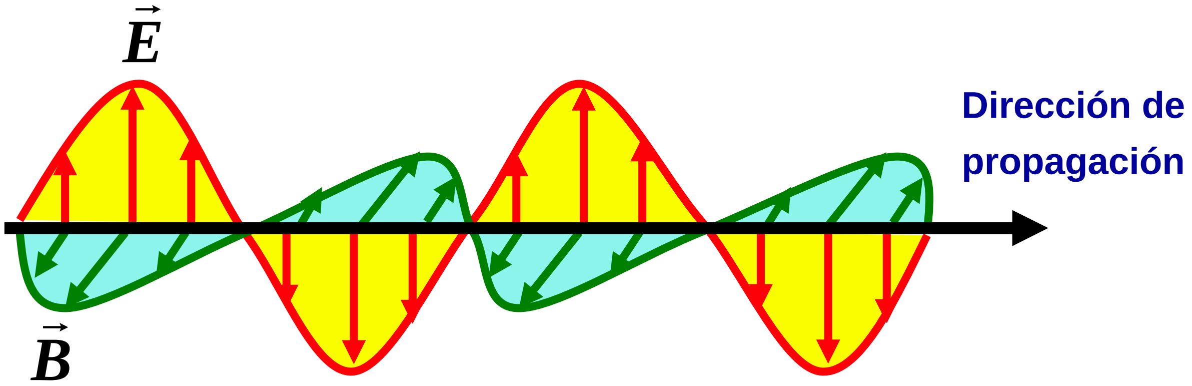
MÉTODOS OPTICOS EN ELASTICIDAD

Carlos Navarro

Departamento de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras

ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS



Consisten en un campo eléctrico y otro magnético, ortogonales entre sí, y también ortogonales a la dirección de propagación de la onda (carácter transversal de la onda)

NATURALEZA DE LA LUZ

La luz es una onda electromagnética (perturbación eléctrica y magnética que se propaga en el espacio y en el tiempo) de naturaleza transversal; es decir, el vector campo eléctrico

$$E= A\cdot\cos (k\cdot x-\omega\cdot t)$$

es ortogonal a la dirección de propagación.

En la expresión anterior, *A* es la amplitud, ω la pulsación y *k* el número de ondas ($2\cdot\pi/\lambda$) y x la distancia recorrida según el eje de propagación.

INTENSIDAD DE LA LUZ

$$I = Intensidad\ de\ la\ luz$$

$$I \propto E^2$$

LUZ o ESPETRO VISIBLE:

$3{,}8 \times 10^{-7}$ m < λ < $7{,}8 \times 10^{-7}$ m

4×10^{14} Hz < f < 8×10^{14} Hz

COLOR	**λ (x10^{-7} m)**
Violeta	3,9-4,55
Azul	4,55-4,92
Verde	4,92-5,77
Amarillo	5,77-5,97
Naranja	5,97-6,22
Rojo	6,22-7,80

ANÉCDOTA:

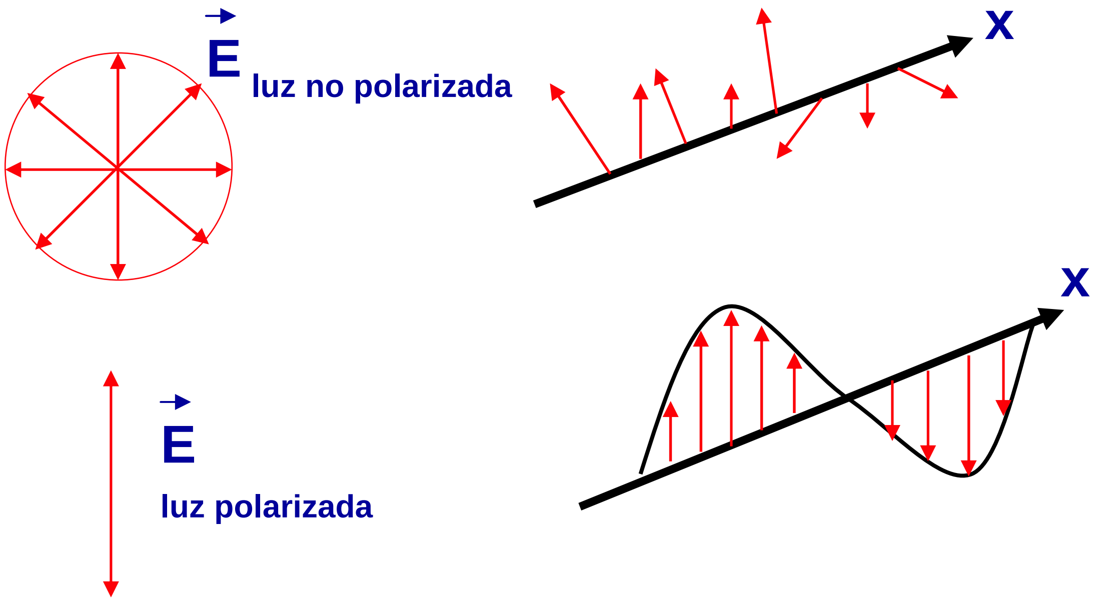
La primera hoja Polaroid, cuyo nombre ya orienta acerca de su uso, fue inventada en 1928 por Edwin H. Land teniendo 19 años y siendo aún estudiante. Esta hoja incorporaba una sustancia denominada herapatita (luego veremos el origen de este nombre) o peryoduro sulfatado de quinina. Land se apoyó en las observaciones de un físico de Bristol (Inglaterra) llamado William B. Herapath (de ahí el nombre de herapatita) que aprovechó las observaciones de un tal Mister Phelps, que era alumno suyo, y que consistían en lo siguiente:

Mr. Phelps había observado que cuando echaba yodo a la orina de un perro, al que se había incorporado a su dieta quinina, se formaban unos cristalitos de color verde; los cristales así formados, y superpuestos unos a otros, fueron analizados al microscopio por el Dr. Herapath quien observó que existían zonas en las que la luz atravesaba la capa de cristales y otras zonas se encontraban a oscuras. De esta manera tan rocambolesca fue como se descubrió este nuevo material polarizador.

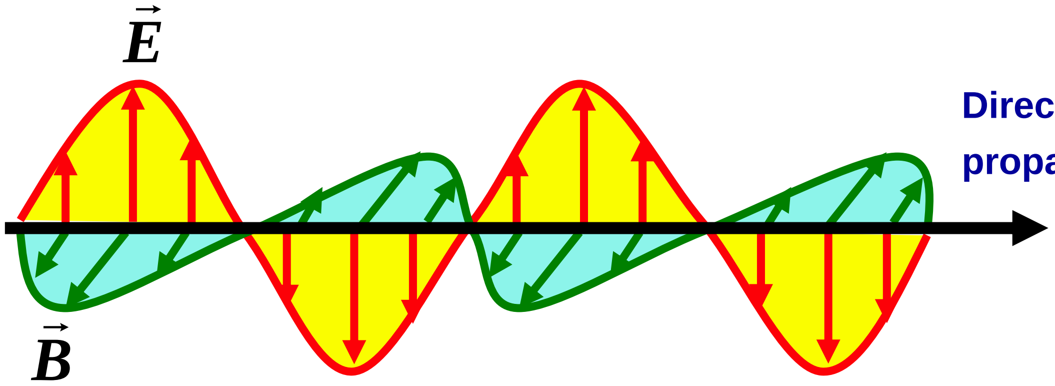
Conceptos básicos:

Luz polarizada linealmente:

Cuando el vector *E* siempre se encuentra en el mismo plano se habla de Luz polarizada linealmente.

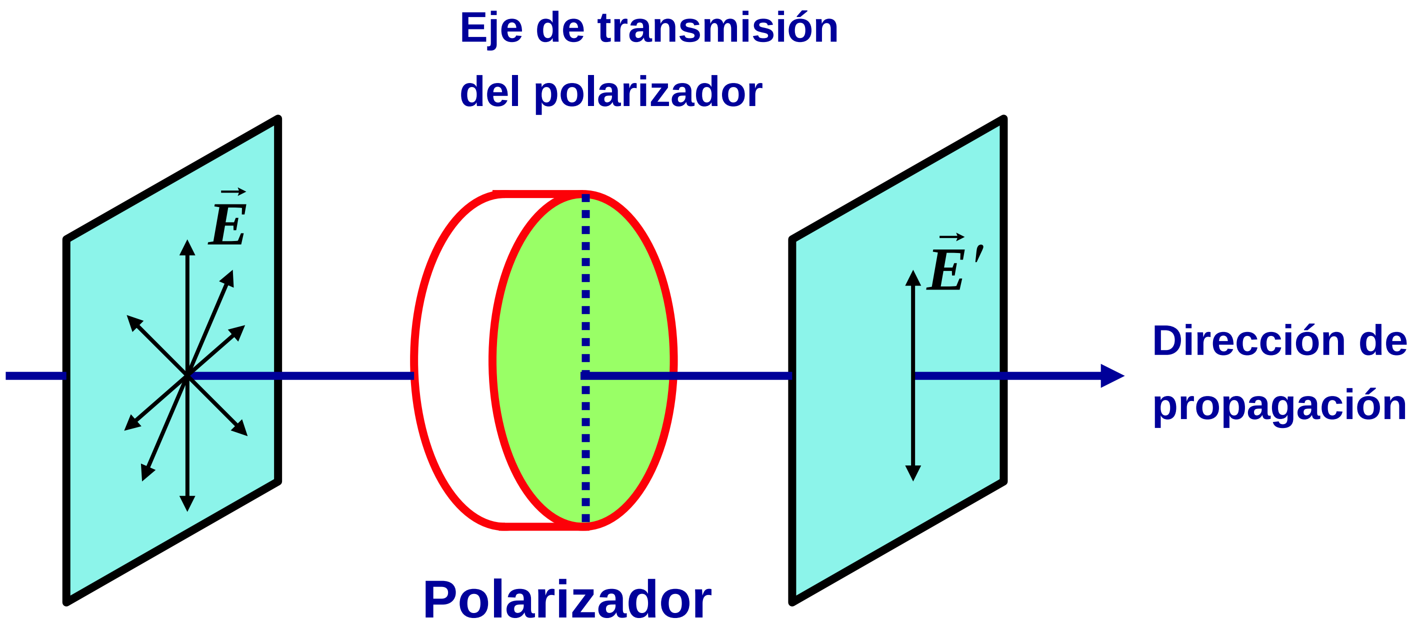


EJEMPLO DE LUZ POLARIZADA LINEALMENTE



El campo eléctrico (y por tanto, el magnético también) mantiene su dirección constante y, entonces, decimos que la luz se encuentra linealmente polarizada.

¿Cómo conseguimos luz polarizada linealmente?



Luz no polarizada

Intensidad = I

Luz linealmente polarizada

Intensidad = $I/2$

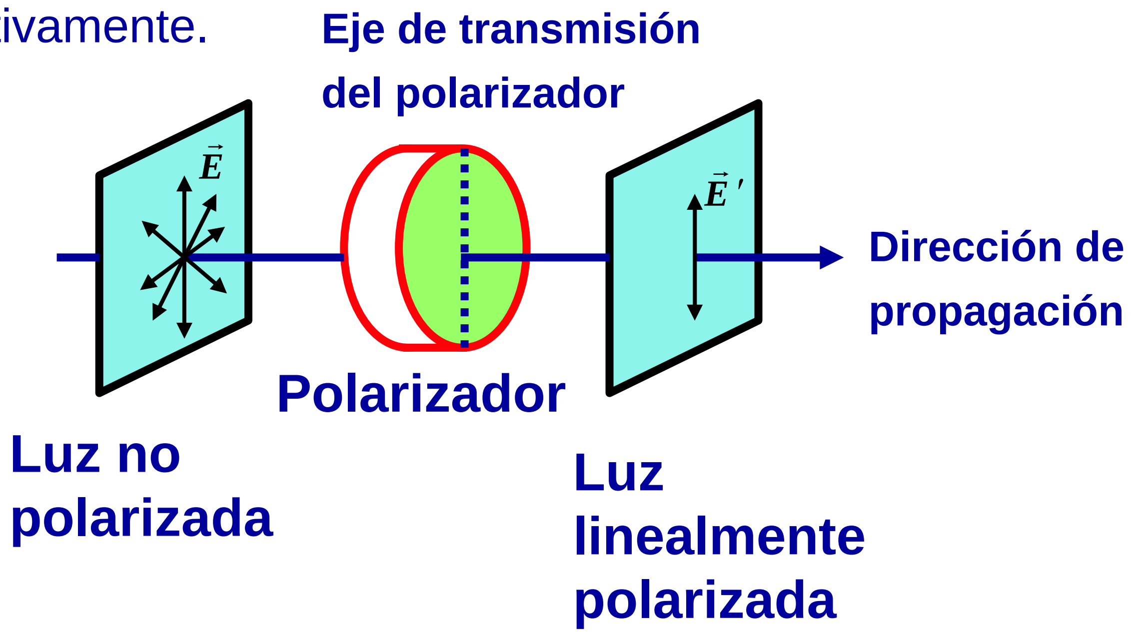
Luz polarizada circularmente:

Si el extremo del vector *E* va describiendo, a medida que avanza el tiempo y la luz se propaga, una circunferencia se tiene la Luz polarizada circularmente.

Conceptos básicos (Cont.):

Luz monocromática: Luz de una sola longitud de onda (un solo color)

Polarizador y analizador: Láminas delgadas que convierten la luz sin polarizar en luz polarizada linealmente según una dirección que se denomina eje del polarizador o analizador, respectivamente.



Los polarizadores están hechos de unos materiales con unas cadenas largas de moléculas que absorben el campo eléctrico cuya dirección no sea la del polarizador (eje de transmisión o eje del polarizador)

Efecto de dos polarizadores con sus ejes cruzados

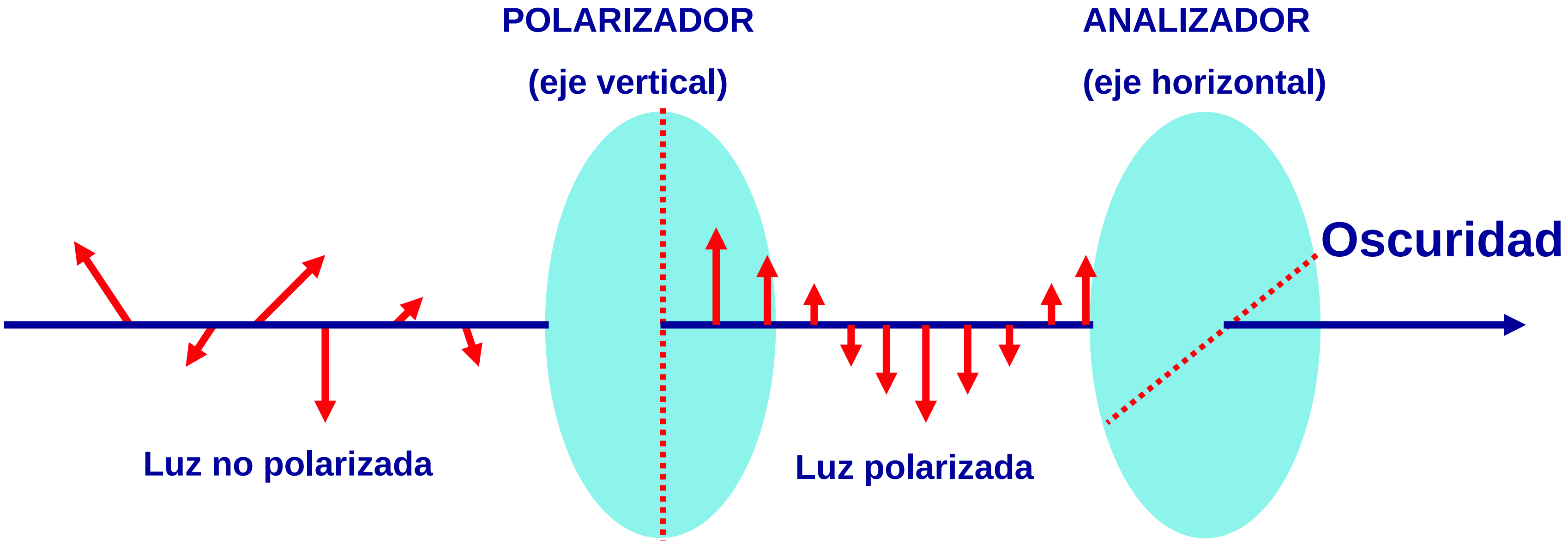


Lámina cuarto de onda: Es una lámina de un material apropiado, y dimensionada de tal forma que, al incidir sobre ella un rayo de luz emergen de ella dos rayos (el rayo ordinario y el rayo extraordinario) paralelos al rayo incidente y superpuestos, polarizados según dos direcciones ortogonales entre sí de manera que uno (polarizado según el denominado eje lento de la lámina cuarto de onda) lleva un desfase respecto al otro (que está polarizado según el eje rápido de la lámina) de $\lambda/4$, lo que equivale a un desfase angular de $\pi/2$.

Es decir, si el rayo correspondiente al eje rápido fuera $E = A \cdot \cos \omega . t$, el rayo correspondiente al eje lento sería: $E' = A' \cdot \cos(\omega . t - \pi/2)$.

FUNDAMENTO DEL MÉTODO:

Existen materiales no cristalinos tales como resinas sintéticas, baquelita, etc., que cuando están libres de tensión presentan propiedades ópticas de carácter isótropo; es decir el índice de refracción n_0 es independiente de cualquiera que sea la dirección considerada dentro del medio material.

Recordatorio: **$n_0 = c/v$, donde c es la velocidad de propagación de la luz en el vacío y v es la velocidad de propagación en el medio considerado**

Sin embargo, cuando los citados materiales se encuentran sometidos a un estado tensional se vuelven ópticamente anisótropos, presentando un índice de refracción que depende de cual sea la dirección considerada.

Si suponemos que el estado de tensiones en un punto del material viene representado por los valores de sus tensiones principales σ_1 , σ_2 , σ_3 los correspondientes índices de refracción, para cada una de las direcciones principales, vienen dados por lo que se conocen como las Leyes de Maxwell.

Leyes de Maxwell:

$$n_1 - n_0 = p \cdot \sigma_1 + q \cdot (\sigma_2 + \sigma_3)$$

$$n_2 - n_0 = p \cdot \sigma_2 + q \cdot (\sigma_1 + \sigma_3)$$

$$n_3 - n_0 = p \cdot \sigma_3 + q \cdot (\sigma_2 + \sigma_1)$$

p y q son dos constantes que dependen del material, denominadas coeficientes ópticos de tensiones.

En un estado de tensión plana, $\sigma_3 = 0$, por lo que:

$$n_1 - n_0 = p \cdot \sigma_1 + q \cdot \sigma_2$$

$$n_2 - n_0 = p \cdot \sigma_2 + q \cdot \sigma_1$$

ó, restando:

$$n_1 - n_2 = C \cdot (\sigma_1 - \sigma_2)$$

siendo C una constante del material que recibe el nombre de *constante fotoelástica* del medio en cuestión, que se determina de manera experimental y que depende de la longitud de onda de la luz incidente y la temperatura.

La ecuación anterior se conoce como la ley de Brewster y constituye la relación básica de la fotoelasticidad.

Sir David Brewster

(1781-1868)

Ley de Brewster:

$$n_1 - n_2 = C \cdot (\sigma_1 - \sigma_2)$$

PROBLEMAS DE ELASTICIDAD PLANA:

$$\Delta\left(\sigma_x + \sigma_y\right) = 0$$

¡En la solución de la ecuación anterior no aparece ninguna constante elástica del material del que esté realizado el sólido!

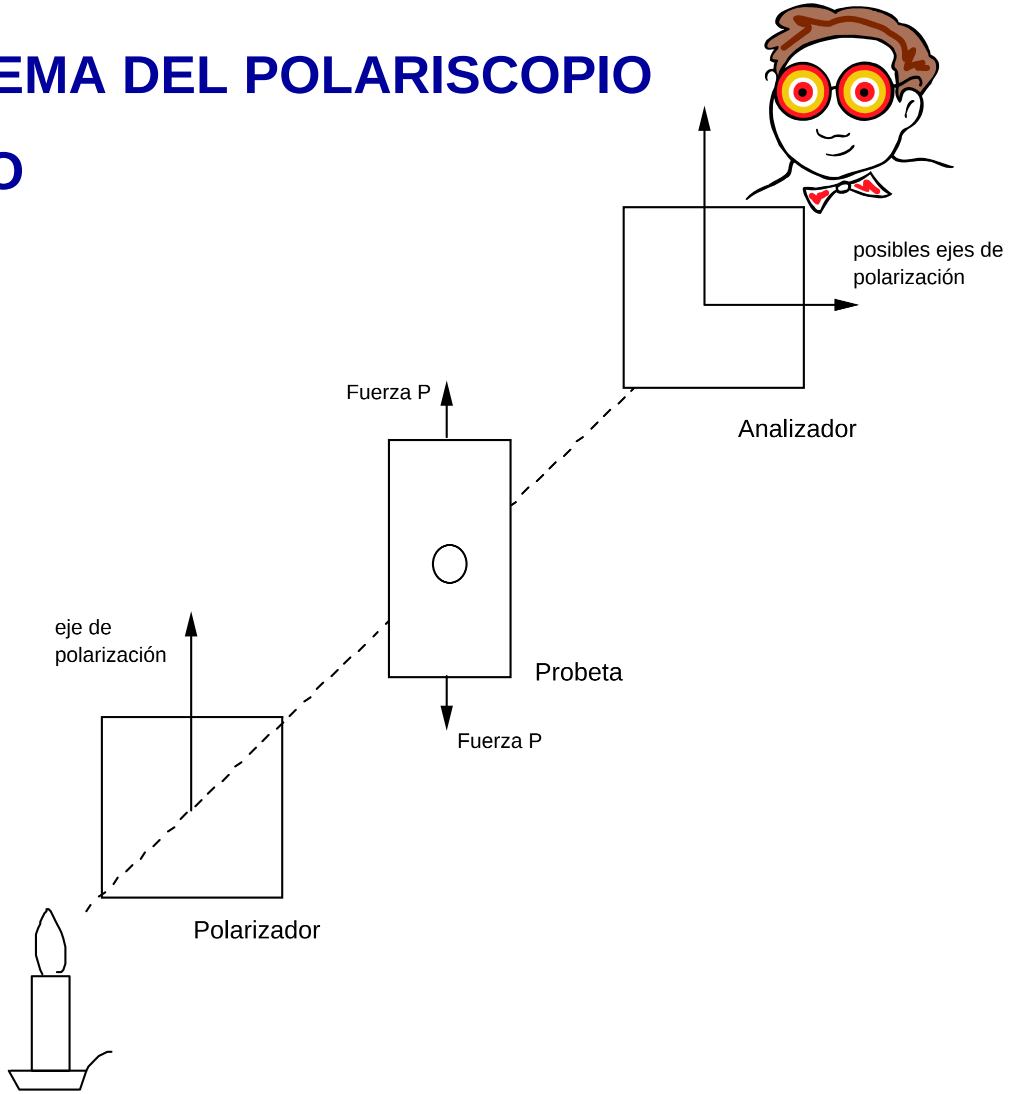
ISOCROMÁTICAS: **aquellas curvas en las que la diferencia entre los valores de las tensiones principales toma un determinado valor:**

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \text{cte} \qquad \tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \text{Constante}$$

LEY DE BREWSTER:

$$n_1 - n_2 = C \cdot (\sigma_1 - \sigma_2)$$

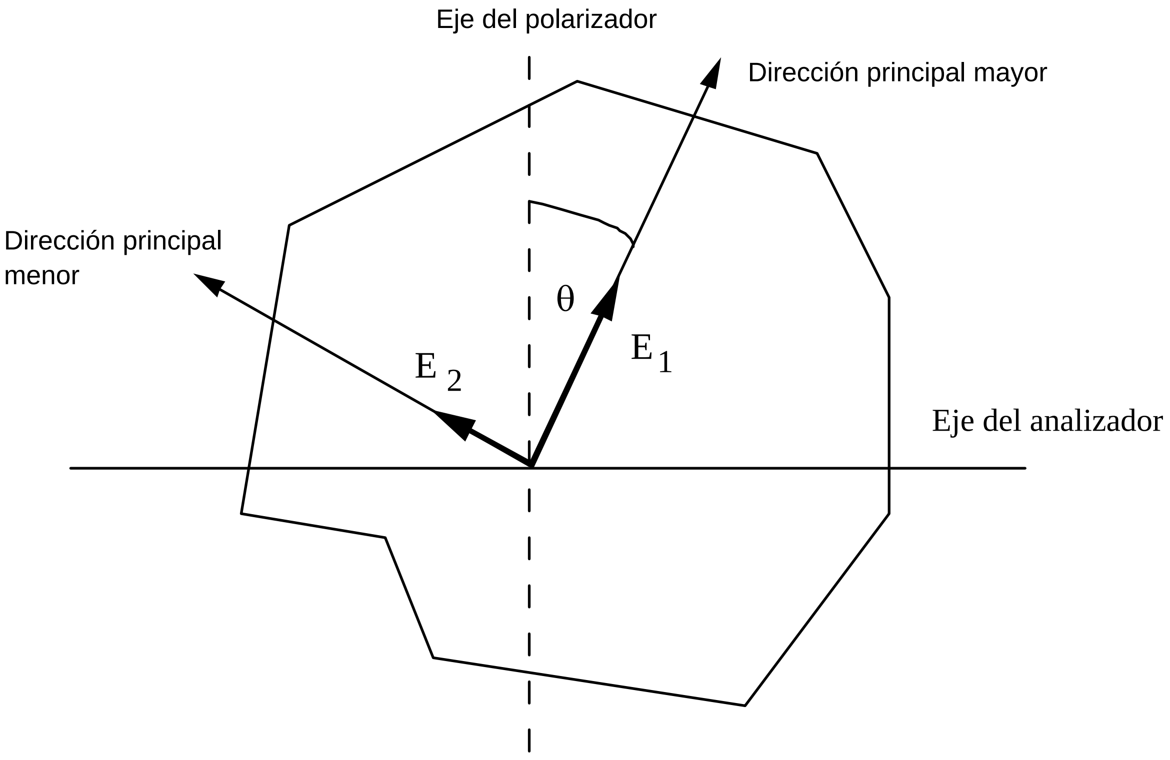
ESQUEMA DEL POLARISCOPIO PLANO



La luz que produce un foco luminoso (luz no polarizada) atraviesa un polarizador que la polariza linealmente. El campo eléctrico de la luz polarizada puede escribirse como:

$$E = A \cos \omega t.$$

Al atravesar dicha onda luminosa la probeta, se descompondrá de acuerdo a las direcciones principales de la misma:



Las dos vibraciones que llegan al modelo

$\mathbf{E_1}$=A cos θ . cos ωt y $\mathbf{E_2}$=A senθ . cos ωt

lo atraviesan sufriendo una un retraso respecto de la otra.

Si llamamos *e* al espesor del modelo, el tiempo t_1 que necesita la componente de **E** paralela al eje principal mayor es:

$$t_1 = \frac{e}{v_1}$$

donde v_1 es la velocidad a la que se propaga esta componente dentro del modelo.

De igual manera, el tiempo t_2 que necesita la componente de **E** paralela al eje principal menor es:

$$t_2 = \frac{e}{v_2}$$

donde v_2 representa la velocidad a la que se propaga esta componente.

El desfase entre ambas componentes, una vez que han atravesado el modelo será:

$$\omega(t_1 - t_2)$$

y las componentes según los ejes principales mayor y menor serán, respectivamente:

$$E_1' = A\cos\omega(t - t_1)\cos\theta$$

$$E_2' = A\cos\omega(t - t_2)sen\theta$$

Proyectando estas componentes sobre el eje del analizador (que se supone ortogonal al del polarizador) se obtienen las siguientes componentes sobre dicho eje:

$$E_1'' = E_1' sen\theta = \frac{A}{2}\cos\omega(t - t_1).sen2\theta$$

$$E_2'' = E_2'\cos\theta = \frac{A}{2}\cos\omega(t - t_2).sen2\theta$$

La composición de estas dos vibraciones anteriores proporciona una perturbación total, según el eje del analizador, dada por:

$$\frac{A}{2} sen2\theta.\left[\cos\omega(t-t_1)-\cos\omega(t-t_2)\right]=$$

$$= Asen2\theta.sen\omega\frac{t_1-t_2}{2}.sen\omega(t-\frac{t_1+t_2}{2})$$

que representa una perturbación de la misma pulsación (frecuencia) que la del rayo incidente y cuya amplitud *B* vale:

$$\boldsymbol{B = Asen2\theta.sen\omega\frac{t_1-t_2}{2}}$$

$$B = Asen2\theta.sen\omega \frac{t_1 - t_2}{2}$$

B es máxima cuando:

$$\omega \frac{t_1 - t_2}{2} = \frac{2n+1}{2}\pi$$

siendo n un número entero, y es nula cuando:

$$\omega \frac{t_1 - t_2}{2} = n\pi$$

pero:

$$\omega \frac{t_1 - t_2}{2} = \frac{\omega\, e}{2\, c}(n_1 - n_2)$$

siendo, en este caso, c la velocidad de la luz en el aire.

Utilizando la ley de Brewster:

$$\frac{\omega(t_1 - t_2)}{2} = \frac{\pi e}{\lambda} C(\sigma_1 - \sigma_2) \begin{cases} Interf.\,construct.: & \dfrac{e\,C}{\lambda}(\sigma_1 - \sigma_2) = \dfrac{2n+1}{2} \\ Interf.\,destruct.: & \dfrac{e\,C}{\lambda}(\sigma_1 - \sigma_2) = n \end{cases}$$

Introduciendo una nueva constante *(F=valor de franja=l/C)* la interferencia destructiva (franja negra en la pantalla de observación) se produce cuando:

$$(\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{n\,F}{e}$$

que se conoce como la fórmula fundamental de la fotoelasticidad.

El valor de *n* puede calcularse en cada punto contando el número de mínimos que se producen al aplicar la carga al modelo.

Nótese que la ecuación:

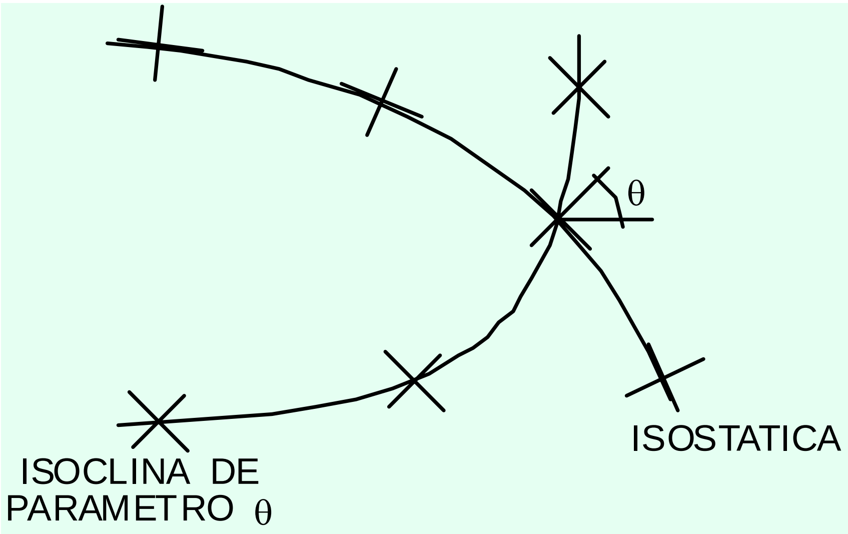
$$B = A sen 2\theta . sen \omega \frac{t_1 - t_2}{2}$$

también se hace nula cuando: $sen 2\theta = 0 \Rightarrow \theta = n\frac{\pi}{2} \quad n = 0,1,2,3,\ldots$

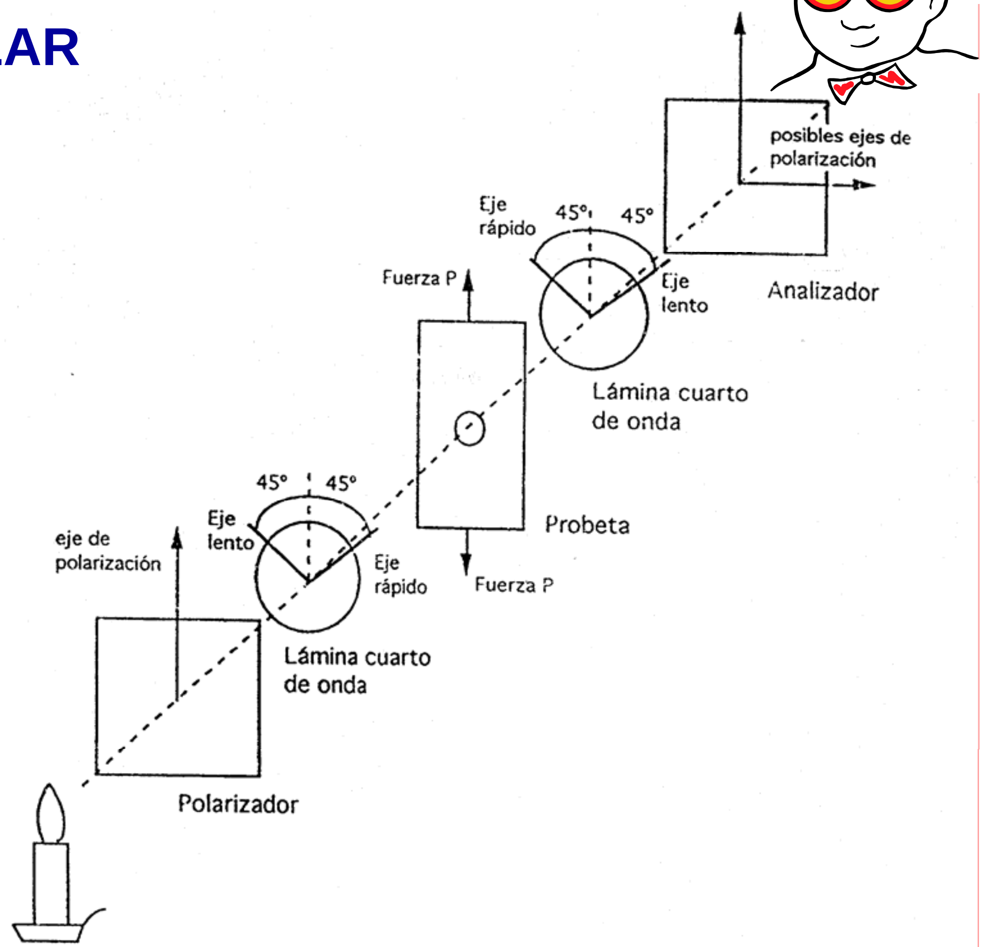
que representan aquellos puntos en los que las direcciones principales son coincidentes con los ejes de polarización del polarizador y del analizador. Usando este polariscopio se obtiene una superposición de isocromáticas y de isoclinas.

ISOCLINAS:

Lugar geométrico de los puntos en los que las tensiones principales son paralelas a una dirección prefijada, y que se denomina parámetro de la isoclina.



ESQUEMA DEL POLARISCOPIO CIRCULAR



FOTOELASTICIDAD

El funcionamiento es el siguiente: la luz producida en un foco luminoso se polariza a través de un polarizador lineal cuyo eje de polarización lo hemos dibujado vertical. La luz linealmente polarizada incide sobre una lámina cuarto de onda cuyos ejes rápido y lento forman 45 con el eje del polarizador. La luz emergente, que queda polarizada circularmente como se demostrará con posterioridad, atraviesa el modelo cargado, incidiendo sobre otra nueva lámina cuarto de onda, cuyos ejes son paralelos a los de la lámina cuarto de onda previa pero intercambiados de posición, para luego incidir sobre lo que se denomina analizador y que vuelve a ser otro polarizador lineal. El eje de polarización del analizador puede ser colocado paralelo u ortogonal al eje del primer polarizador. Los efectos de esto último serán analizados más tarde.

Sea $E = A \cdot \cos \omega \cdot t$ el campo eléctrico tras atravesar la luz el polarizador. Al incidir sobre la primera lámina cuarto de onda, este vector se descompondría en otros dos:

a) uno en la dirección del eje rápido ($E_r = A/\sqrt{2} \cos \omega \cdot t$) y

b) otro en la dirección del eje lento ($E_l = A/\sqrt{2} \cos \omega \cdot t$).

Este último, al atravesar la lámina cuarto de onda, sufre un desfase de $\pi/2$ respecto al primero, por lo que los dos rayos emergentes de la primera lámina cuarto de onda serán:

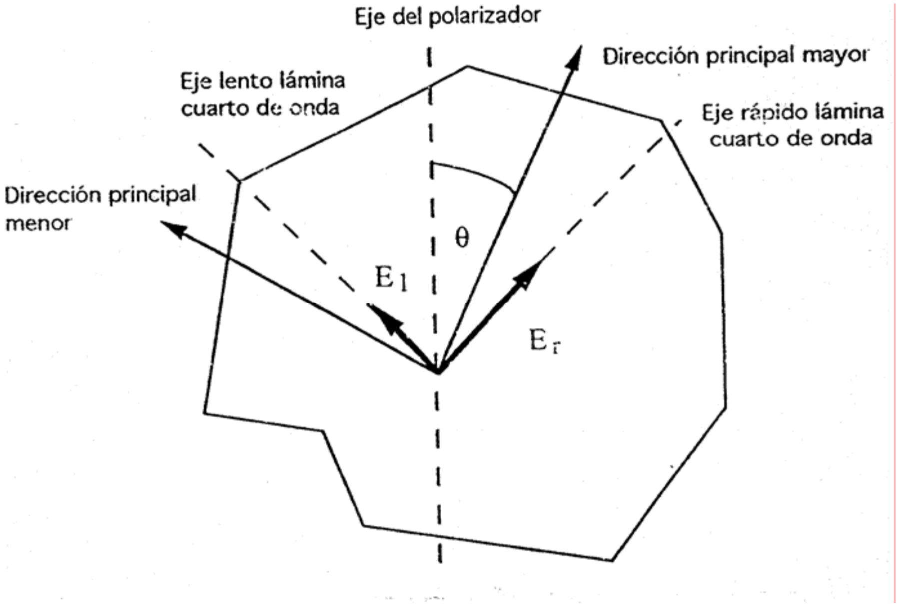
$$E_r = A/\sqrt{2} \cos \omega \cdot t$$

$$E_l = A/\sqrt{2} \cos(\omega \cdot t - \pi/2) = A/\sqrt{2} \operatorname{sen} \omega \cdot t$$

El extremo del vector campo eléctrico resultante describirá, a lo largo del tiempo, un círculo por lo que la luz que emerge se dice que está polarizada circularmente.

Al atravesar el modelo cargado debemos calcular las nuevas componentes del campo eléctrico emergentes según la direcciones principales de tensión.

Suponiendo que el eje correspondiente a la tensión principal mayor forma un ángulo de θ grados con el eje del polarizador:



Los valores de las componentes del campo eléctrico sobre los ejes principales mayor y menor (E_1 y E_2 , respectivamente) del modelo elástico vendrán dados por:

$$E_1 = A/\sqrt{2} \cos (\omega \cdot t + \theta - \pi/4)$$

$$E_2 = A/\sqrt{2} \operatorname{sen} (\omega \cdot t + \theta - \pi/4)$$

Cada una de estas dos componentes se propagan en el medio material a velocidades diferentes, pues éste se encuentra sometido a un estado tensional y, por tanto, presenta diferentes índices de refracción según cada dirección.

Si llamamos *e* al espesor del modelo, que se supone constante, y v_1 y v_2 a las velocidades de propagación de las dos componentes consideradas, el nuevo desfase, Φ, que la interposición física del modelo introduce, resultará:

$$\Phi = \omega\cdot(e/ v1 - e/v2) = 2\cdot\pi\cdot e\cdot C\cdot(\sigma 1 - \sigma 2)/ \lambda$$

Por lo que las componentes que emergen del modelo son:

$$E1= A/\sqrt{2} \cdot \cos(\omega\cdot t + \theta - \pi/4)$$

$$E2= A/\sqrt{2} \cdot \cos(\omega\cdot t + \theta - \pi/4 - \Phi)$$

Por lo que las componentes que emergen del modelo son:

$$E_1 = A/\sqrt{2} \cdot \cos(\omega \cdot t + \theta - \pi/4)$$

$$E_2 = A/\sqrt{2} \cdot \cos(\omega \cdot t + \theta - \pi/4 - \Phi)$$

Sobre la siguiente lámina cuarto de onda, las componentes que incidirían según el eje rápido y lento (no olvidar que están cruzados respecto a los ejes de la primera lámina cuarto de onda) son:

$$E'_r = A/\sqrt{2}\,(\cos(\omega \cdot t + \theta - \pi/4) \cdot \mathrm{sen}(\pi/4 - \theta) + \mathrm{sen}(\omega \cdot t + \theta - \pi/4 - \Phi) \cdot \cos(\pi/4 - \theta))$$

$$E'_l = A/\sqrt{2}\,(\cos(\omega \cdot t + \theta - \pi/4) \cdot \cos(\pi/4 - \theta) - \mathrm{sen}(\omega \cdot t + \theta - \pi/4 - \Phi) \cdot \mathrm{sen}(\pi/4 - \theta))$$

Como la componente E'_l sufre un desfase de $\pi/2$ al atravesar la segunda lámina cuarto de onda, las componentes emergentes serán:

$$E'_r = A/\sqrt{2}\,(\cos(\omega\cdot t + \theta - \pi/4)\cdot \mathrm{sen}(\pi/4 - \theta) +$$

$$+\,\mathrm{sen}(\omega\cdot t + \theta - \pi/4 - \Phi)\cdot\cos(\pi/4 - \theta))$$

$$E'_l = A/\sqrt{2}\,(\mathrm{sen}(\omega\cdot t + \theta - \pi/4)\cdot\cos(\pi/4 - \theta) +$$

$$+\,\mathrm{sen}(\omega\cdot t + \theta - \pi/4 - \Phi)\cdot \mathrm{sen}(\pi/4 - \theta))$$

FOTOELASTICIDAD

Si el eje del analizador fuera ortogonal al del polarizador (campo oscuro), el campo eléctrico que podría ser finalmente observado sería:

$$E' = E'_l \cdot \cos \pi/4 - E'_r \cdot \cos \pi/4 =$$

$$= A \text{ sen } (\Phi/2) \cdot \text{sen } (\omega \cdot t - \Phi/2)$$

Se producirán franjas oscuras (interferencia destructiva) cuando *sen* $(\Phi/2) = 0$; es decir, cuando $\Phi/2 = n \cdot \pi$ $(n=0,\pm 1,\pm 2,...)$.

Como Φ depende de la diferencia entre los valores de las tensiones principales, la ecuación anterior definirá las isocromáticas :

$$\sigma_1 - \sigma_2 = n \cdot \lambda \,/\, (e \cdot C)$$

donde $\lambda/(e \cdot C)$ es una constante.

Si el eje del analizador fuera paralelo al del polarizador (campo brillante), el campo eléctrico que podría ser observado resultaría ser:

$$E' = E'_l \cdot \cos \pi/4 + E'_r \cdot \cos \pi/4 =$$

$$= A \cos(\Phi/2) \cdot \mathrm{sen}(\omega \cdot t - \Phi/2)$$

por lo que se producirán franjas oscuras (interferencia destructiva) cuando se cumpla que $\cos(\Phi/2) = 0$; es decir, cuando $\Phi/2 = (2 \cdot n + 1) \cdot \pi$, ($n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Al igual que anteriormente sucedió, la ecuación anterior definirá las isocromáticas:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = (2n+1) \cdot \lambda / (e \cdot C)$$

donde $\lambda/(e \cdot C)$ es un constante.