

**UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID**

---



# **VIGAS**

**Carlos Navarro**

**Departamento de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras**



# VIGAS LAMINADAS



### **Hipótesis:**

- 1.- Se supone aplicable la hipótesis de Euler-Bernoulli: Las secciones planas transversales y ortogonales a la directriz (plano medio del laminado) permanecen planas y ortogonales a la directriz una vez que la viga haya flectado.**
- 2.- La viga es simétrica, tanto en geometría como en propiedades, respecto de su plano medio**
- 3.- Cada lámina presenta un comportamiento lineal, no existiendo acoplamiento entre tensiones normales y deformaciones angulares (las posibles orientaciones de las láminas son  $0^\circ$  o  $90^\circ$ )**



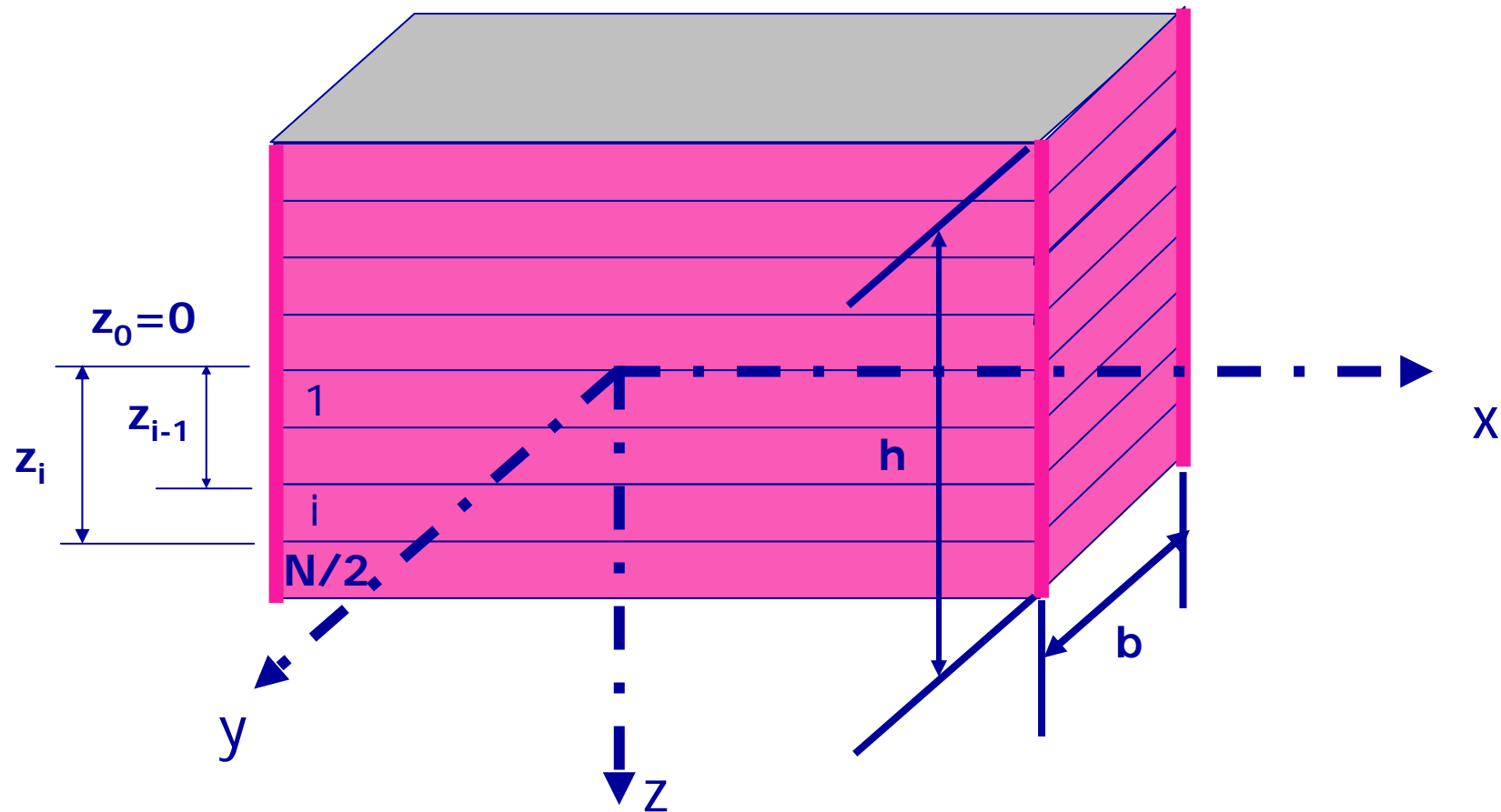
### Hipótesis (Cont.):

4.- Las láminas trabajan solidariamente unas con otras

5.- Las únicas componentes tensionales no nulas son:  $\sigma_x$  y  $\tau_{xz}$



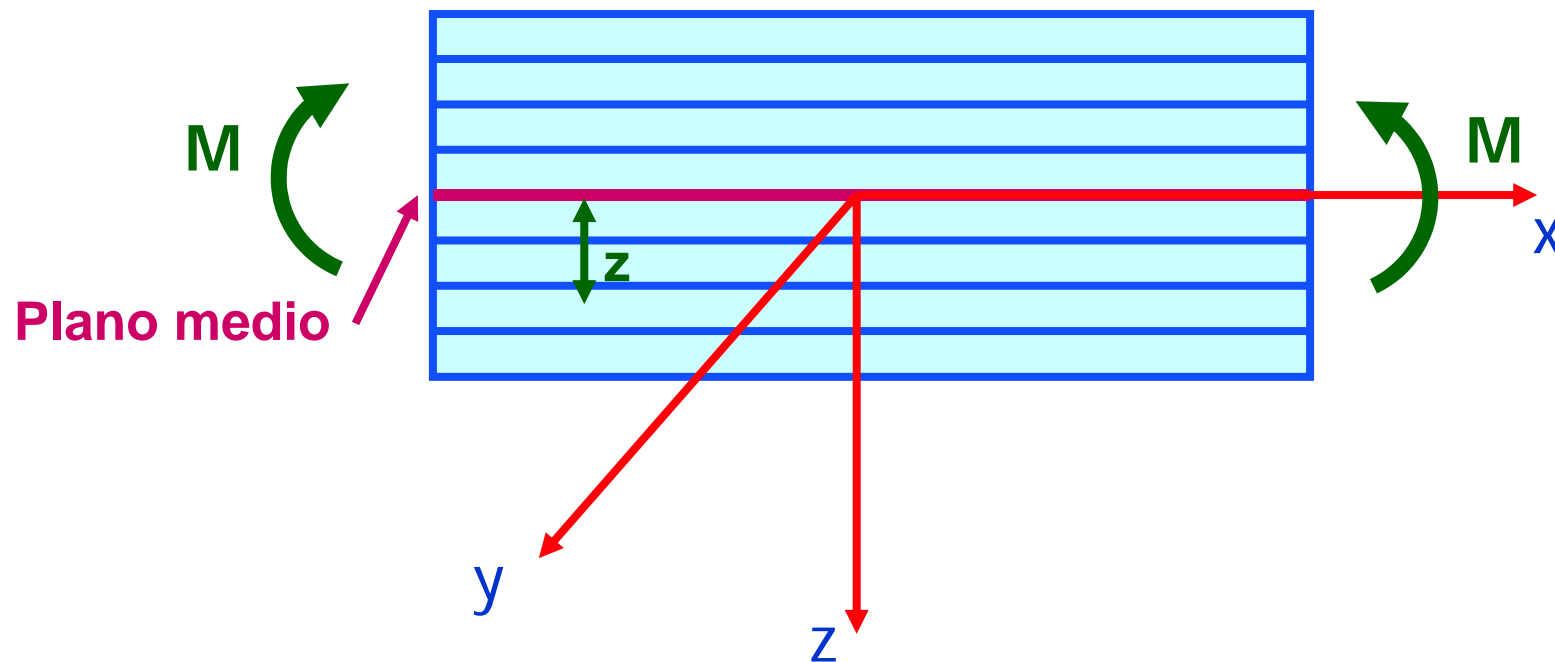
## FLEXIÓN PURA:



# VIGAS LAMINADAS

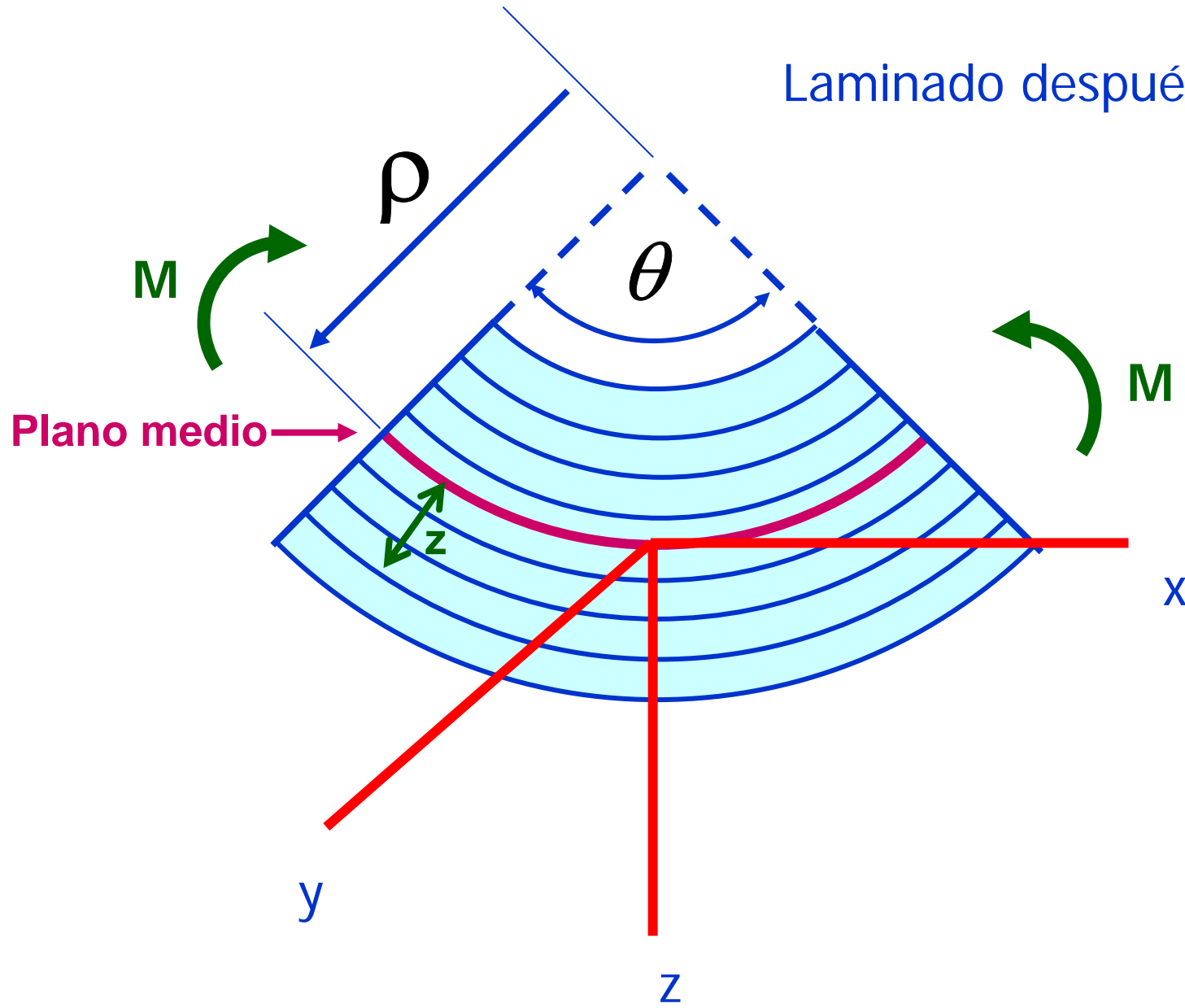


Laminado antes de flectar



$M$  viene expresado por unidad de ancho de la viga ( $M_{\text{total}} = M \cdot b$ )

Laminado después de flectar





## DEFORMACIONES POR FLEXIÓN (Primera hipótesis)

$$\varepsilon_x(z) = \frac{(\rho + z)\theta - \rho\theta}{\rho\theta} = \frac{z}{\rho} = z \cdot \kappa$$

donde :

$\rho$  = radio de curvatura del plano medio durante la flexión

$\theta$  = ángulo definido en la figura anterior

$z$  = distancia desde el plano medio (definido por el plano xy)

$\kappa$  = curvatura





# TENSIONES POR FLEXIÓN (Tercera hipótesis)

Tensión en la lámina  $j^{\text{ésima}}$  :

$$(\sigma_x)_j = (E_x)_j (\varepsilon_x)_j$$

donde :

$(E_x)_j$  = Módulo de Young de la lámina  $j^{\text{ésima}}$  en la  
dirección x

$(\varepsilon_x)_j$  = Deformación longitudinal de la lámina  $j^{\text{ésima}}$   
en la dirección x

## VIGAS LAMINADAS



$$\varepsilon_x(z) = \frac{(\rho + z)\theta - \rho\theta}{\rho\theta} = \frac{z}{\rho} = z \cdot \kappa$$

donde :

$\rho$  = radio de curvatura del plano medio durante la flexión

$\theta$  = ángulo definido en la figura anterior

$z$  = distancia desde el plano medio (definido por el plano xy)

$\kappa$  = curvatura

Tensión en la lámina  $j^{\text{ésima}}$  :

$$(\sigma_x)_j = (E_x)_j (\varepsilon_x)_j$$

donde :

$(E_x)_j$  = Módulo de Young de la lámina  $j^{\text{ésima}}$  en la dirección x

$(\varepsilon_x)_j$  = Deformación longitudinal de la lámina  $j^{\text{ésima}}$  en la dirección x

$$(\sigma_x)_j = (E_x)_j \frac{z}{\rho} = (E_x)_j \cdot z \cdot \kappa$$



**EQUIVALENCIA ENTRE EL MOMENTO EXTERIOR  
Y LAS TENSIONES EN LA VIGA LAMINADA (Segunda hipótesis)**

$$\begin{aligned}
 M &= 2 \int_0^{\frac{h}{2}} \sigma_x z \, dz = \\
 &= 2 \left[ \int_0^{z_1} \sigma_x z \, dz + \int_{z_1}^{z_2} \sigma_x z \, dz + \dots + \int_{z_{n-1}}^{z_n} \sigma_x z \, dz \right] = \\
 &= \frac{2}{3\rho} \sum_{j=1}^{N/2} (E_x)_j (z_j^3 - z_{j-1}^3)
 \end{aligned} \tag{1}$$



$$M = \frac{2h^3}{3\rho N^3} \sum_{j=1}^{N/2} (E_x)_j (3j^2 - 3z + 1) \quad (2)$$

Si el número de láminas (**N**) fuera impar, dividiríamos la lámina del plano medio en dos idénticas que tuvieran la mitad de espesor de esta lámina (de esta manera convertiríamos el número total de láminas en un número par), resultando:

$$z_j = \frac{jh}{N}$$

$$M = \frac{2h^3}{3\rho N^3} \sum_{j=1}^{N/2} (E_x)_j (3j^2 - 3j + 1)$$



Si el material de la viga presentara un comportamiento lineal, homogéneo e isótropo:

$$M = \frac{EI_y}{\rho} = \frac{Eh^3}{12\rho} \quad (3)$$

*donde :*

$$I_y = \text{momento de inercia por unidad de ancho} = \frac{h^3}{12}$$



Comparando las ecuaciones (1), (2) y (3), cabe definir, para la viga laminada, un módulo de elasticidad equivalente a flexión de la siguiente manera:

$$E_f = \frac{8}{h^3} \sum_{j=1}^{N/2} (E_x)_j (z_j^3 - z_{j-1}^3)$$

ó

$$E_f = \frac{8}{N^3} \sum_{j=1}^{N/2} (E_x)_j (3j^2 - 3j + 1)$$



Para, por ejemplo, calcular flecha o la elástica:

$$-E_f I_y \frac{d^2 w}{dx^2} = M$$



Alternativamente a expresiones anteriores, las tensiones en cada lámina pueden calcularse como:

$$(\sigma_x)_j = (E_x)_j \frac{z}{\rho}$$

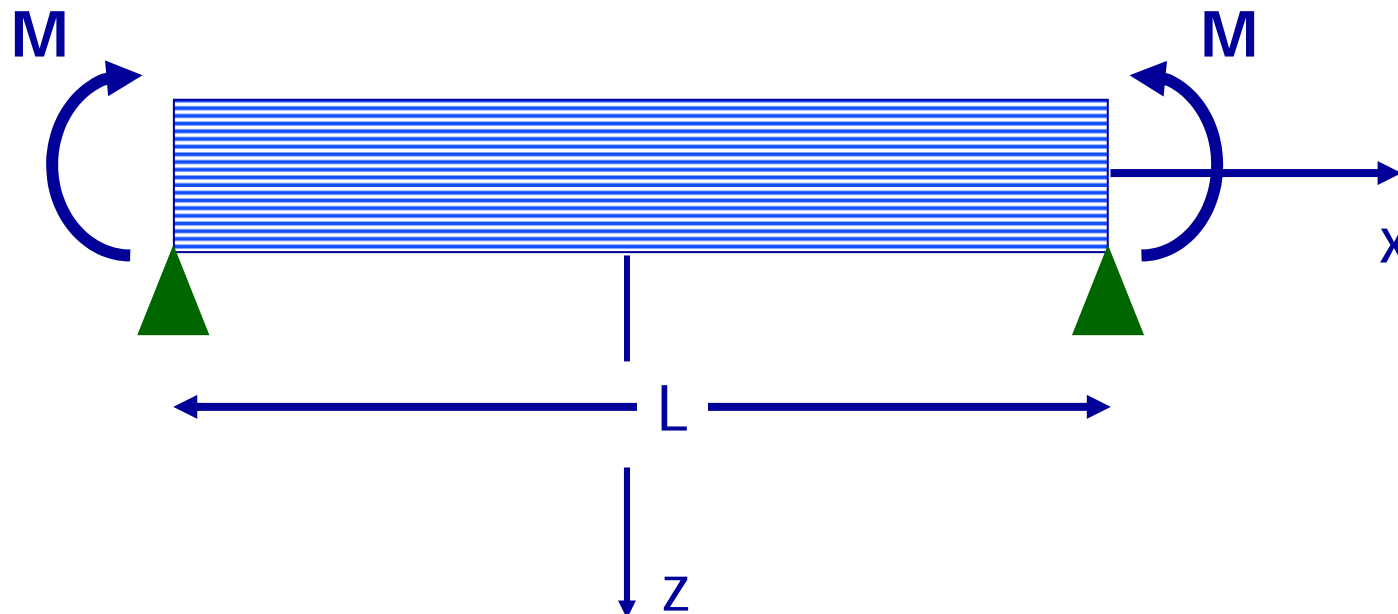
$$M = \frac{E_f I_y}{\rho} = \frac{E_f h^3}{12\rho}$$

$$(\sigma_x)_j = \frac{M}{E_f I_y} (E_x)_j z = \frac{Mz}{I_y} \left[ \frac{(E_x)_j}{E_f} \right]$$





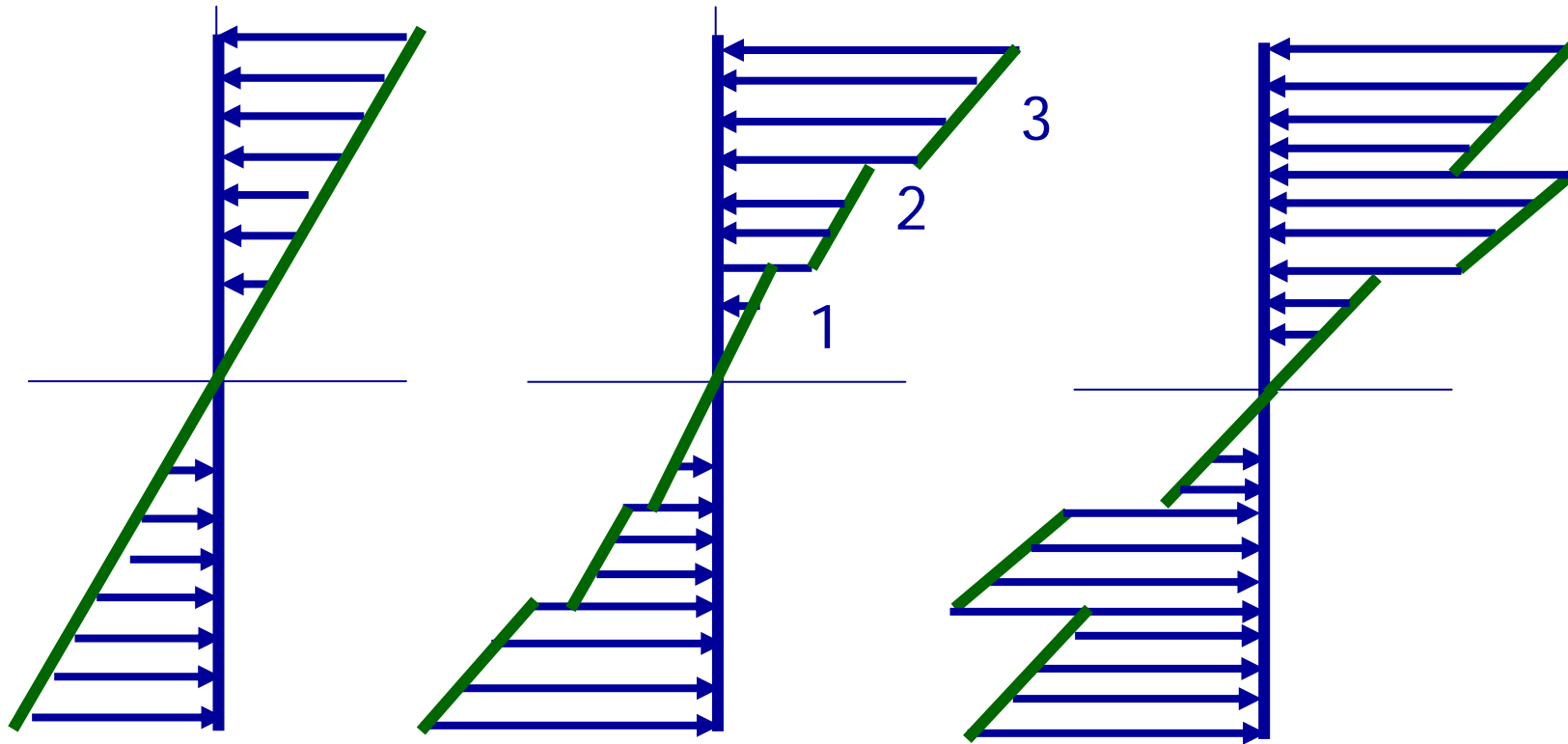
## EJEMPLO DE VIGA SOMETIDA A FLEXIÓN PURA



# VIGAS LAMINADAS



$$(E_x)_3 > (E_x)_2 > (E_x)_1$$



Material  
isótropo

$$(E_x)_1 = (E_x)_3 < (E_x)_2$$



### CRITERIO DE ROTURA:

Lámina  $j^{\text{ésima}}$  a  $0^\circ$  en compresión  
Criterio de máxima tensión

**La lámina  $j^{\text{ésima}}$  rompe cuando :**

$$(\sigma_{\text{xmax}})_j = X_c$$

$$M_{\text{max}} = \frac{E_f I_y X_c}{(E_1)_j z_j}$$



### CRITERIO DE ROTURA (Cont):

Lámina  $j^{\text{ésima}}$  a  $90^\circ$  en tracción  
Criterio de máxima tensión

**La lámina  $j^{\text{ésima}}$  rompe cuando :**

$$(\sigma_{x\max})_j = Y_t$$

$$M_{\max} = \frac{E_f I_y Y_t}{(E_2)_j z_j}$$

# Fabricación y diseño de vigas

---



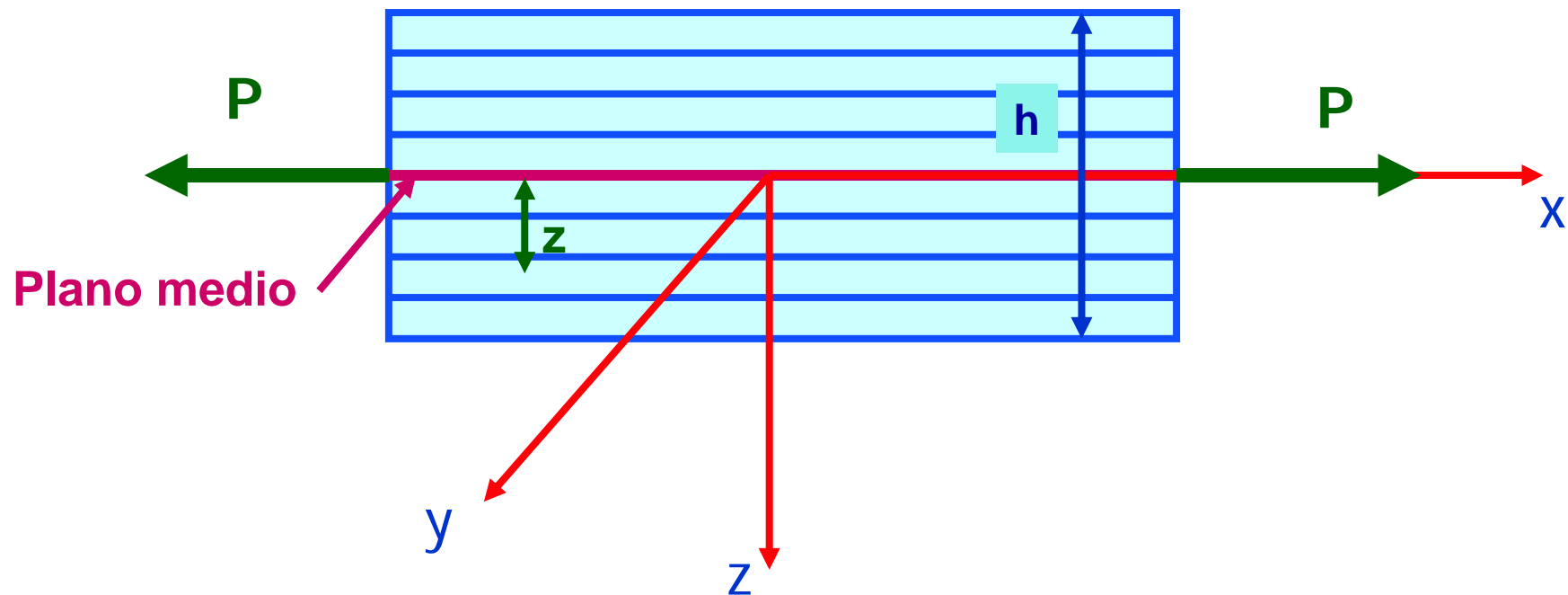
- **Fabricación:**
  - pultrusión
  - filament winding
  - moldeo a mano
  - preimpregnados
  - moldeo por inyección de resina
- **Diseño:**
  - Minimizar el área de la sección transversal (peso)
  - Incrementar el momento de inercia
    - aumento de las dimensiones de la sección
  - Típicamente, se trabaja con elementos prismáticos



- Consideraciones:
  - Longitud  $\gg$  ancho y canto
  - Vigas sometidas, principalmente, a flexión
  - Columnas sometidas, principalmente a compresión axial
  - Árboles de transmisión sometidos, principalmente, a torsión



## VIGAS A TRACCIÓN



Plano medio

La carga  $P$  viene dada por unidad de ancho del laminado



PRIMERA MANERA DE TRATAR EL PROBLEMA:

$$\{N\} = \underbrace{\left[ \int_{-h/2}^{h/2} [\bar{Q}] dz \right]}_{[A]} \cdot \{\varepsilon^0\}$$

$$\{N\} = [A] \cdot \{\varepsilon^0\} \quad \text{en N/m}$$





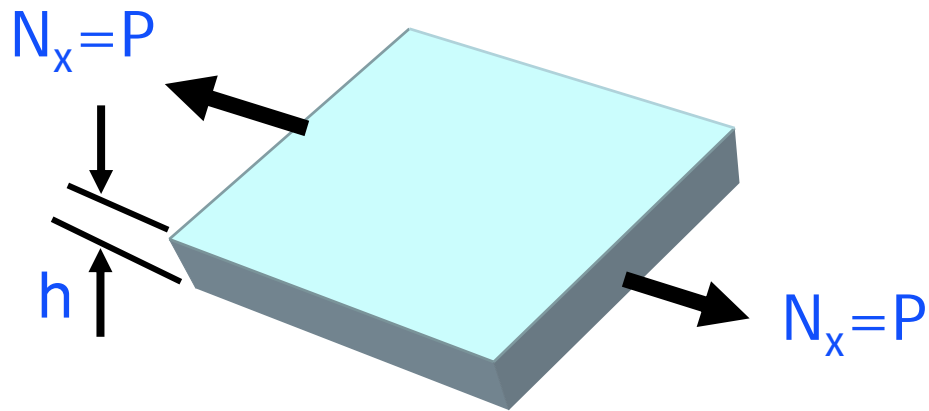
## ESTADO DE CARGAS:

$$\begin{Bmatrix} P \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} & A'_{16} \\ A'_{12} & A'_{22} & A'_{26} \\ A'_{16} & A'_{26} & A'_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



## DEFORMACIONES EN EL LAMINADO



$$\sigma_x = \frac{P}{h}$$

$$\epsilon_x^0 = A'_{11} P$$

$$E_x^0 = \frac{\sigma_x}{\epsilon_x^0} = \frac{\left(\frac{P}{h}\right)}{A'_{11} P} = \frac{1}{A'_{11} h}$$



## TENSIONES EN EL LAMINADO

Lámina k-ésima:

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\}^k = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_x \\ \boldsymbol{\varepsilon}_y \\ \boldsymbol{\gamma}_{xy} \end{Bmatrix}^k = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_x^0 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_y^0 \\ \boldsymbol{\gamma}_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \{\boldsymbol{\varepsilon}^0\}$$

$$\{\boldsymbol{\sigma}\}^k = [\bar{\boldsymbol{Q}}]_k \{\boldsymbol{\varepsilon}\}^k = [\bar{\boldsymbol{Q}}]_k \{\boldsymbol{\varepsilon}^0\}$$



## SEGUNDA MANERA DE TRATAR EL PROBLEMA:

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\}^k = \{\boldsymbol{\varepsilon}^0\} = [\bar{\boldsymbol{S}}]_k \{\boldsymbol{\sigma}\}^k$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_x^0 = \frac{\boldsymbol{\sigma}_x^k}{E_x^k}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_x^k = E_x^k \boldsymbol{\varepsilon}_x^0$$

$$\boldsymbol{\sigma}_x^k \cdot \boldsymbol{h}_k = E_x^k \cdot \boldsymbol{h}_k \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_x^0$$

$$P = \sum_k \boldsymbol{\sigma}_x^k \cdot \boldsymbol{h}_k = \left( \sum_k E_x^k \cdot \boldsymbol{h}_k \right) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_x^0$$



Definiendo:

$$E_x^0 = \frac{\sum_k E_x^k \cdot h_k}{h}$$

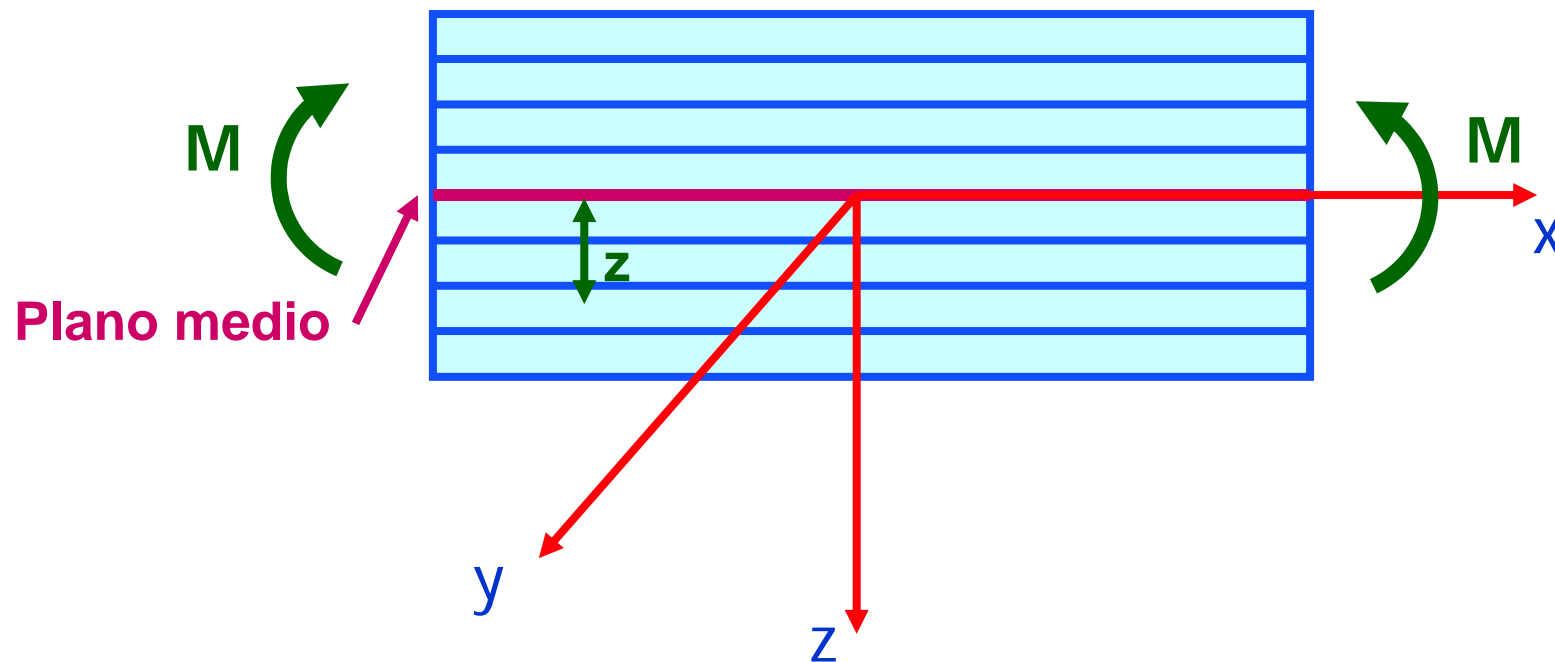
$$P = \sum_k \sigma_x^k \cdot h_k = \left( \sum_k E_x^k \cdot h_k \right) \cdot \epsilon_x^0 = E_x^0 \cdot h \cdot \epsilon_x^0$$

$$\sigma_x^0 = \frac{P}{h} = E_x^0 \cdot \epsilon_x^0$$

$$\epsilon_x^0 = \frac{1}{E_x^0} \frac{P}{h}$$



## VIGAS A FLEXIÓN



$M$  viene expresado por unidad de ancho de la viga ( $M_{\text{total}} = M \cdot b$ )



## ESTADO DE CARGAS:

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



Laminado simétrico sometido a flexión, solamente

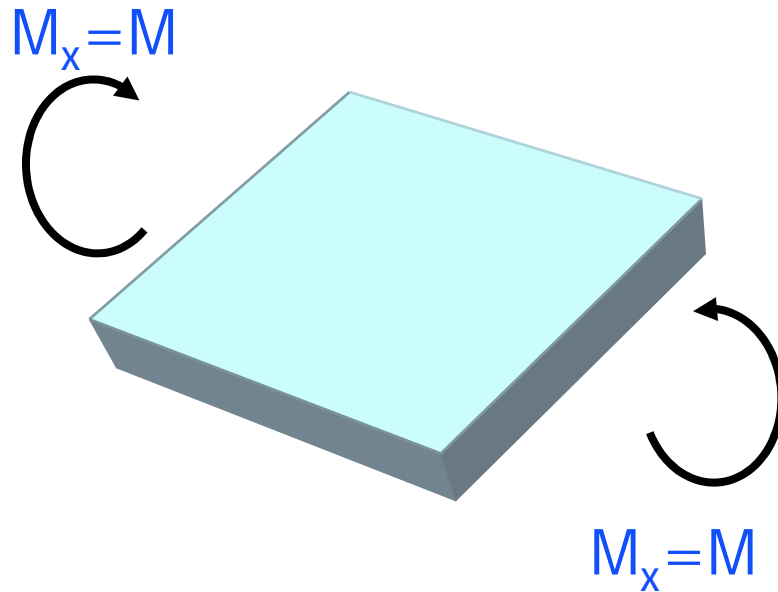
$$\begin{Bmatrix} \mathbf{M} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} & \mathbf{D}_{16} \\ \mathbf{D}_{12} & \mathbf{D}_{22} & \mathbf{D}_{26} \\ \mathbf{D}_{16} & \mathbf{D}_{26} & \mathbf{D}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{K}_x \\ \mathbf{K}_y \\ \mathbf{K}_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{K}_x \\ \mathbf{K}_y \\ \mathbf{K}_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}'_{11} & \mathbf{D}'_{12} & \mathbf{D}'_{16} \\ \mathbf{D}'_{12} & \mathbf{D}'_{22} & \mathbf{D}'_{26} \\ \mathbf{D}'_{16} & \mathbf{D}'_{26} & \mathbf{D}'_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{M} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$





DEFORMACIONES EN EL LAMINADO



$$\kappa_x = D'_{11} M_x = D'_{11} M = \frac{1}{\rho_x}$$

$$\frac{M}{E_{fx} I_y} = \frac{1}{\rho_x}$$

$$I_y = \frac{1}{12} b h^3$$

$$\therefore E_{fx} = \frac{12}{h^3 D'_{11}}$$



## TENSIONES EN EL LAMINADO

En laminados simétricos a flexión suele utilizarse una tensión máxima equivalente, cuya expresión es:

$$\sigma_x^f = \frac{6M}{h^2} \quad \sigma_y^f = 0 \quad \tau_x^f = 0$$

Podríamos escribir:

$$\{\sigma\}^f = \begin{Bmatrix} \frac{6M}{h^2} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{6}{h^2} \{M\}$$



## DEFORMACIONES A FLEXIÓN

Llamamos deformación máxima equivalente a:

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\}^f = \frac{h}{2} \{\boldsymbol{\kappa}\}$$

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\}^f = \frac{h}{2} \{\boldsymbol{\kappa}\} = \frac{h}{2} [\mathbf{D}]^{-1} \{\mathbf{M}\}$$

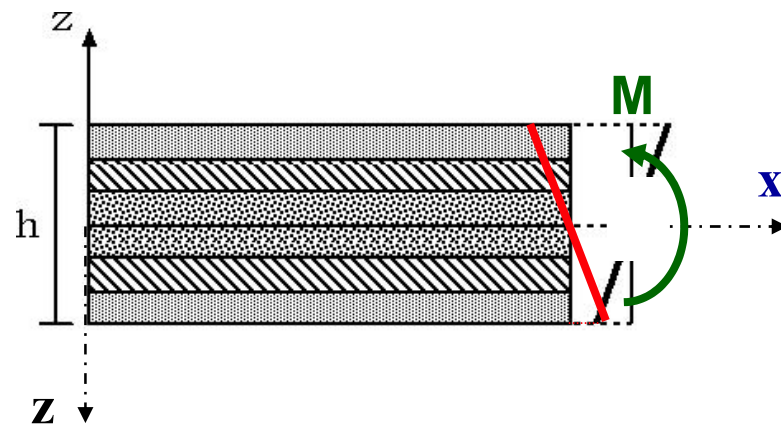


$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x^f = \frac{h}{2} D'_{11} M \\ \varepsilon_y^f = \frac{h}{2} D'_{12} M \\ \gamma_{xy}^f = \frac{h}{2} D'_{16} M \end{array} \right.$$

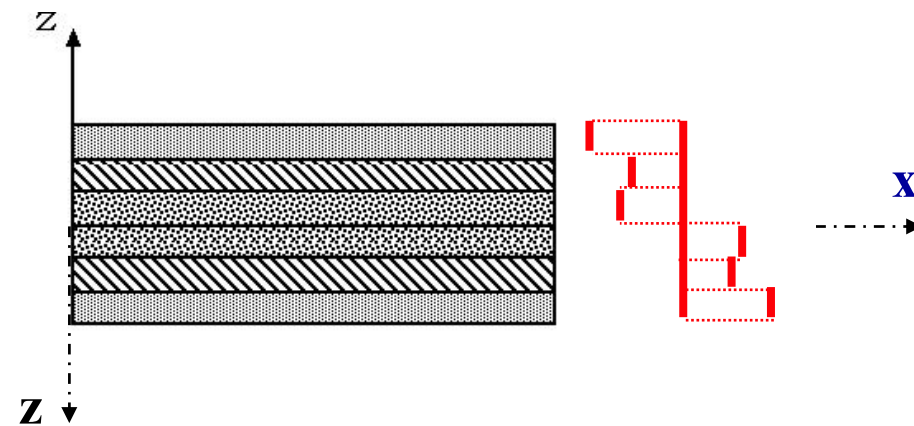
# VIGAS



Como suponemos que las deformaciones varían linealmente a lo largo del espesor del laminado, podemos calcular las deformaciones en cualquier lámina y, por tanto, las tensiones a las que se encuentra sometida



DEFORMACIONES



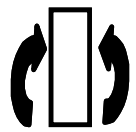
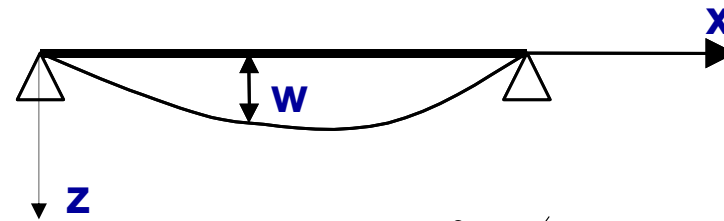
TENSIONES



- Las vigas de materiales compuestos presentan efectos combinados de flexión y cortante
  - $\delta = \delta_b + \delta_s$
  - $\delta_b$  controlado por  $EI$
  - $\delta_s$  controlado por  $GA$
  
- Nota:
  - La contribución a los movimientos del cortante es despreciable frente a los de flexión en vigas metálicas porque el módulo de corte es bastante alto -->  $G \sim E/2,5$
  - Sin embargo, en materiales compuestos no  
Ejemplo: AS4/3501-6:  $E_1 = 142$  GPa;  $E_2 = 10,3$  GPa;  
 $G_{12} = 7,2$  GPa



## ECUACIÓN DIFERENCIAL DE LA ELASTICA



$$\frac{1}{\rho} = \frac{M(x)}{EI} = - \frac{d^2 w / dx^2}{\left[ 1 + \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}}$$

$$dw/dx \ll 1$$

$$\frac{M(x)}{EI} = - \frac{d^2 w}{dx^2}$$



## Análisis de vigas de material isótropo

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

$$\kappa = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\frac{M(x)}{EI} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\frac{Q(x)}{EI} = -\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}$$

$$\frac{q(x)}{EI} = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}$$

### – Definiciones

- $\kappa$  = curvatura
- $\rho$  = radio de curvatura
- $M$  = momento flector
- $E$  = módulo de elasticidad
- $I$  = momento de inercia de la sección respecto del eje neutro
- $w$  = flecha
- $Q$  = esfuerzo cortante
- $q$  = carga por unidad de longitud

### – Solución

- requiere integración
- condiciones de contorno



## Propiedades geométricas y del material

- **Propiedades geométricas:**
  - área, momento de inercia, etc.
- **Propiedades elásticas del material:**
  - E, G, etc.
- **En materiales homogéneos podemos separar ambos conjuntos de propiedades**
- **No lo podemos hacer en materiales compuestos**
  - Las propiedades del material varían lámina a lámina





### **Procedimiento de análisis de vigas**

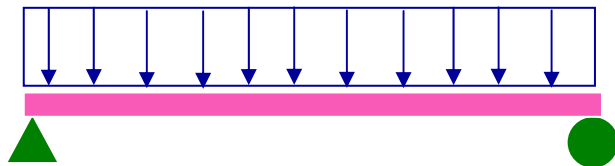
- Usamos la teoría clásica de vigas para analizar la estructura**
- Usamos la teoría clásica de laminados para calcular las rigideces efectivas a flexión ( $EI$ ) ó a cortante ( $GA$ ) para el laminado de la viga**
- Calculamos la distribución de deformaciones en la viga**
- Calculamos las tensiones y deformaciones para cada una de las láminas**
- Aplicamos el criterio de fallo**



## Análisis de vigas de material isótropo

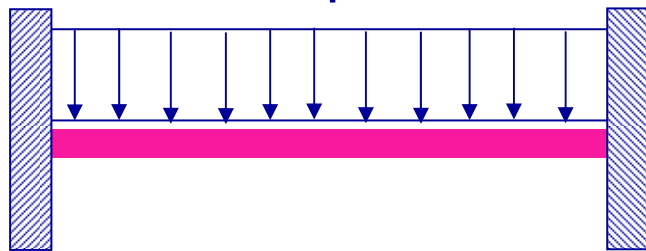
### Flechas máximas para diseño:

q



$$\delta_{\max} = \frac{5}{384} \frac{qL^4}{EI} + \frac{1}{8} \frac{qL^2}{GA}$$

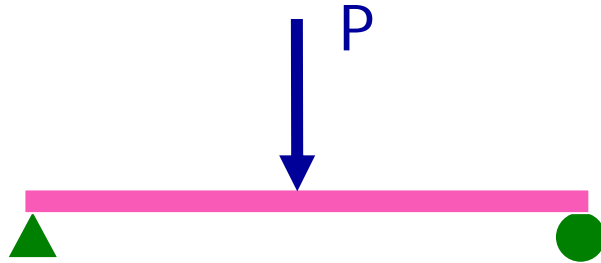
q



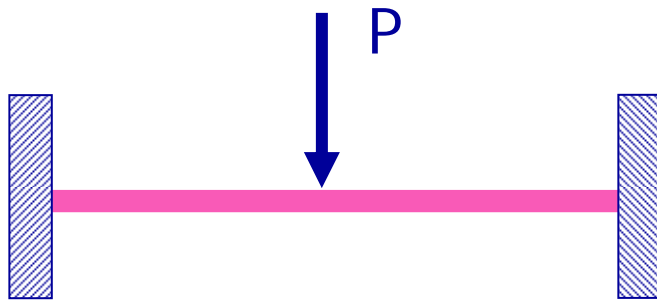
$$\delta_{\max} = \frac{1}{384} \frac{qL^4}{EI} + \frac{1}{8} \frac{qL^2}{GA}$$



## Análisis de vigas de material isótropo



$$\delta_{\max} = \frac{1}{48} \frac{PL^3}{EI} + \frac{1}{4} \frac{PL}{GA}$$



$$\delta_{\max} = \frac{1}{192} \frac{PL^3}{EI} + \frac{1}{4} \frac{PL}{GA}$$



## Análisis de vigas de material isótropo



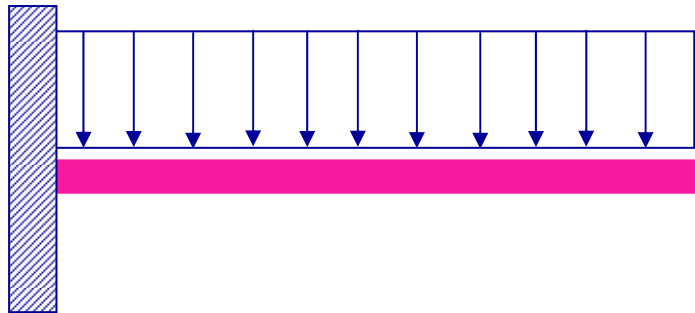
$$\delta_{\max} = \frac{ML^2}{8EI}$$



$$\delta_{\max} = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{PL}{GA}$$



## Análisis de vigas de material isótropo



$$\delta_{\max} = \frac{1}{8} \frac{qL^4}{EI} + \frac{1}{2} \frac{qL^2}{GA}$$



## Diseño frente a movimientos

- Debemos tratar de maximizar  $E_x$  en las alas y  $G_{xy}$  en el alma
- $E_x$  se incrementa con el número de láminas a 0 grados
  - Esto compromete los valores de  $G_{xy}$  y  $S_{xy}$
- $G_{xy}$  se incrementa con el número de láminas a 45 grados



## Diseño resistente

### FLEXIÓN:

$$\sigma = \frac{Mc}{I}$$

$M$  = momento flector

$c$  = distancia del eje neutro a la cara superior o inferior de la viga

$I$  = momento de inercia de la sección

$\sigma$  = máxima tensión

**NOTA:** debe chequearse tanto tracción como compresión



## Diseño resistente

### MÓDULO RESISTENTE DE LA SECCIÓN:

$$W = \frac{I}{c}$$

$$W = \frac{(\text{Coef. Seguridad}) \cdot M}{X_t \text{ (ó } X_c \text{ )}}$$

$X_t$  = resistencia a tracción

$X_c$  = resistencia a compresión





## Diseño resistente

**CORTANTE:**

$$\tau = \frac{Q M_{est}}{I h}$$

$Q$  = Esfuerzo cortante

$M_{est}$  = Momento estático

$I$  = Momento de inercia

$h$  = Espesor del alma



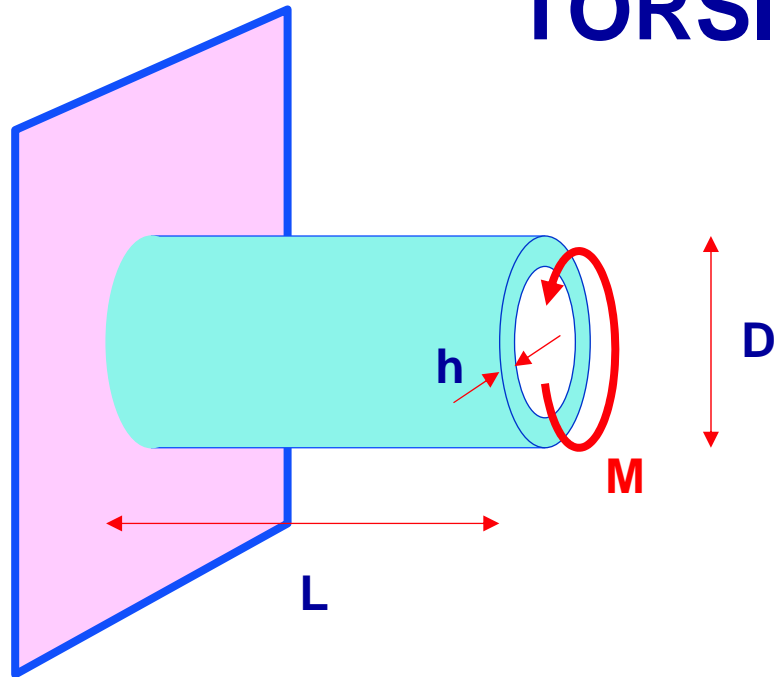
## Diseño resistente

$$\tau_{\max} = \frac{QM_{est}}{Ih} \leq \frac{S_{xy}}{(Coef. Seguridad)}$$

$S_{xy}$  = Resistencia a cortante



# TORSIÓN



Hipótesis:

$$h \ll D$$



**Deformaciones:**

$$\gamma^0 = \frac{2M}{\pi D^2 h E_6^0} \quad E_6^0 = \frac{1}{S_{66}}$$

**Tensiones:**

$$\tau^0 = \frac{2M}{\pi D^2 h}$$

**Giros:**

$$\theta = \frac{ML}{E_6^0 I_o} \quad I_o = \frac{\pi D^3 h}{4}$$

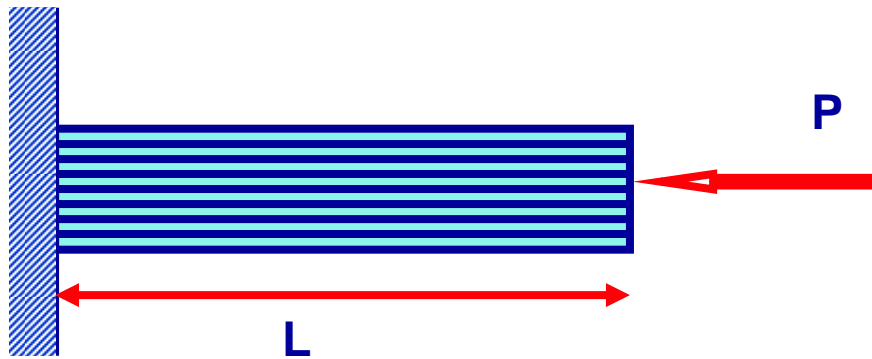


# PANDEO

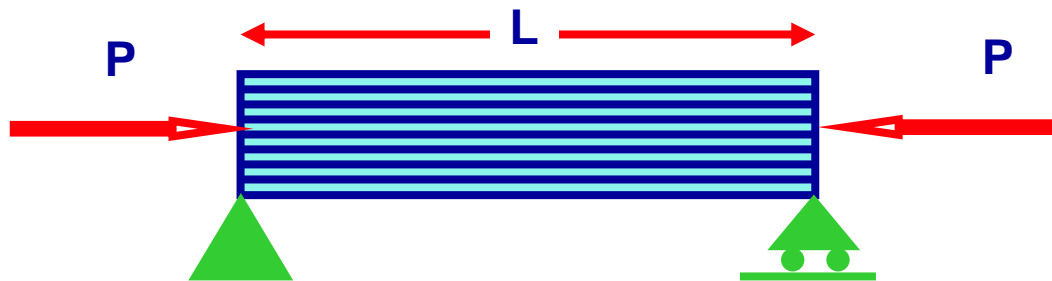
Hay que comprobar la seguridad frente a pandeo para vigas sometidas a compresión, dado que los materiales compuestos son muy flexibles y, por tanto, presentan mayor riesgo de pandeo que si, por ejemplo, la viga estuviese fabricada de acero.

Experimentalmente, se ha comprobado que, la formulación de Euler para pandeo de vigas de material isótropo es aplicable al caso de los materiales compuestos.

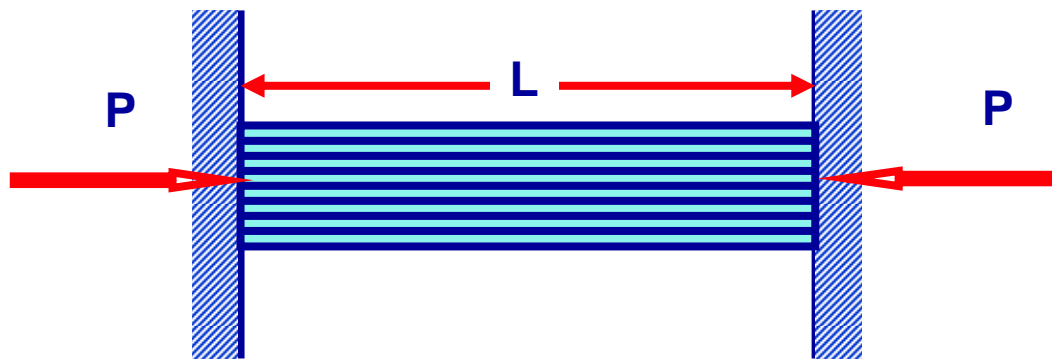
# VIGAS



$$P_{crit} = \frac{\pi^2 E^f I}{4L^2} \quad I = \frac{bh^3}{12}$$



$$P_{crit} = \frac{\pi^2 E^f I}{L^2}$$



$$P_{crit} = \frac{4\pi^2 E^f I}{L^2}$$



## COMPROBACIÓN DE SEGURIDAD FRENTE A PANDEO:

$$P < \frac{P_{crit}}{Coef. Seg.}$$