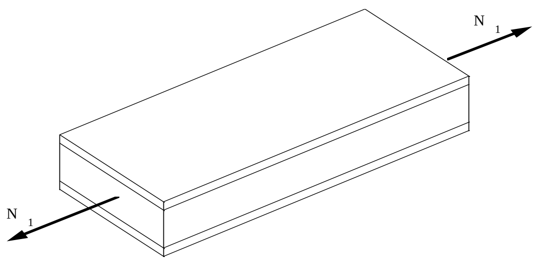


Figura 1

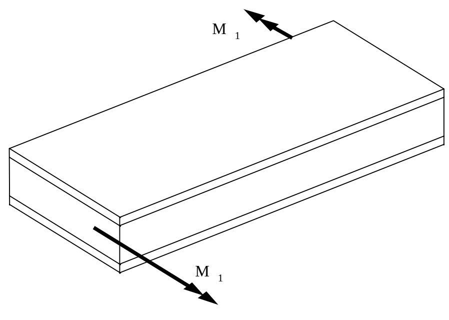


Figura 2

Datos: (Láminas 1 y 3)

X = 1100 MPa

Y = 800 MPa

S = 80 MPa

a)

1. Cálculo de las matrices de rigidez de cada lámina.

$$[Q]_3 = [Q]_1 = \begin{bmatrix} 49241 & 5642 & 0 \\ 5642 & 25647 & 0 \\ 0 & 0 & 2500 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

$$[Q]_2 = \begin{bmatrix} 455 & 218 & 0 \\ 218 & 455 & 0 \\ 0 & 0 & 118 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

2. Cálculo de la matriz de rigidez plana del laminado.

$$\{N\} = [A] \cdot \{\varepsilon^o\} \cdot$$

$$[A] = \sum_i [Q]_i \cdot h_i$$

En este caso:

$$[A] = 2 \cdot h_1 \cdot [Q]_1 + h_2 \cdot [Q]_2$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 53.34 & 7.60 & 0 \\ 7.60 & 29.74 & 0 \\ 0 & 0 & 3.56 \end{bmatrix} \text{ MN·m}^{-1}$$

3. Cálculo de los esfuerzos en el plano.

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 53.34 & 7.60 & 0 \\ 7.60 & 29.74 & 0 \\ 0 & 0 & 3.56 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}$$

$$\varepsilon_1 = 1.946 \cdot 10^{-2} \cdot N_1$$

$$\varepsilon_2 = -4.972 \cdot 10^{-3} \cdot N_1$$

Se calculan ahora las tensiones en cada placa:

$$\{\sigma\} = [Q]_1 \cdot \{\varepsilon\} \cdot$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 49241 & 5642 & 0 \\ 5642 & 25647 & 0 \\ 0 & 0 & 2500 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 1.946 \cdot 10^{-2} \cdot N_1 \\ -4.972 \cdot 10^{-3} \cdot N_1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 930.18 \\ -17.72 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot N_1$$

Aplicando el criterio de Tsai-Hill.

$$\left(\frac{930.18 \cdot N_1}{1100} \right)^2 + \left(\frac{17.72 \cdot N_1}{800} \right)^2 + \frac{930.18 \cdot N_1 \cdot 17.72 \cdot N_1}{1100^2} = 1$$

$$N_1 = 1.17 \text{ MN} \cdot \text{m}^{-1}$$

b)

1. Ahora se debe calcular la matriz de rigidez en flexión del laminado.

$$\{M\} = [D] \cdot \{k\} \cdot$$

$$[D] = \frac{1}{3} \cdot \sum_i [Q]_i \cdot \left(z_i^3 - z_{i-1}^3 \right).$$

Se colocan uno ejes en el centro del laminado. En estos ejes:

Lámina	**$10^3 \cdot z_i$ (m)**	**$10^3 \cdot z_{i-1}$ (m)**	**$10^8 \cdot (z_i^3 - z_{i-1}^3)$ (m^3)**
1	**5**	**4.5**	**3.39**
2	**4.5**	**-4.5**	**18.23**
3	**-4.5**	**-5**	**3.39**

La matriz queda:

$$[D] = \begin{bmatrix} 1140 & 141 & 0 \\ 141 & 607 & 0 \\ 0 & 0 & 63.6 \end{bmatrix} \text{N}$$

2. Cálculo de los esfuerzos en flexión.

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1140 & 141 & 0 \\ 141 & 607 & 0 \\ 0 & 0 & 63.6 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_{12} \end{Bmatrix}$$

$$K_1 = 9.03 \cdot 10^{-4} \cdot M_1$$

$$K_2 = -2.097 \cdot 10^{-4} \cdot M_1$$

El campo de deformaciones es:

$$\{\varepsilon\} = z \cdot \{k\} \cdot$$

En las placas: z = 0.005 m

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4.515 \\ -1.049 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-6} \cdot M_1$$

Las tensiones serán:

$$\{\sigma\} = [Q]_1 \cdot \{\varepsilon\} \cdot$$

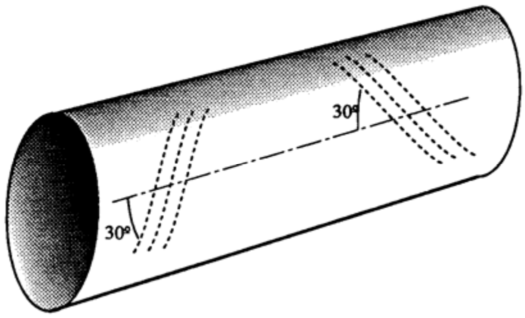
$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.164 \cdot 10^5 \\ -1.430 \cdot 10^3 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot M_1$$

Aplicando de nuevo el criterio de Tsai-Hill.

$$\left(\frac{2.164 \cdot 10^5}{1100 \cdot 10^6}\right)^2 + \left(\frac{1.430 \cdot 10^3}{800 \cdot 10^6}\right)^2 + \frac{2.164 \cdot 10^5 \cdot 1.430 \cdot 10^3}{\left(1100 \cdot 10^6\right)^2} = \frac{1}{M_1^2}$$

$$M_1 = 5.066 \cdot 10^{-3} \text{ MN}$$

Un tubo de 40 cm de diámetro está formado por un laminado simétrico cuyas láminas tienen todas el mismo espesor, 0.1 mm, y la misma naturaleza, salvo que la mitad están orientadas a 30º respecto al eje del tubo y la otra mitad a -30º. Sabiendo que la deformación longitudinal del tubo está impedida, determinar la presión interior que producirá la rotura del tubo de acuerdo con el criterio de Tsai-Hill.

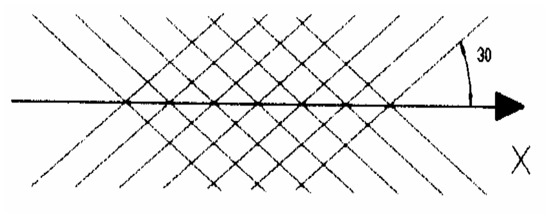


DATOS:

E_1 =	**50000 MPa**	**X =**	**800 MPa**		
E_2 =	**3000 MPa**	**Y =**	**150 MPa**		
G_{12} =	**2000 MPa**	**S =**	**100 MPa**	**ν_{21} =**	**0.32**

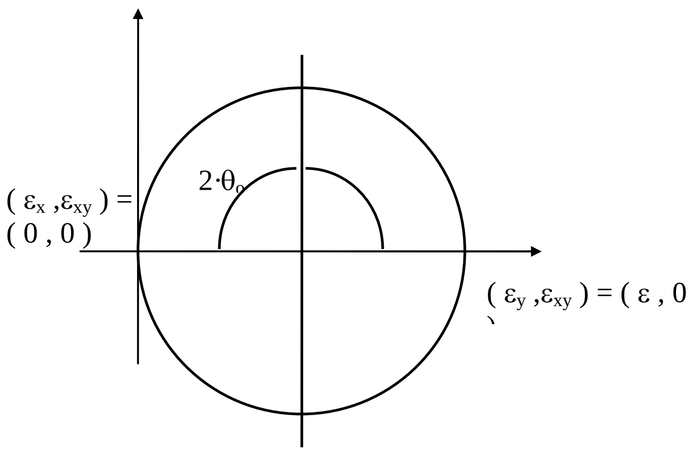
--

1. El estado de deformaciones en el tubo es:



$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \varepsilon \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Este estado es el mismo en todo el laminado.
El circulo de Mohr en deformaciones es:



$$P_\varepsilon = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} = \frac{\varepsilon}{2}$$

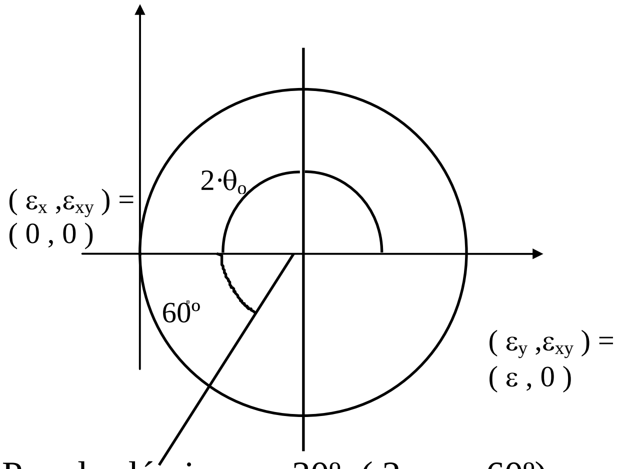
$$q_\varepsilon = \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} = -\frac{\varepsilon}{2}$$

$$R_\varepsilon = \sqrt{q_x{}^2 + \varepsilon_{xy}} = \frac{\varepsilon}{2}$$

$$2 \bullet \theta_o = \pi$$

2. Se calculan las deformaciones en los ejes materiales.
Para las láminas a 30º: (2·α = 60º)

$$2 \bullet \theta = 2 \bullet \theta_o + 2 \bullet \alpha = 180 + 60 = 240º$$



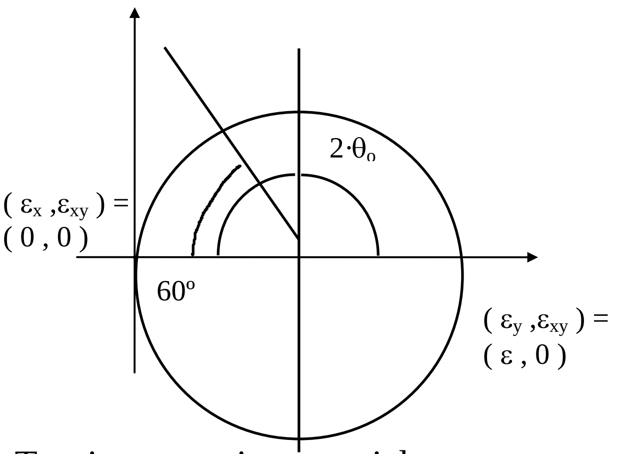
$$\varepsilon_1 = \frac{1}{4} \bullet \varepsilon$$

$$\varepsilon_2 = \frac{3}{4} \bullet \varepsilon$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{\sqrt{3}}{4} \bullet \varepsilon$$

Para las láminas a -30º: (2·α = -60º)

$$2 \bullet \theta = 2 \bullet \theta_o + 2 \bullet \alpha = 180 - 60 = 120º$$



$$\varepsilon_1 = \frac{1}{4} \bullet \varepsilon$$

$$\varepsilon_2 = \frac{3}{4} \bullet \varepsilon$$

$$\varepsilon_{12} = -\frac{\sqrt{3}}{4} \bullet \varepsilon$$

3. Tensiones en ejes materiales.

En los ejes materiales se pueden calcular las tensiones a partir de las deformaciones utilizando la matriz constitutiva de cada lámina.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1-\nu_{12} \bullet \nu_{21}} & \frac{\nu_{21} \bullet E_2}{1-\nu_{12} \bullet \nu_{21}} & 0 \\ \frac{\nu_{12} \bullet E_1}{1-\nu_{12} \bullet \nu_{21}} & \frac{E_2}{1-\nu_{12} \bullet \nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}50309.10 & 965.93 & 0\\ 965.93 & 3018.55 & 0\\ 0 & 0 & 2000\end{bmatrix}\bullet\begin{Bmatrix}\frac{1}{4}\bullet\varepsilon\\ \frac{3}{4}\bullet\varepsilon\\ \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\bullet\varepsilon\end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}13301\\ 2505\\ \pm1732\end{Bmatrix}\bullet\varepsilon$$

La tensión positiva corresponde a las fibras a 30º y la negativa a las fibras a -30º.

4. Tensiones de las láminas en ejes globales.

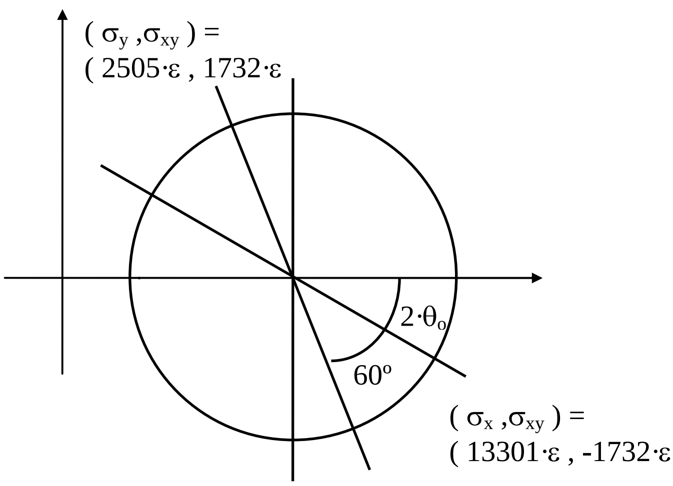
Para las fibras a 30º

$p = 7903 \cdot \varepsilon$

$q = 5398 \cdot \varepsilon$

$R = 5669 \cdot \varepsilon$

$2 \cdot \theta_o = -18.47º$



Girando 30º (60º en el círculo de Mohr) en sentido horario se pueden calcular las tensiones en ejes globales.

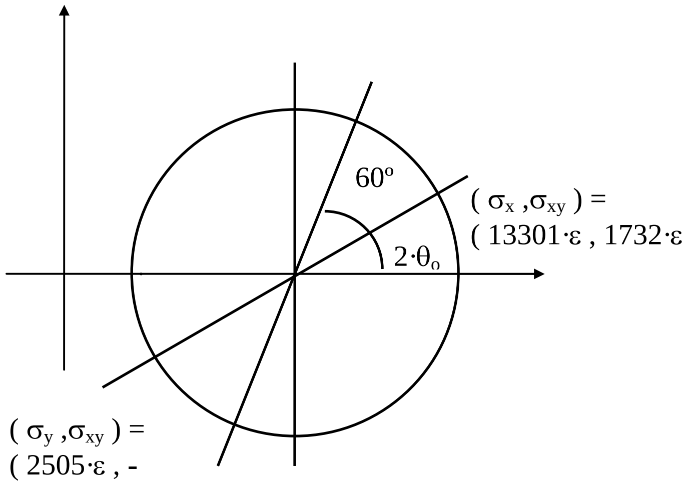
$$2\bullet\theta = 2\bullet\theta_o + 2\bullet\alpha = -18.47 - 60 = -78.47º$$

$$\sigma_x = 9036\bullet\varepsilon$$
$$\sigma_y = 6769\bullet\varepsilon$$
$$\tau_{xy} = 5554\bullet\varepsilon$$

Para las fibras a -30º

p = 7903·ε

q = 5398·ε



R = 5669·ε

$2\cdot\theta_o = 18.47º$

Girando 30º (60º en el círculo de Mohr) en sentido antihorario se pueden calcular las tensiones en ejes globales.

$$2 \bullet \theta = 2 \bullet \theta_o + 2 \bullet \alpha = 18.47 + 60 = +78.47º$$

$$\sigma_x = 9036 \bullet \varepsilon$$
$$\sigma_y = 6769 \bullet \varepsilon$$
$$\tau_{xy} = -5554 \bullet \varepsilon$$

5. Tensiones en el laminado.
Integrando a lo largo del espesor.

$$\{N\} = \int \{\sigma\} \bullet dz$$
$$\{N\} = \sum_i \{\sigma\}_i \bullet h_i = \{\sigma\}_{30º} \bullet n \bullet h + \{\sigma\}_{-30º} \bullet n \bullet h$$

Donde ***h*** es el espesor de una lámina y ***2·n*** el número total de láminas.

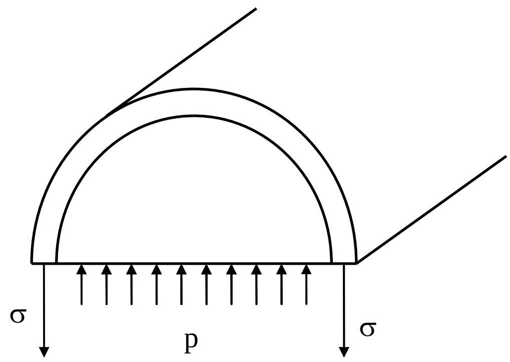
Definiendo una tensión media en el laminado:

$$\{\sigma\}^M = \frac{\{N\}}{2 \bullet n \bullet h}$$

$$\{\sigma\}^M = \begin{Bmatrix} 9036 \cdot \varepsilon \\ 6707 \cdot \varepsilon \\ 0 \end{Bmatrix}$$

6. Relación entre presión interna y tensión media en el laminado.

Cortando el tubo por la mitad:



Planteando el equilibrio ***de fuerzas:***

$$P \cdot D = 2 \cdot \sigma_y \cdot 2 \cdot n \cdot h$$

Donde ***2·n·h*** es el espesor total del laminado.

$$P = \frac{4 \cdot \sigma_y \cdot n \cdot h}{D} = 0.001 \cdot n \cdot \sigma_y$$

$$P = 6.769 \cdot n \cdot \varepsilon$$

7. Aplicando el criterio de Tsai-Hill.

$$\left(\frac{\sigma_1}{X}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{Y}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{S}\right)^2 - \frac{\sigma_1 \cdot \sigma_2}{X^2} = 1$$

$$\left(\frac{13301}{800}\right)^2 + \left(\frac{2505}{150}\right)^2 + \left(\frac{1732}{100}\right)^2 - \frac{13301 \cdot 2505}{800^2} = \frac{1}{\varepsilon^2}$$

De donde se puede calcular la deformación.

$$\varepsilon = 3.5283 \cdot 10^{-2}$$

Como ya se conoce la relación entre la presión y la deformación:

P=0.119·n MPa