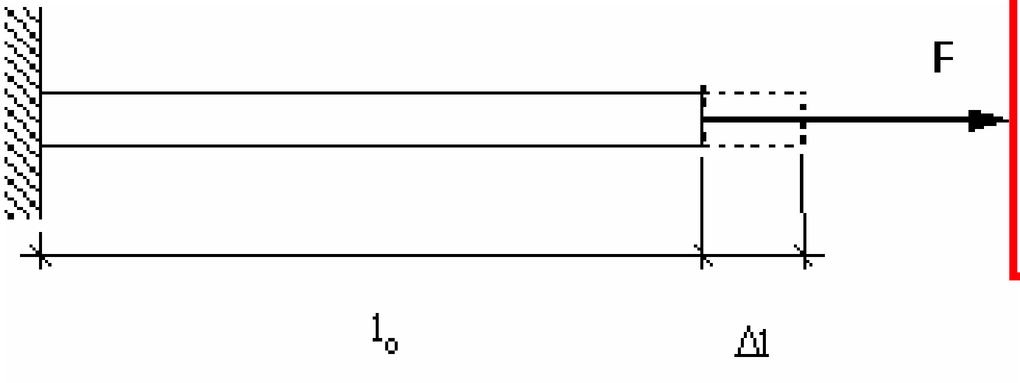
UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID

COMPORTAMIENTO MICROMECÁNICO

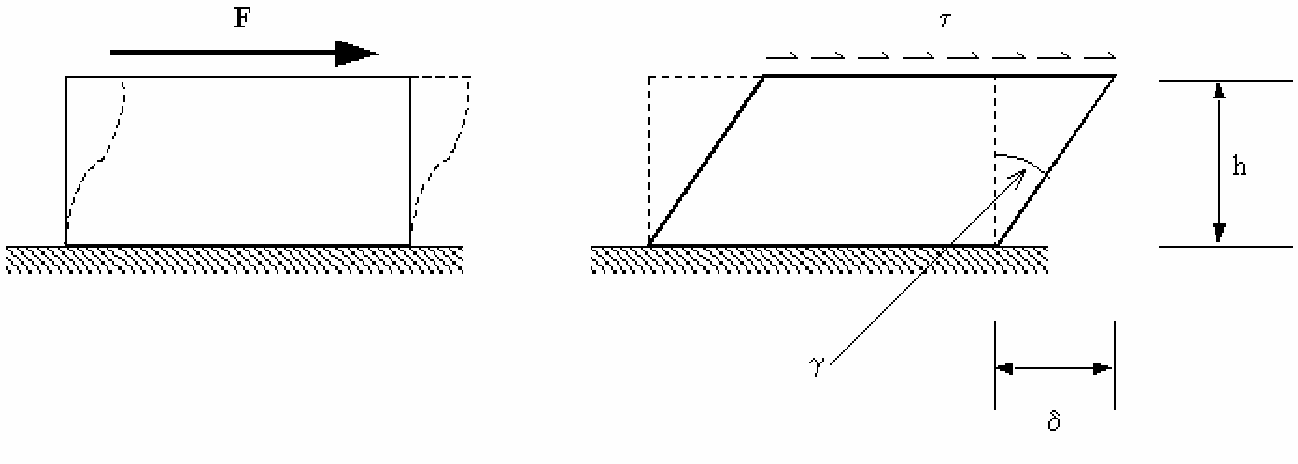
Carlos Navarro

Departamento de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras

CONCEPTOS Y TIPOS DE TENSION Y DEFORMACIÓN



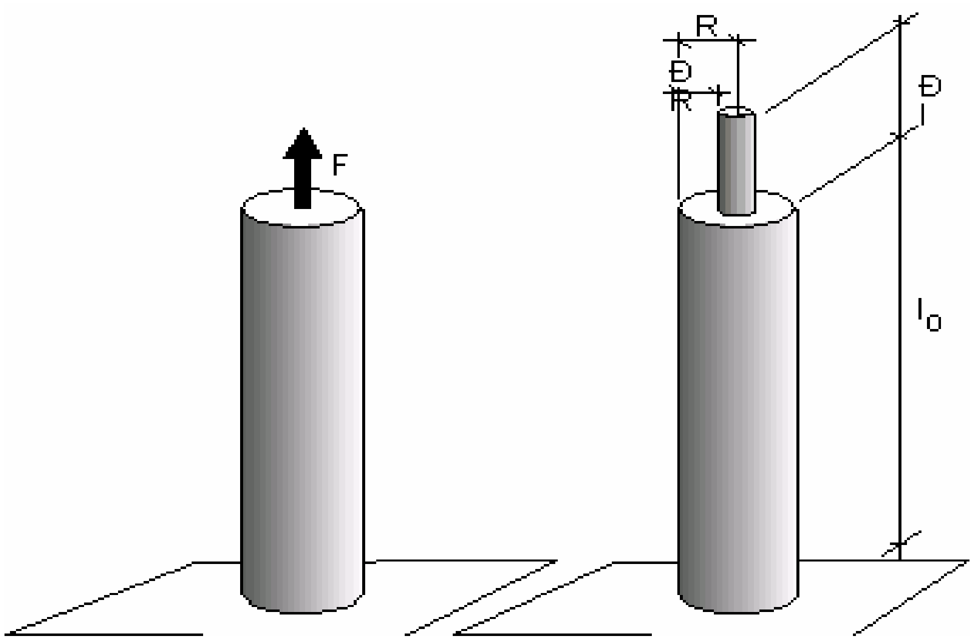
$$\sigma = F/A \qquad \varepsilon_L = \frac{\Delta l}{l_0}$$



$$\tau = F/\Omega$$

$$\mathrm{tg}\gamma \approx \gamma = \frac{\delta}{h}$$

EFECTO POISSON



$$\varepsilon_l = deformación\ \ longitudinal = \Delta l / l_0$$

$$\varepsilon_T = deformación\ transversal = \Delta R / R$$

$$\boxed{\varepsilon_T = -\nu \varepsilon_L}$$

Leyes de comportamiento (material elástico-lineal e isótropo):

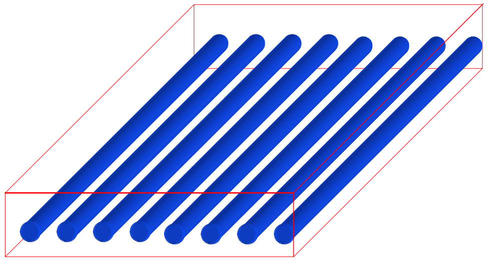
$$\sigma = E\varepsilon$$

Ley de Hooke

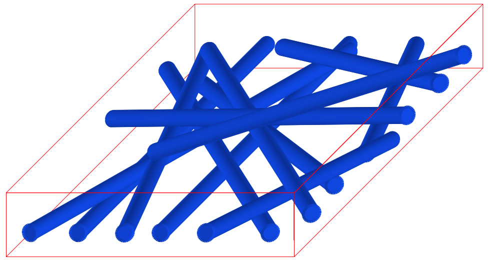
$$\tau = G\gamma$$

$$\boxed{G = \frac{E}{2(1+\nu)}}$$

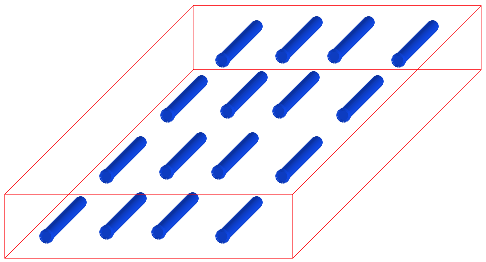
INTRODUCCIÓN



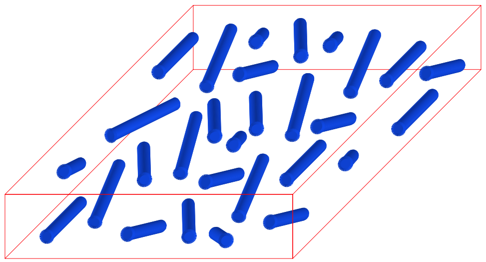
Fibras largas unidireccionales



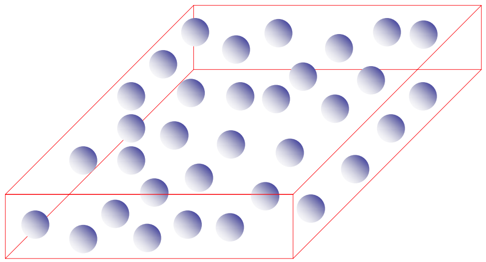
Fibras largas con orientación aleatoria



Fibras cortas alineadas

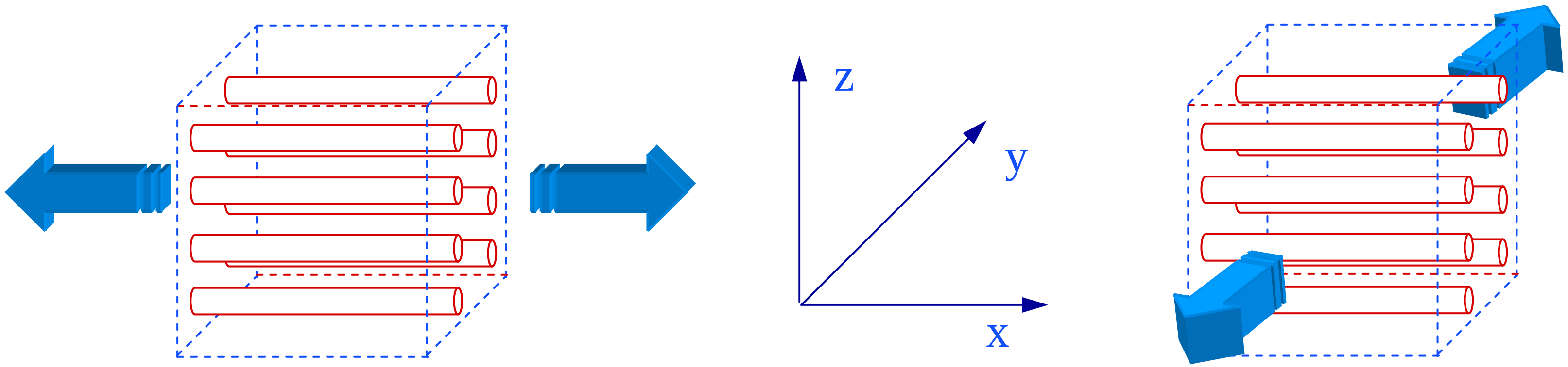


Fibras cortas con orientación aleatoria



Partículas

ANISOTROPIA



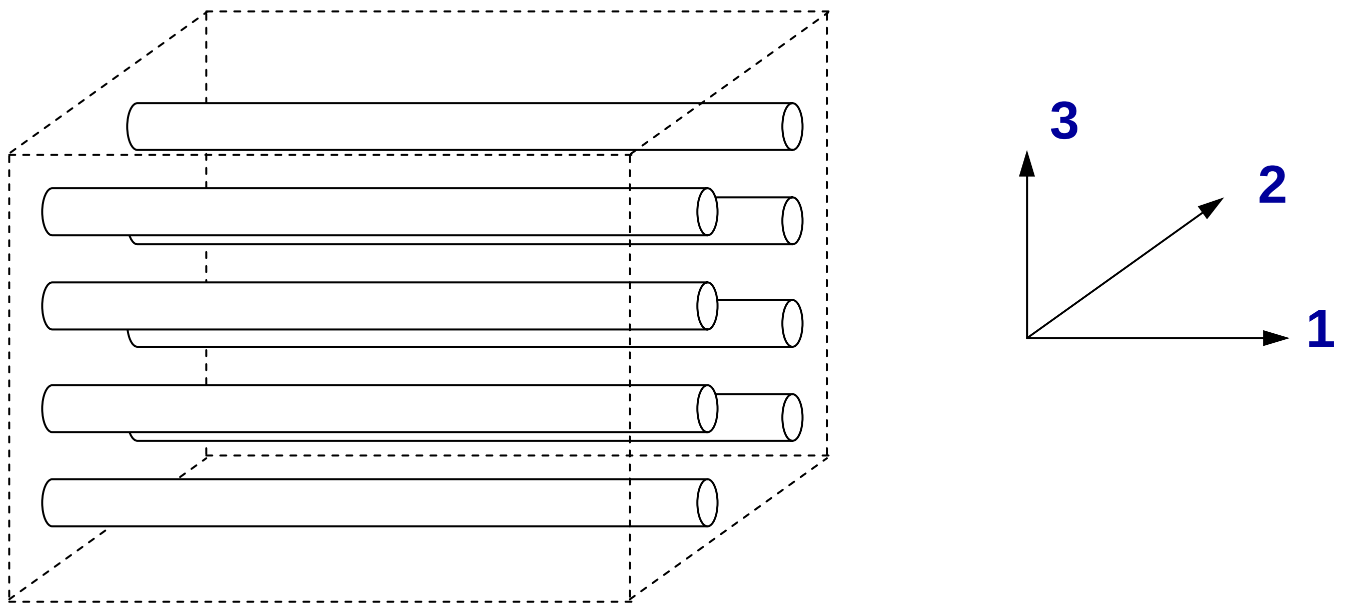
E_1 ; X

$E_1 >> E_2$

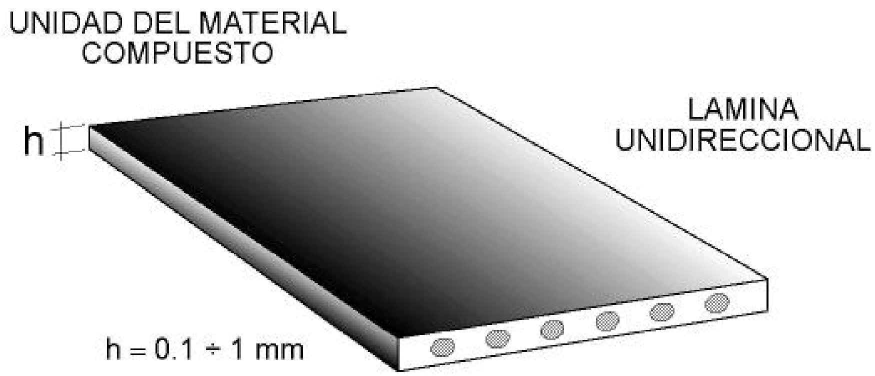
E_2 ; Y

X >> Y

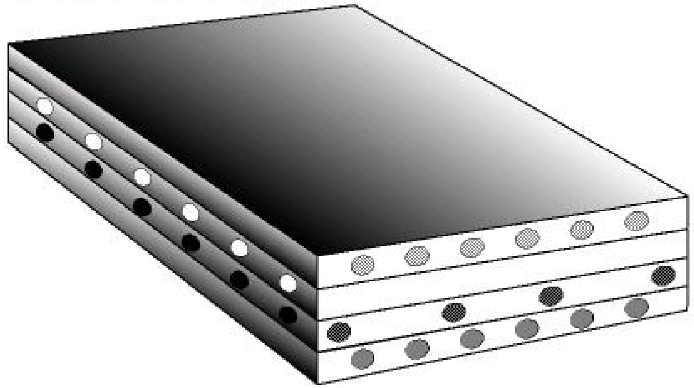
Direcciones materiales en una lámina



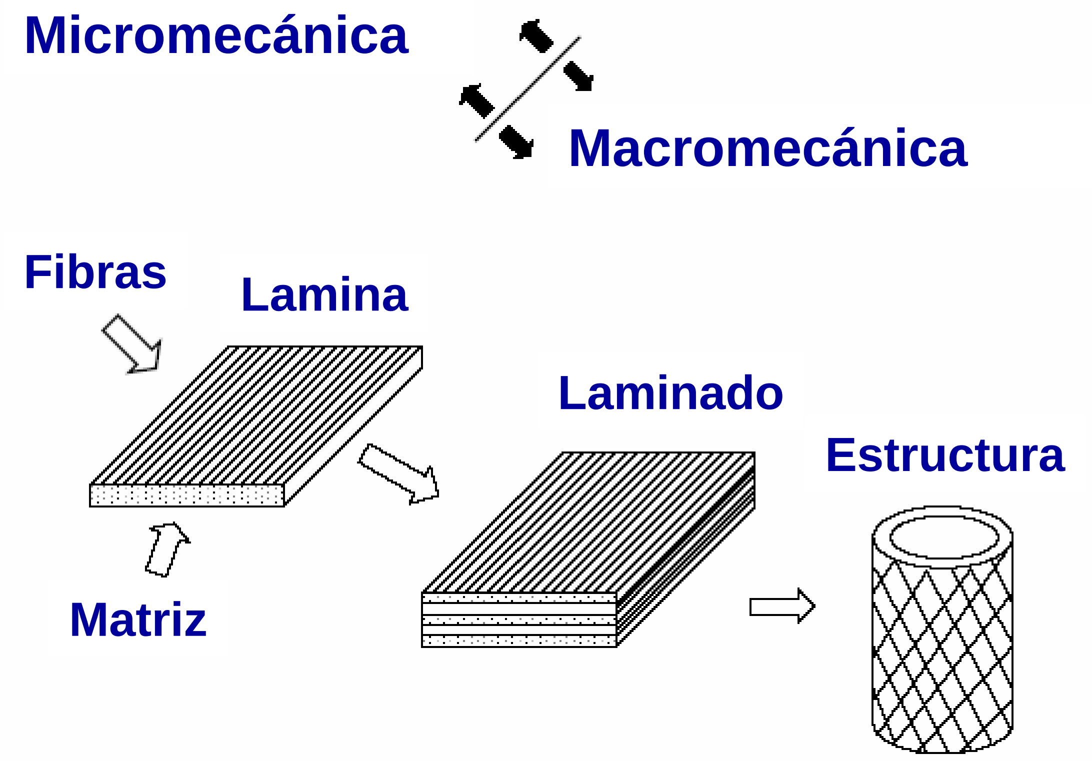
ANISOTROPIA



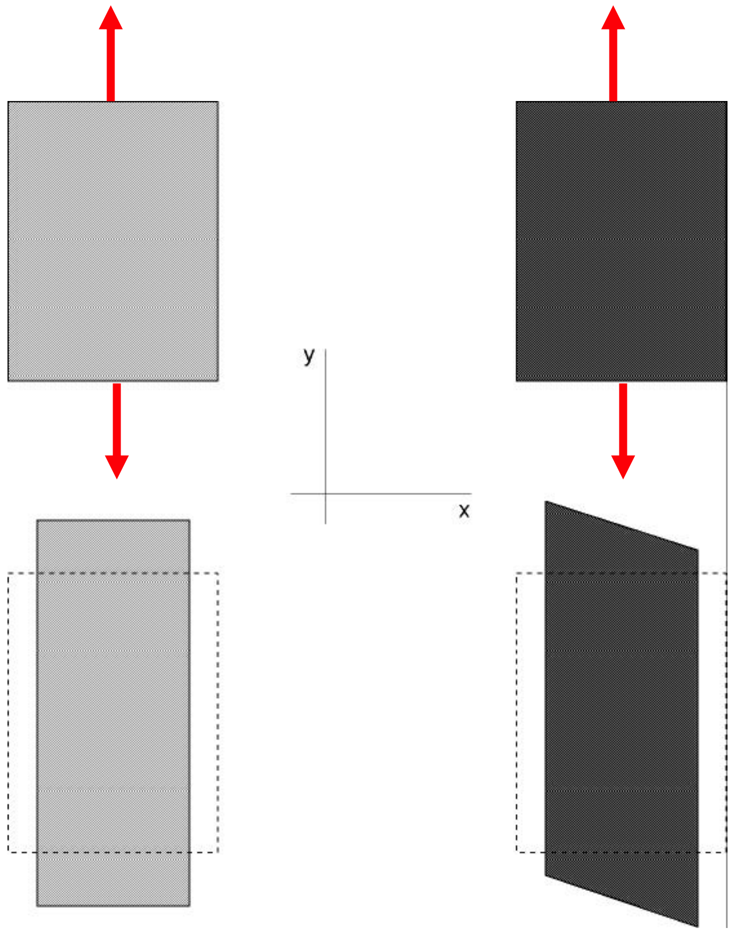
LAMINADO: CONJUNTO DE LÁMINAS



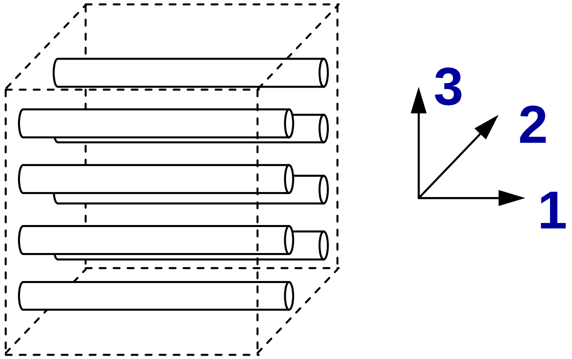
ANISOTROPIA



ANISOTROPIA



ANISOTROPIA



$E_1 \quad E_2 \quad E_3$

$G_{12} \quad G_{13} \quad G_{23}$

$\nu_{12} \quad \nu_{21} \quad \nu_{13} \quad \nu_{31} \quad \nu_{23} \quad \nu_{32}$

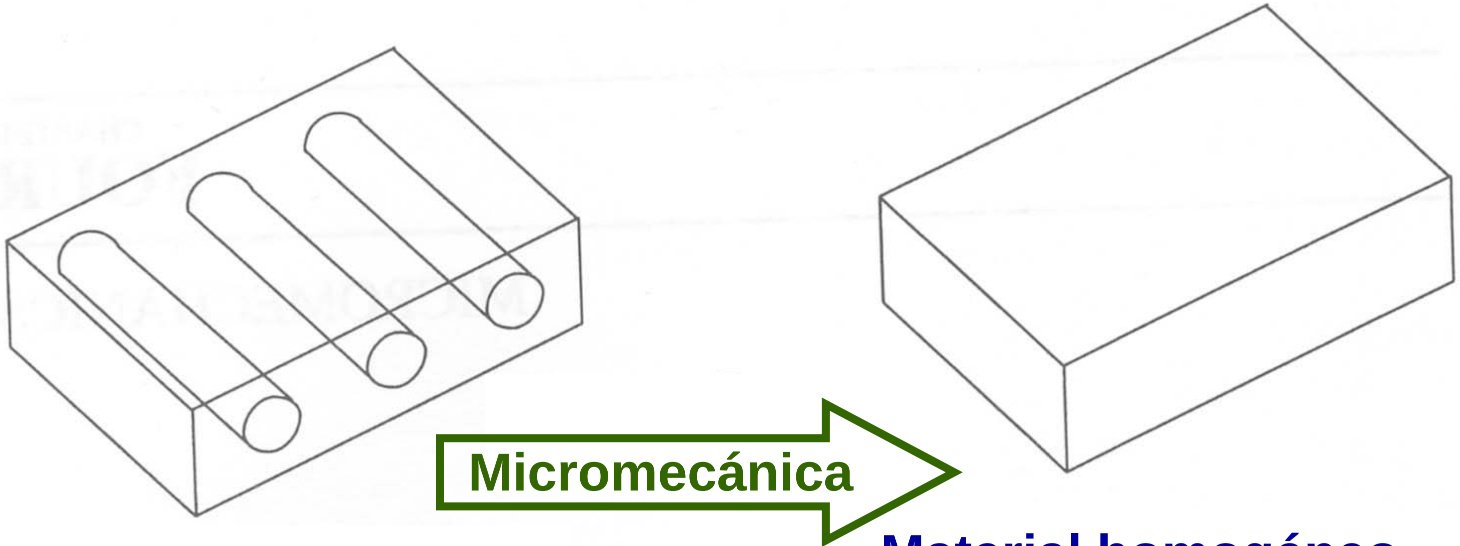
$$\boxed{\nu_{ji} = -\frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_i}}$$

i = dirección de carga

j = dirección perpendicular a la de carga

$$\boxed{\frac{\nu_{ji}}{E_i} = \frac{\nu_{ij}}{E_j} \qquad i, j = 1, 2, 3}$$

ANISOTROPIA



Material heterogéneo

Material homogéneo

anisótropo equivalente

Contenido volumétrico de refuerzo

$$V_f = \frac{Volumen\ \text{de fibras}}{\text{Volumen total}}$$

$$V_m = \frac{Volumen\ \text{de matriz}}{\text{Volumen total}}$$

$$\boldsymbol{V_f + V_m = 1}$$

Contenido másico de refuerzo

$$M_f = \frac{\text{Masa de fibras}}{\text{Masa total}}$$

$$M_m = \frac{Masa \text{ de matriz}}{\text{Masa total}}$$

$$M_f + M_m = 1$$

Relación V_f y M_f

$$V_f = \frac{M_f / \rho_f}{M_f / \rho_f + M_m / \rho_m}$$

$$M_f = \frac{V_f \cdot \rho_f}{V_f \cdot \rho_f + V_m \cdot \rho_m}$$

MICROMECANICA DE LA LAMINA

Propiedades de los constituyentes

Fibras:

V_f , M_f

ρ_f, E_f, ν_f, G_f

Matriz:

V_m, M_m

ρ_m, E_m, ν_m, G_m

Propiedades de la lámina

E_1, E_2, G_{12}, ν_{21}, ν_{12}

MICROMECANICA DE LA LAMINA

	FIBRAS			
	Vidrio E	Kevlar	Carbono H.R.	Carbono H.M.
E_{fl} (MPa)	74000	130000	230000	390000
E_{ft} (MPa)	74.000	5.400	15.000	6.000
G_f (MPa)	30.000	12.000	50.000	20.000
ν_{ftl}	0,25	0,40	0,30	0,35

$$V_f + V_m = 1$$

Regla de las mezclas:

$$\mathbf{Prop.\ lámina = Prop.\ fibra \times V_f + Prop.\ matriz \times V_m}$$

Densidad de la lámina:

$$\rho = \rho_f \cdot V_f + \rho_m \cdot V_m$$

PROCESO DE FABRICACIÓN	V_f (%)
Por contacto	30
Por presión	40
Por enrollamiento continuo (filament winding)	60-85
Por bolsa de vacío	50-80

Densidad del material compuesto

$$\rho = \frac{M}{V} \qquad \rho_f = \frac{M_f}{V_f} \qquad \rho_m = \frac{M_m}{V_m}$$

$$\rho = \frac{M_f + M_m}{V}$$

$$\boxed{\rho = \rho_f \cdot V_f + \rho_m \cdot V_m}$$

Regla de las mezclas

Nivel de porosidad

$$\rho_{teo} = \rho_f \cdot V_f + \rho_m \cdot V_m$$

$$V_{poros}\% = \frac{\rho_{teo} - \rho_{\exp}}{\rho_{teo}} \; x \; 100$$

Afecta a las propiedades mecánicas

Rigidez y resistencia a cortadura

Resistencias a compresión

Resistencia a tracción transversal

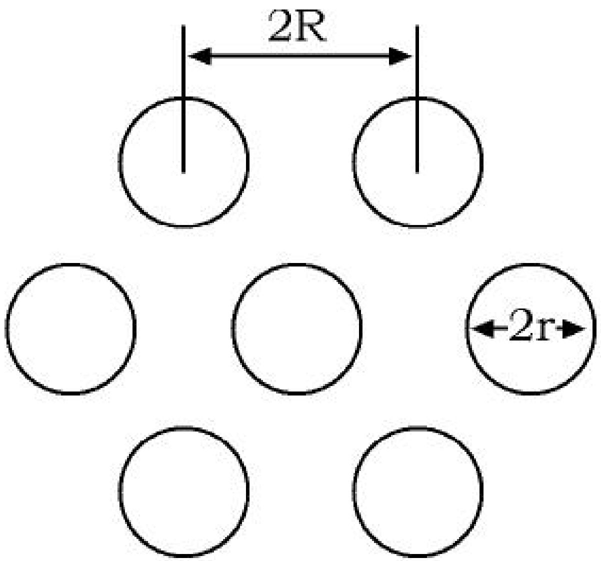
Resistencia a la fatiga

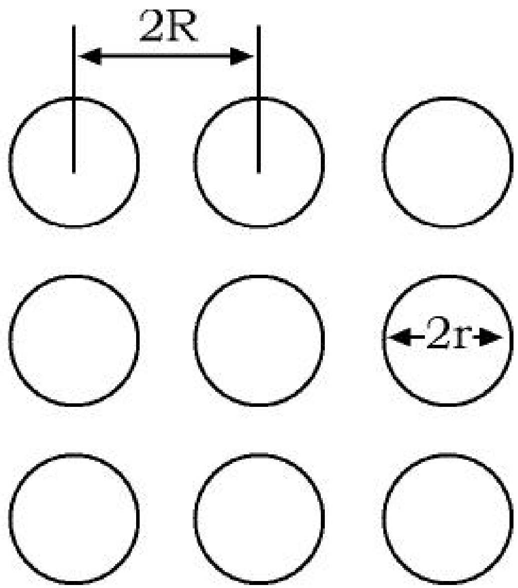
Resistencia a la humedad

2-10% ↓

1% ↑ V_{poros}

Relación V_f - geometría





$$V_f = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\left(\frac{r}{R}\right)^2 \quad \text{(hexagonal)}$$

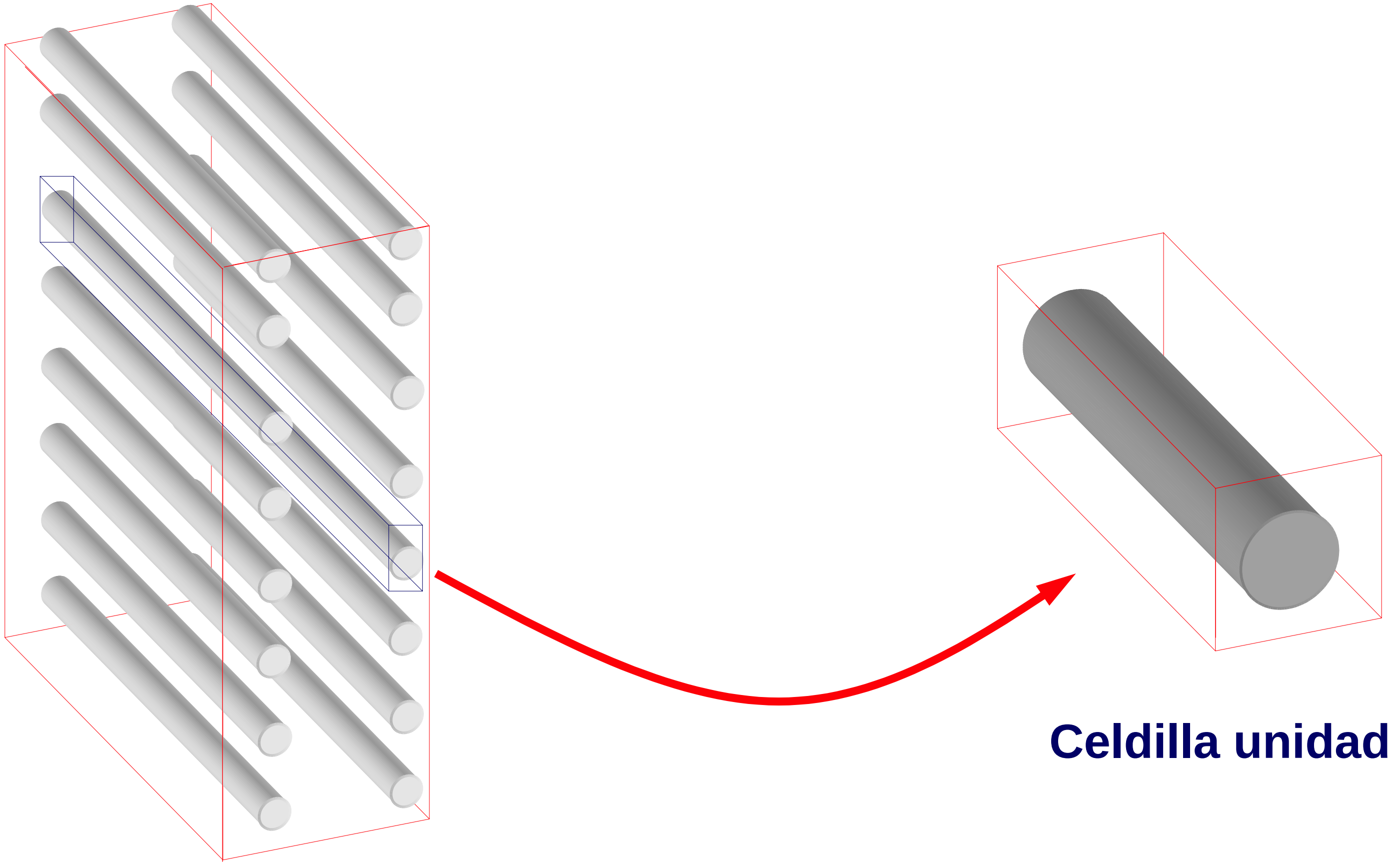
V_f máximo: 91% aprox.

$$V_f = \frac{\pi}{4}\left(\frac{r}{R}\right)^2 \quad \text{(cuadrado)}$$

V_f máximo: 78% aprox.

MICROMECÁNICA DE LAMINAS UNIDIRECCIONALES

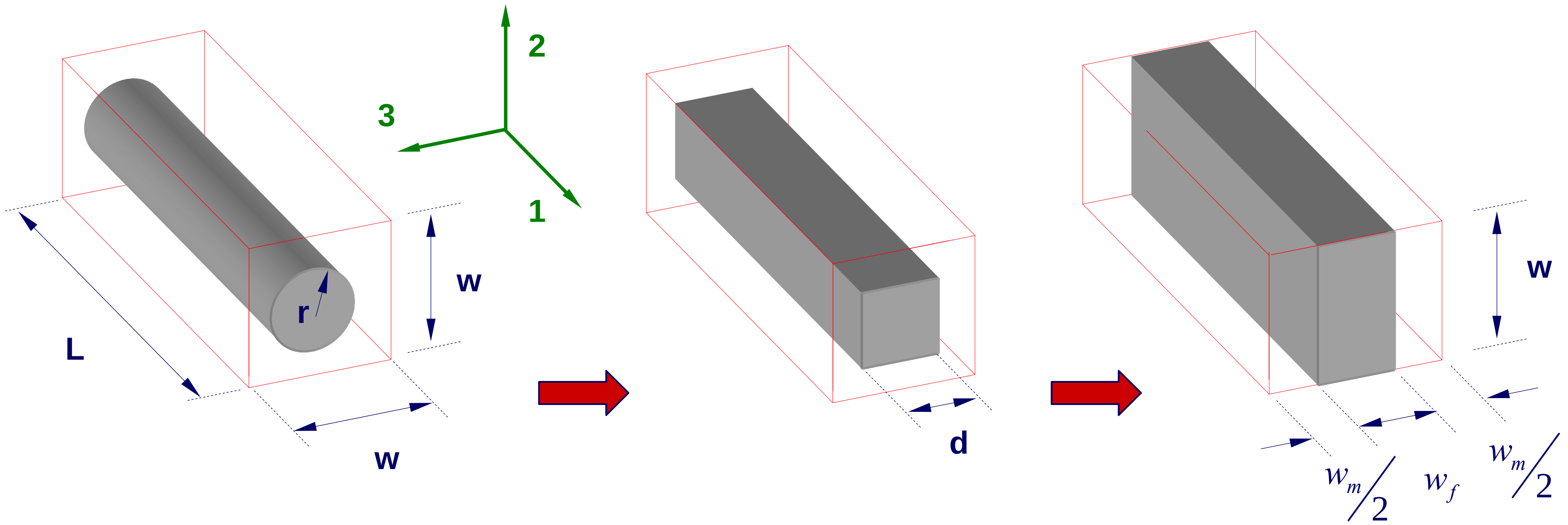
Hipótesis



Celdilla unidad

MICROMECÁNICA DE LAMINAS UNIDIRECCIONALES

Celdilla unidad



$$V_f = \frac{\pi \cdot r^2}{w^2}$$

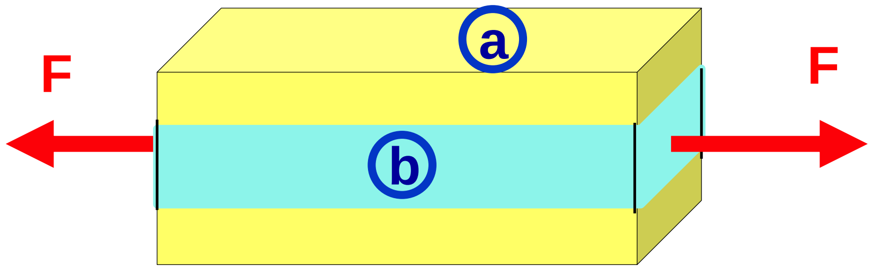
$$V_f = \left(\frac{d}{w}\right)^2$$

$$w = w_f + w_m$$

$$V_f = \frac{w_f}{w}$$

Hipótesis de Isodeformación:

Consideremos una barra, fabricada de dos materiales distintos, sometida a tracción:



Alzado

Sección

Si las áreas de la sección transversal de cada uno de los materiales son:

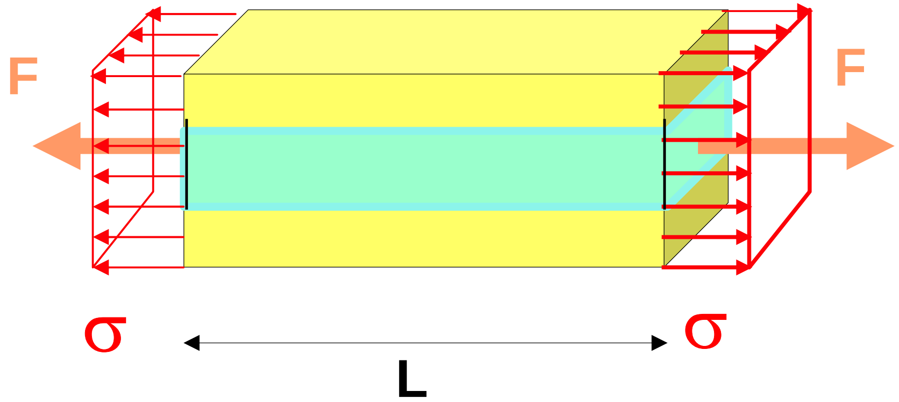
$$A_a \quad y \quad A_b$$

el área total será:

$$A = A_a + A_b$$

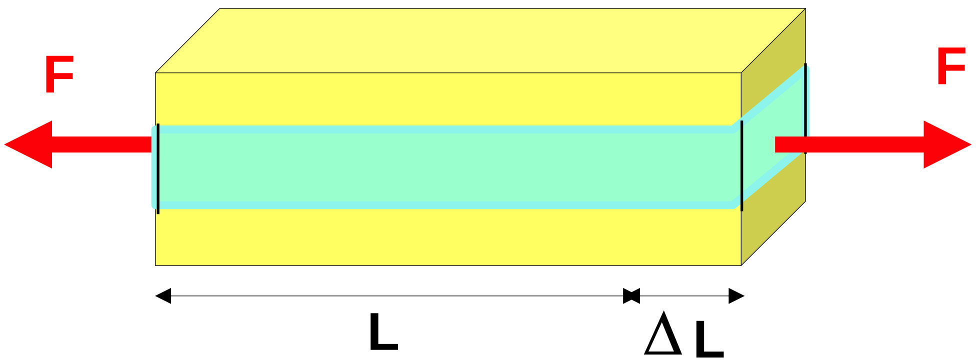
MICROMECANICA DE LA LAMINA

La tensión uniforme aparente a la que estaría sometida la barra sería:



$$\sigma = \frac{F}{A}$$

Los dos materiales sufren la misma deformación: $\varepsilon = \dfrac{\Delta L}{L}$



Por lo que las tensiones que deben soportar los dos materiales serán distintas entre sí porque cada uno de ellos tendrá un módulo de elasticidad diferente:

$$E_a \quad y \quad E_b$$

Las tensiones que soportan cada uno de los materiales serán:

$$\sigma_a = E_a \frac{\Delta L}{L}$$

$$\sigma_b = E_b \frac{\Delta L}{L}$$

MICROMECANICA DE LA LAMINA

Por lo que las tensiones en cada material quedarán como:

Debiendo cumplirse que:

$$\underbrace{A_a\,\sigma_a + A_b\,\sigma_b}_{\|} = A_a\,E_a\,\frac{\Delta L}{L} + A_b\,E_b\,\frac{\Delta L}{L}$$

$$A\;\sigma = A\;E_{ap}\,\frac{\Delta L}{L}$$

$$\Rightarrow\quad E_{ap} = E_a\,\frac{A_a}{A} + E_b\,\frac{A_b}{A}$$

E_{ap} = Módulo de elasticidad aparente del material compuesto

La ecuación anterior puede escribirse como:

$$E_{ap} = E_a \frac{A_a L}{A\ L} + E_b \frac{A_b L}{A\ L}$$

donde:

$A_a L = V_a$ (Volumen del material a)

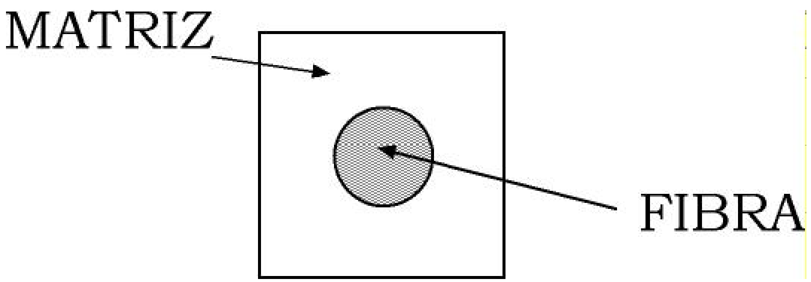
$A_b L = V_b$ (Volumen del material b)

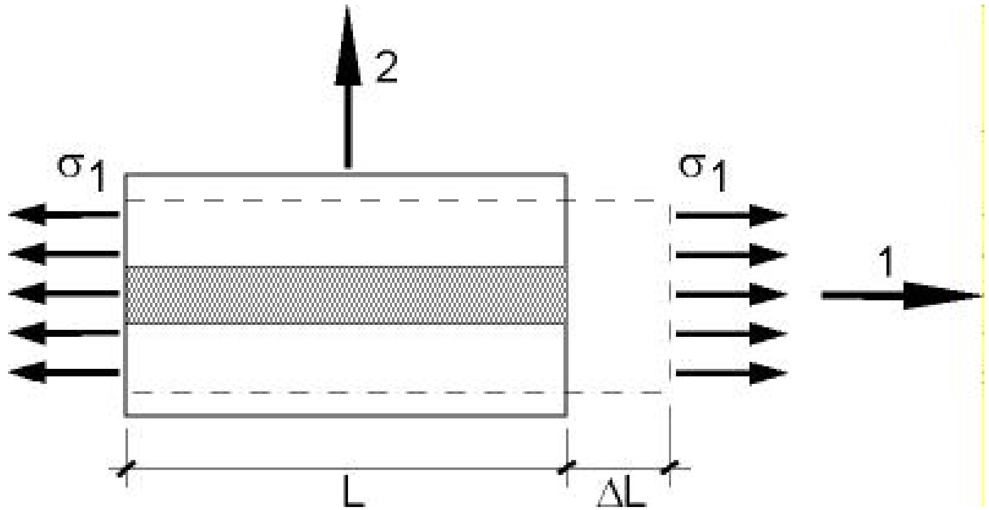
$A\ L = V$ (Volumen total del material)

por lo que:

$$\boxed{E_{ap} = E_a V_a + E_b V_b}$$

Obtención de E_1 (Hipótesis de isodeformación)





$$\boxed{\varepsilon_1 = \frac{\Delta L}{L}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_f = E_f \cdot \varepsilon_f = E_f \cdot \varepsilon_1 \\ \sigma_m = E_m \cdot \varepsilon_m = E_m \cdot \varepsilon_1 \end{array} \right.$$

$$F = F_f + F_m$$

$$\sigma_1 \cdot A = \sigma_f \cdot A_f + \sigma_m \cdot A_m$$

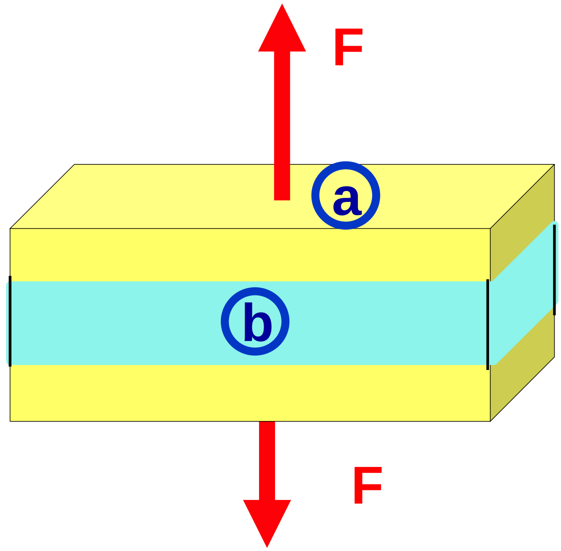
$$E_1 \cdot \varepsilon_1 \cdot A = E_f \cdot \varepsilon_1 \cdot A_f + E_m \cdot \varepsilon_1 \cdot A_m$$

$$E_1 = E_f \cdot \frac{A_f}{A} + E_m \cdot \frac{A_m}{A}$$

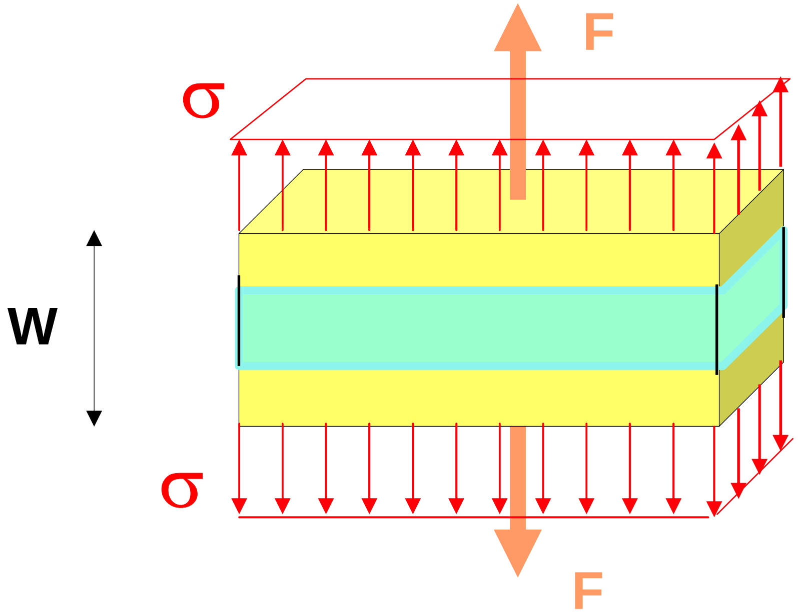
$$\boxed{E_1 = E_f \cdot V_f + E_m \cdot (1 - V_f)}$$

Hipótesis de Isotensión:

Consideremos una barra, fabricada de dos materiales distintos, sometida a tracción:

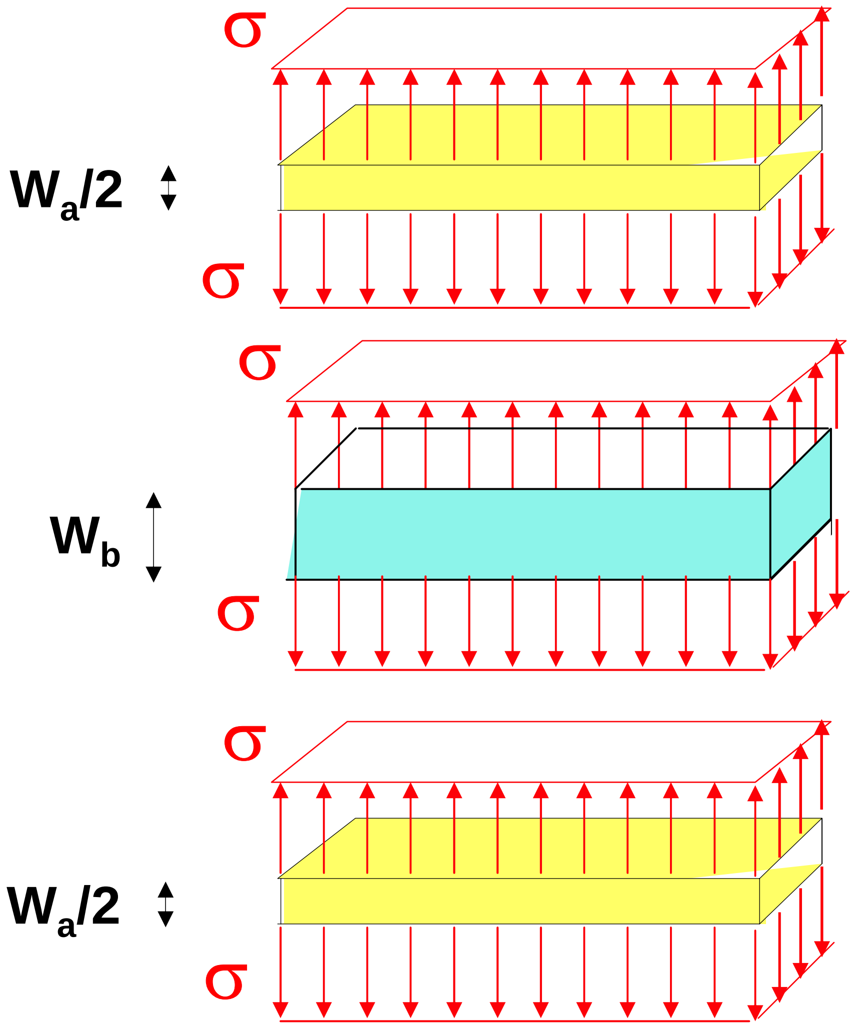


La tensión uniforme aparente a la que estaría sometida la barra sería:



$$\sigma = \frac{F}{\Omega}$$

MICROMECANICA DE LA LAMINA



Los dos materiales sufren la misma tensión:

$$\sigma = \frac{F}{\Omega}$$

Por lo que las deformaciones que sufren los dos materiales serán distintas entre sí porque cada uno de ellos tendrá un módulo de elasticidad diferente:

$$\mathbf{E_a} \quad \text{y} \quad \mathbf{E_b}$$

Las deformaciones que sufren cada uno de los materiales serán:

$$\varepsilon_a = \sigma / E_a$$

$$\varepsilon_b = \sigma / E_b$$

La variación de espesor que experimentará el material será:

$$\Delta W_a = \sigma / E_a \; W_a$$

$$\Delta W_b = \sigma / E_b \; W_b$$

La variación de espesor que experimentará el conjunto vendrá dada por:

$$\Delta W = \Delta W_a + \Delta W_b = \sigma \left\{ W_a / E_a + W_b / E_b \right\}$$

Si definimos como módulo de elasticidad aparente, en la dirección de carga a:

$$E_{ap} = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{\sigma}{\frac{\Delta W}{W}} = \frac{\sigma \quad W}{\sigma \left\{ W_a / E_a + W_b / E_b \right\}}$$

por lo que:

$$E_{ap} = \frac{1}{1/W \left\{ W_a / E_a + W_b / E_b \right\}}$$

Como:

$W_a \Omega = V_a$ (Volumen del material a)

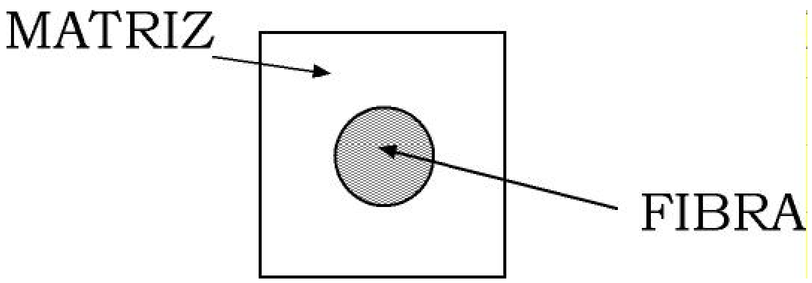
$W_b \Omega = V_b$ (Volumen del material b)

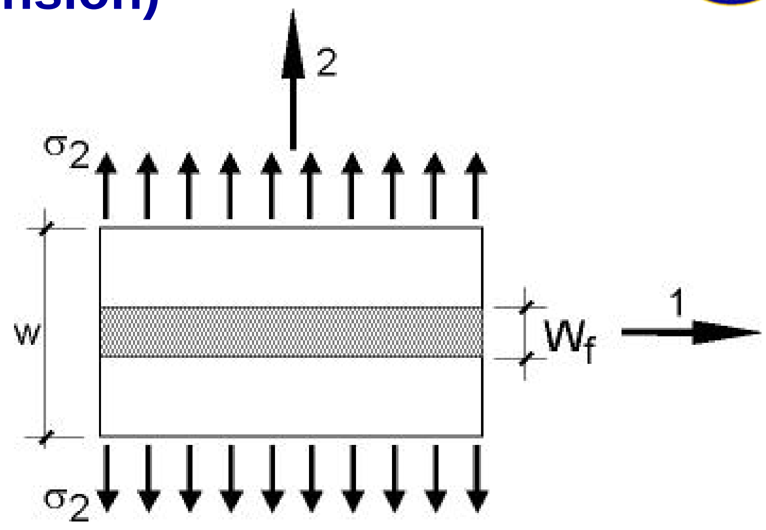
$W \ \Omega = V$ (Volumen total del material)

$$\frac{W_a}{W} = \frac{W_a \Omega}{W \ \Omega} = \frac{V_a}{V} \quad \text{y} \quad \frac{W_b}{W} = \frac{W_b \Omega}{W \ \Omega} = \frac{V_b}{V}$$

$$E_{ap} = \frac{1}{\left\{ V_a / E_a + V_b / E_b \right\}}$$

Obtención de E_2 (Hipótesis de isotensión)





$$\boxed{\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E_2}} \quad \begin{cases} \varepsilon_f = \dfrac{\sigma_2}{E_f} \\ \varepsilon_m = \dfrac{\sigma_2}{E_m} \end{cases}$$

$$\varepsilon_2 \cdot W = \varepsilon_f \cdot W_f + \varepsilon_m \cdot W_m$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_f \cdot \frac{W_f}{W} + \varepsilon_m \cdot \frac{W_m}{W}$$

$$\boxed{\varepsilon_2 = \varepsilon_f \cdot V_f + \varepsilon_m \cdot V_m}$$

$$\sigma_2 = E_2 \cdot \varepsilon_2 = E_2 \cdot \left(\frac{\sigma_2}{E_f} \cdot V_f + \frac{\sigma_2}{E_m} \cdot V_m \right)$$

$$\boxed{E_2 = E_m \left(\frac{1}{\left(1 - V_f\right) + \dfrac{E_m}{E_f} V_f} \right)}$$

MICROMECÁNICA DE LAMINAS UNIDIRECCIONALES

Obtención de E_2

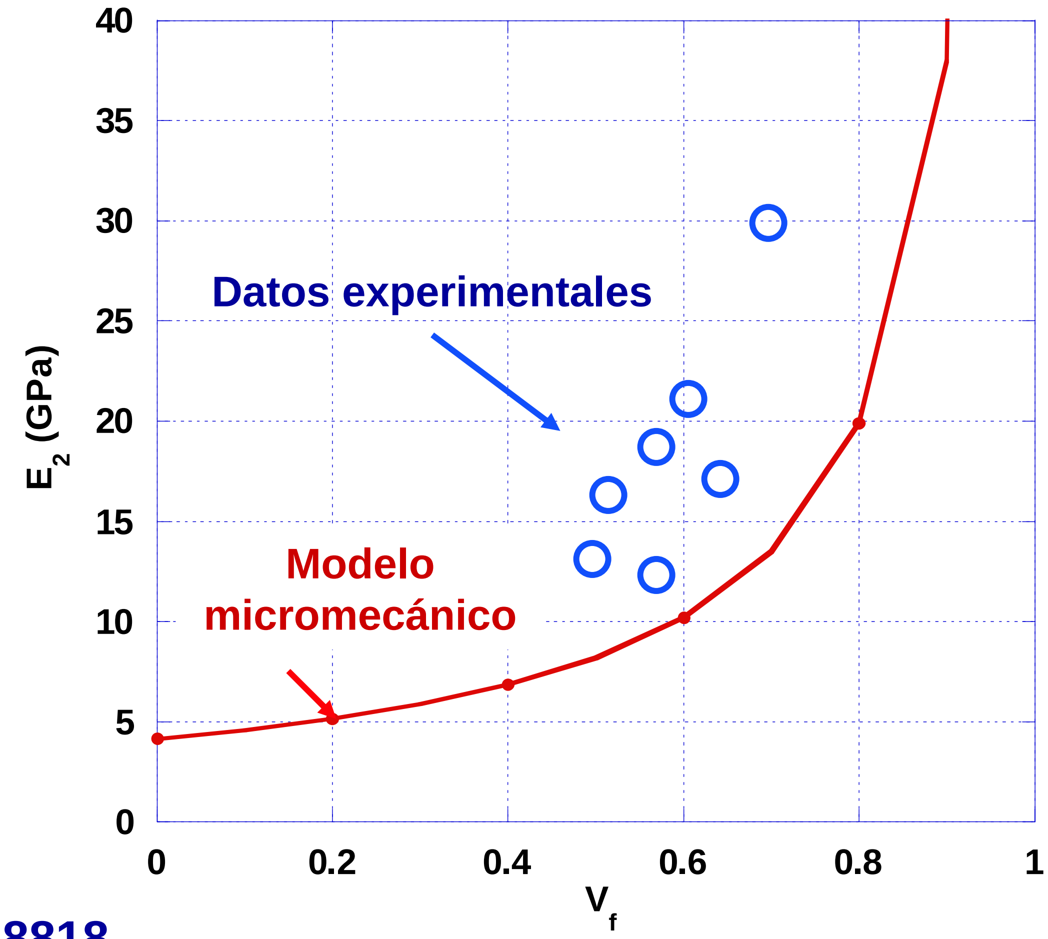
Material boro/epoxi

E_f = 414 GPa

ν_f = 0,2

E_m = 4,14 GPa

ν_m = 0,35



Z. Hashin, 1970

NASA Technical Report NAS1-8818

Obtención de E_2

Efecto de la concentración de Poisson

$$E_2 = \frac{E_m^{'} \cdot E_f}{E_f \cdot \left(1 - V_f\right) + V_f \cdot E_m^{'}}$$

$$E_m^{'} = \frac{E_m}{1 - \nu_m^2}$$

Ecuación de Halpin-Tsai

$$E_2 = E_m \cdot \frac{1 + \xi_1 \cdot \eta_1 \cdot V_f}{1 - \eta_1 \cdot V_f}$$

$$\eta_1 = \frac{E_f - E_m}{E_f + \xi_1 \cdot E_m}$$

ξ_1 = Eficiencia del refuerzo

$$1 < \xi_1 < 2$$

MICROMECÁNICA DE LAMINAS UNIDIRECCIONALES

Obtención de E_2

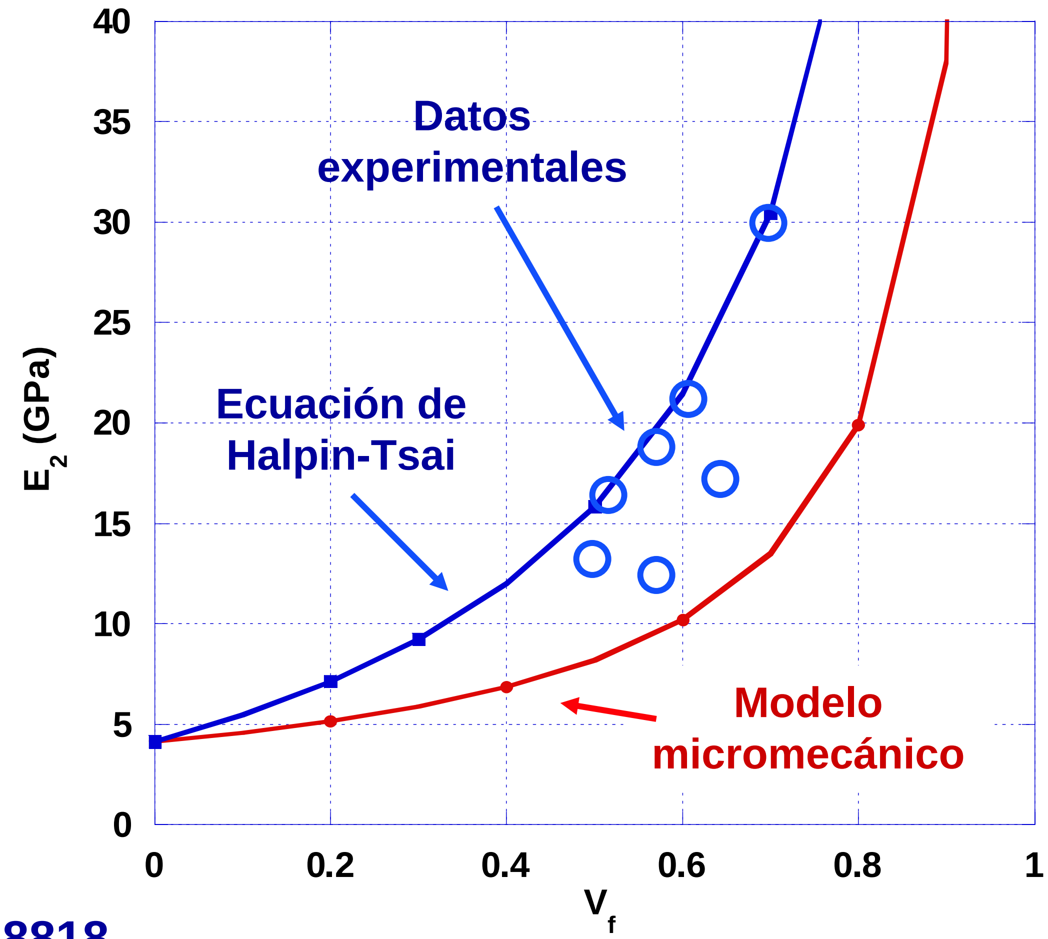
Material boro/epoxi

E_f = 414 GPa

ν_f = 0,2

E_m= 4,14 GPa

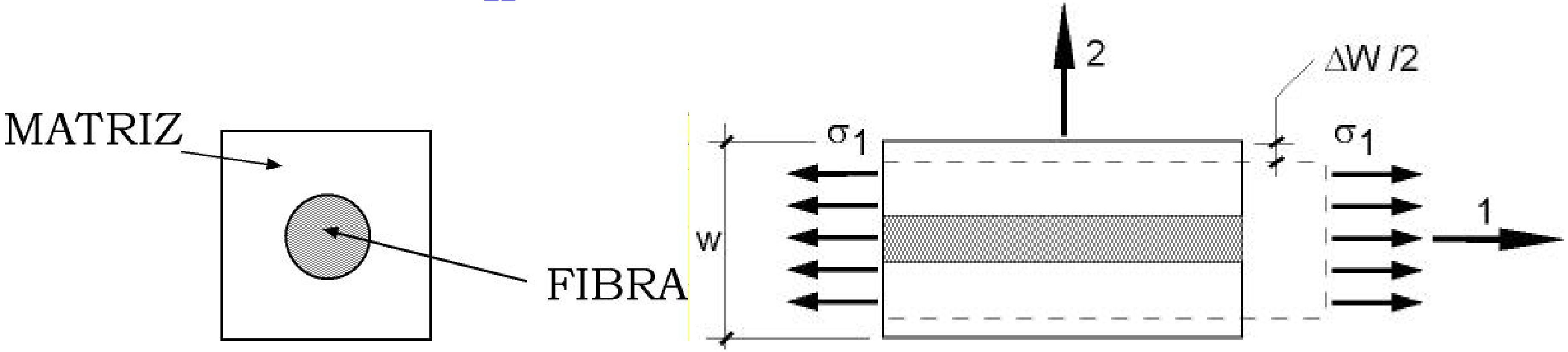
ν_m = 0,35



Z. Hashin, 1970

NASA Technical Report NAS1-8818

Obtención de ν_{21}

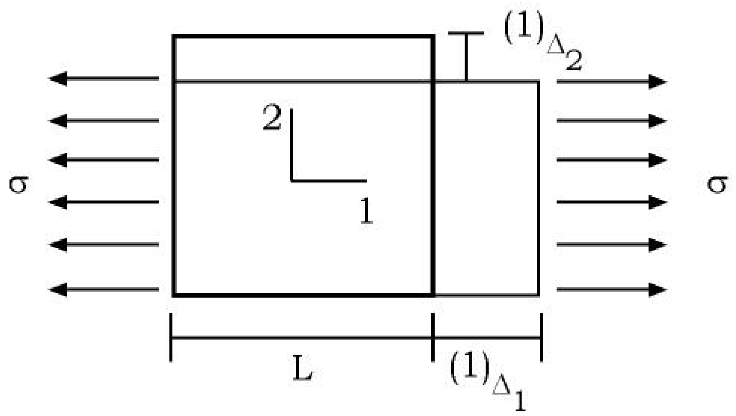


$$\boxed{\nu_{21} = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$$

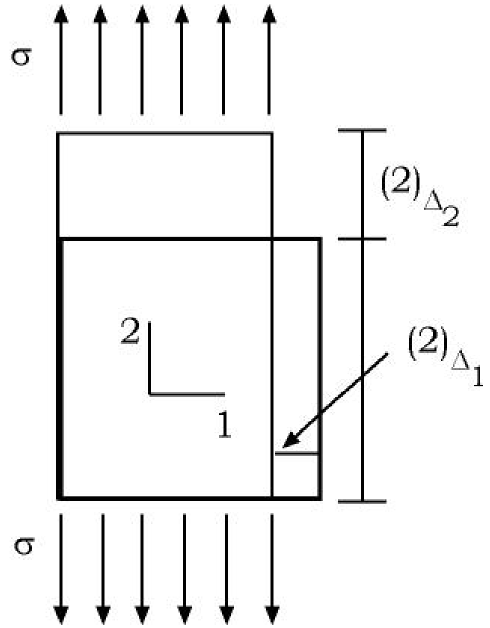
$$\left.\begin{array}{l} \Delta W = -W \cdot \varepsilon_2 = W \cdot \nu_{21} \cdot \varepsilon_1 \\ \\ \Delta W = \Delta W_f + \Delta W_m \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Delta W_m = W \cdot V_m \cdot \nu_m \cdot \varepsilon_1 \\ \\ \Delta W_f = W \cdot V_f \cdot \nu_f \cdot \varepsilon_1 \end{array}$$

$$\boxed{\nu_{21} = \nu_f \cdot V_f + \nu_m \cdot (1 - V_f)}$$

Obtención de ν_{12}



SISTEMA I

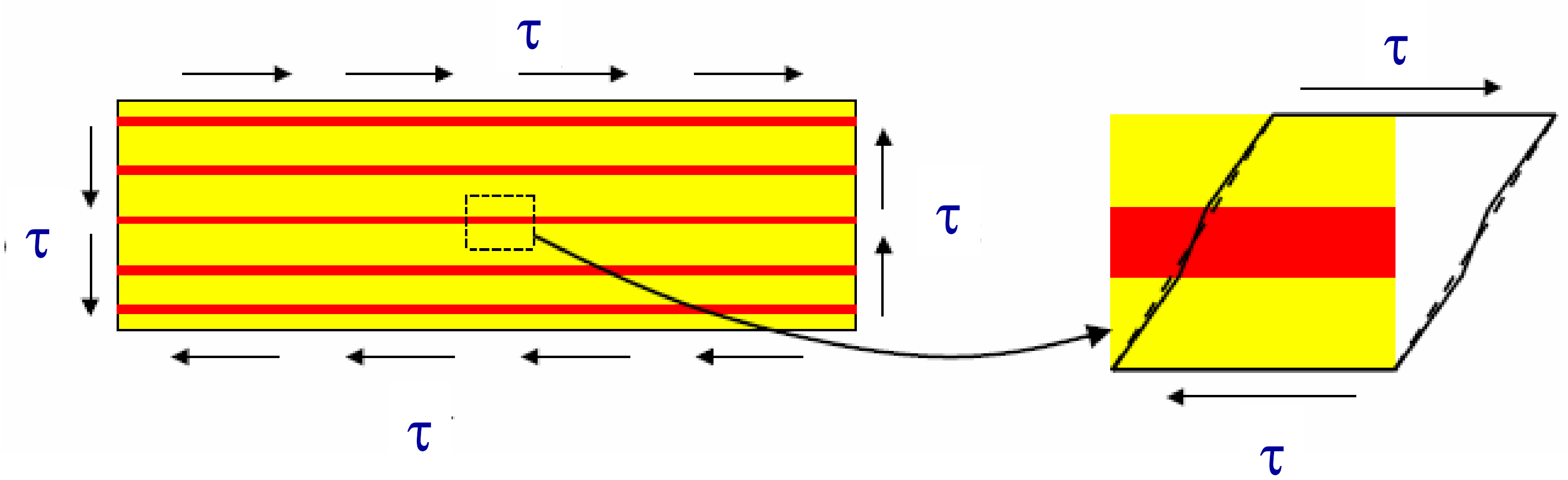


SISTEMA II

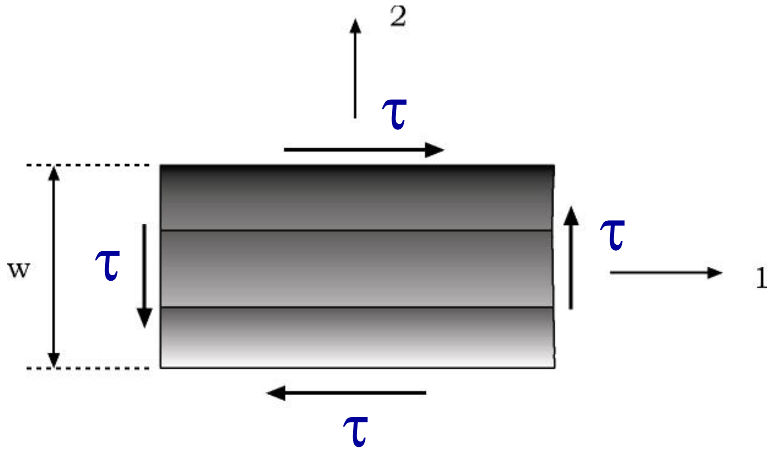
Teorema de reciprocidad

$$\boxed{\frac{\nu_{12}}{E_2} = \frac{\nu_{21}}{E_1}}$$

Obtención de G_{12} o G_{21}



Obtención de G_{12} o G_{21}



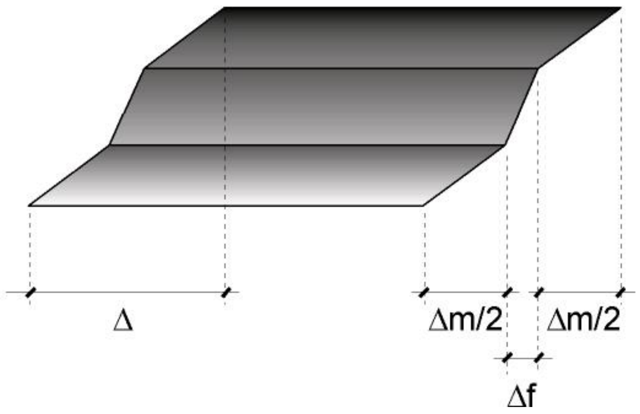
$$\gamma = \frac{\tau}{G_{12}} \quad \begin{cases} \gamma_f = \dfrac{\tau}{G_f} \\ \gamma_m = \dfrac{\tau}{G_m} \end{cases}$$

$$\Delta = \gamma \cdot W$$

$$\Delta = \Delta_m + \Delta_f$$

$$\Delta_m = \gamma_m \cdot V_m \cdot W$$

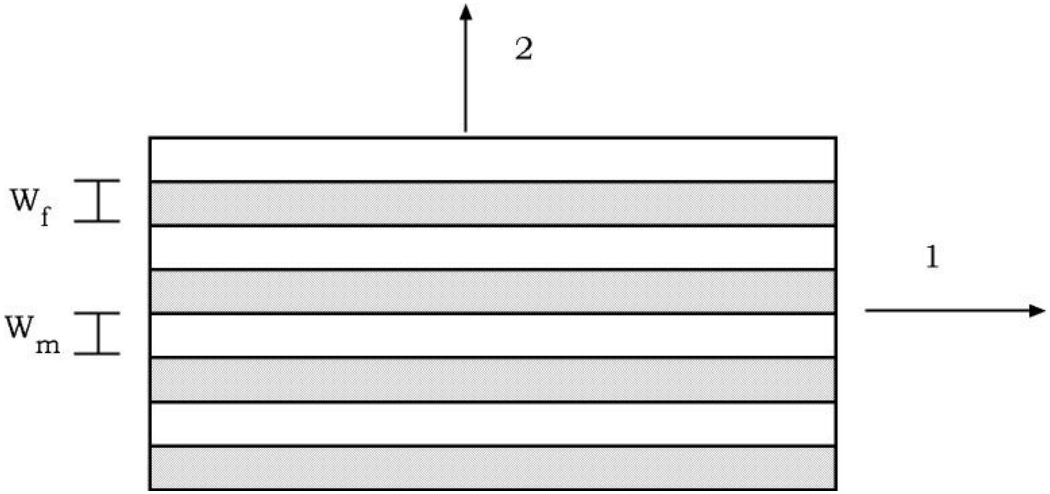
$$\Delta_f = \gamma_f \cdot V_f \cdot W$$

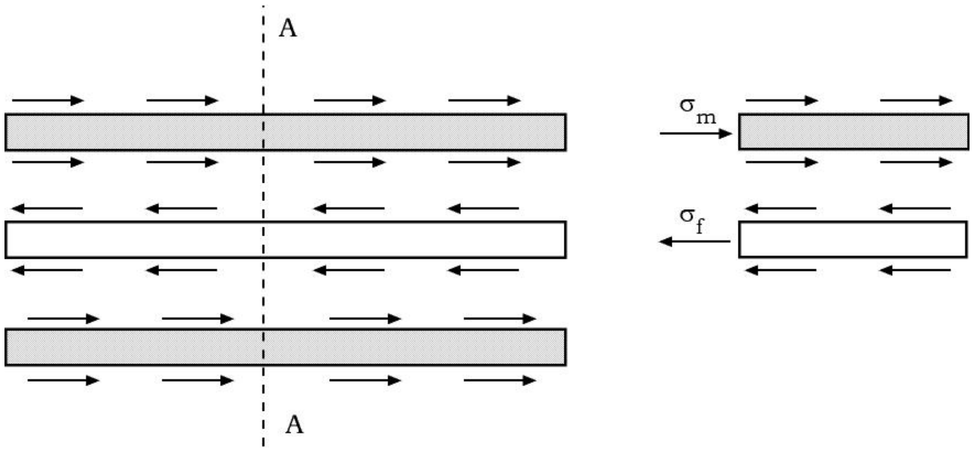


$$\gamma = \gamma_m \cdot V_m + \gamma_f \cdot V_f$$

$$\boxed{G_{12} = G_m \cdot \left(\frac{1}{V_m + V_f \cdot \dfrac{G_m}{G_f}} \right)}$$

Obtención de α_1





$$\boxed{\varepsilon_1 = \alpha_1 \Delta T}$$

$$\sigma_m = -\frac{F}{W_m} \quad y \quad \sigma_f = \frac{F}{W_f}$$

$$\sigma_m W_m + \sigma_f W_f = 0$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_f}{E_f} + \alpha_f \Delta T = \frac{\sigma_m}{E_m} + \alpha_m \Delta T$$

$$\sigma_m = \frac{(\alpha_f - \alpha_m)\Delta T}{\frac{1}{E_m} + \frac{V_m}{V_f}\frac{1}{E_f}}$$

$$\boxed{\alpha_1 = \frac{\alpha_f E_f V_f + \alpha_m E_m V_m}{E_f V_f + E_m V_m}}$$

Obtención de α_2

$$\alpha_2 = \alpha_m V_m + \alpha_f V_f + \frac{\left(\nu_f E_m - \nu_m E_f\right)}{\dfrac{E_m}{V_f} + \dfrac{E_f}{V_m}} \times \left(\alpha_f - \alpha_m\right)$$

En resumen:

Módulo de elasticidad (dirección 1):

$$E_1 = E_f \cdot V_f + E_m \cdot V_m$$

Módulo de elasticidad (dirección 2):

$$E_2 = E_m \left[\frac{1}{V_m + \frac{E_m}{E_f} V_f} \right]$$

Módulo de corte (direcciones 1-2):

$$G_{12} = G_{21} = G_m \left[\frac{1}{V_m + \frac{G_m}{G_f} V_f} \right]$$

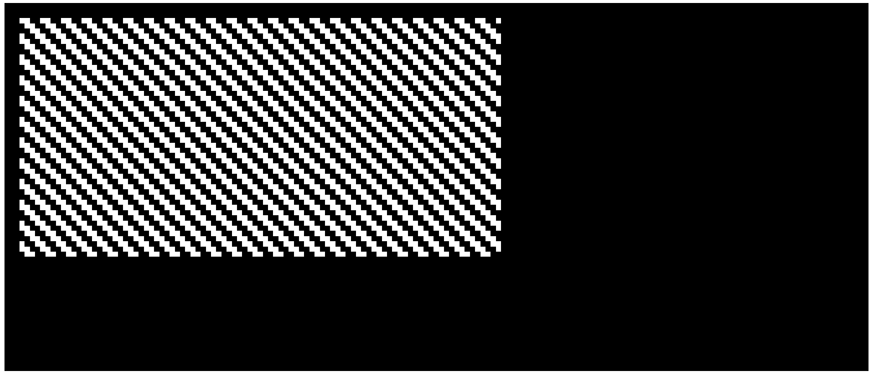
Coeficiente de Poisson (ν_{21}):

$$\nu_{21} = \nu_f \cdot V_f + \nu_m \cdot V_m$$

Coeficiente de Poisson (ν_{12}):

$$\frac{\nu_{12}}{E_2} = \frac{\nu_{21}}{E_1}$$

Módulo de elasticidad en una dirección cualquiera:



$$E_x = \frac{1}{\dfrac{\cos^4\theta}{E_1} + \dfrac{sen^4\theta}{E_2} + 2\cos^2\theta\,\mathrm{sen}^2\theta\left(\dfrac{1}{2G_{12}} - \dfrac{\nu_{21}}{E_1}\right)}$$