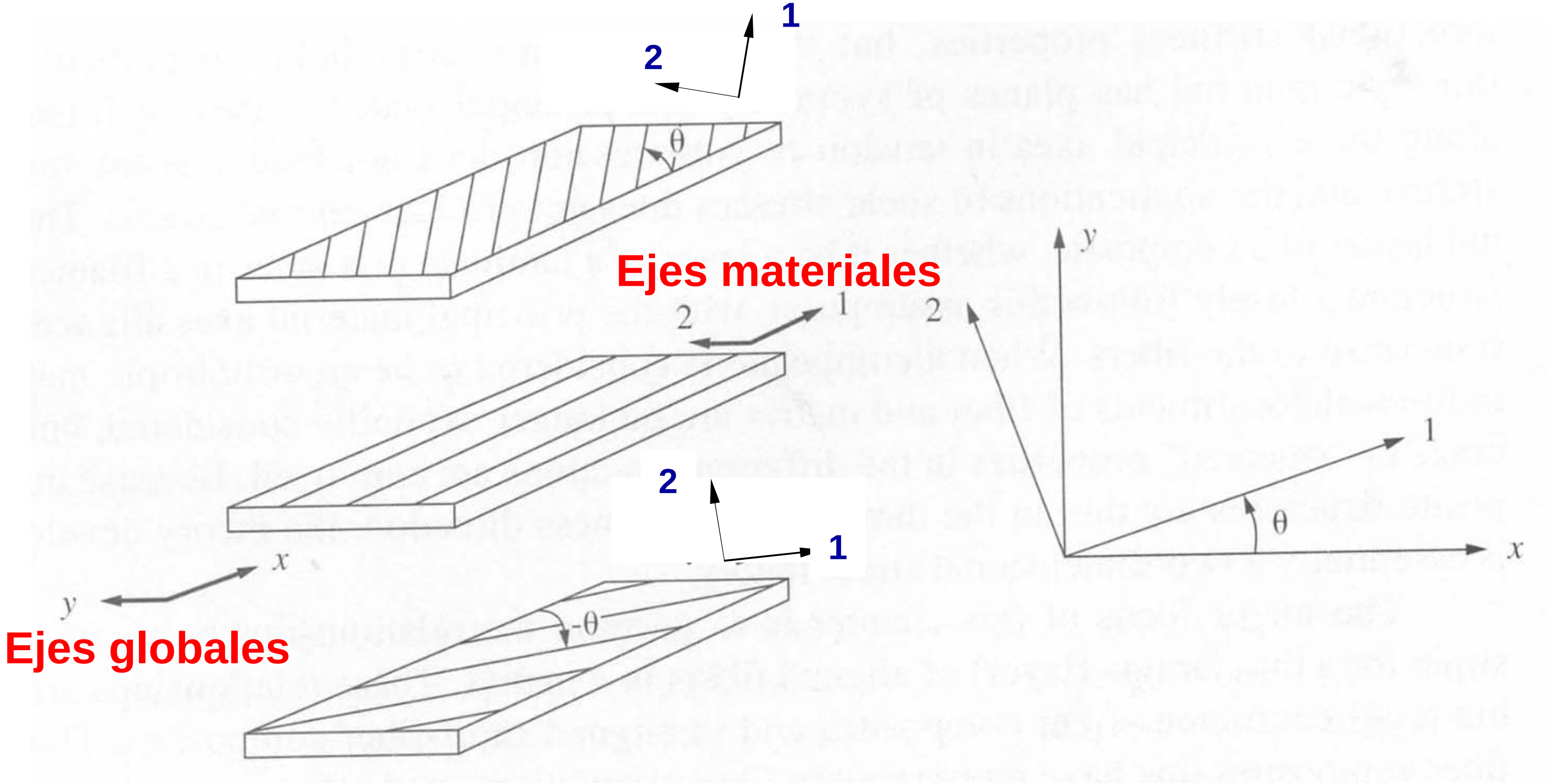
COMPORTAMIENTO MACROMECÁNICO

Carlos Navarro

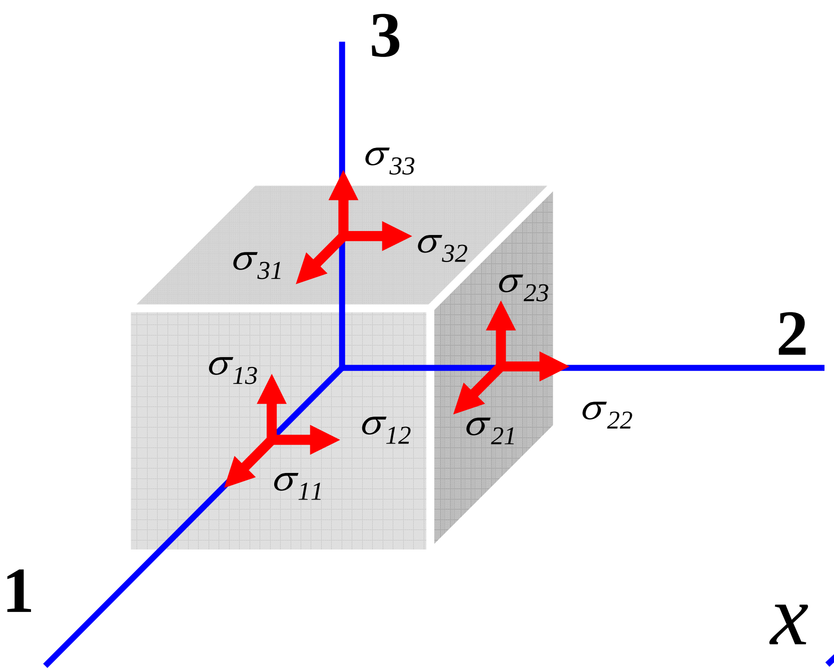
Departamento de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras

EJES MATERIALES Y GLOBALES DE LA LÁMINA:

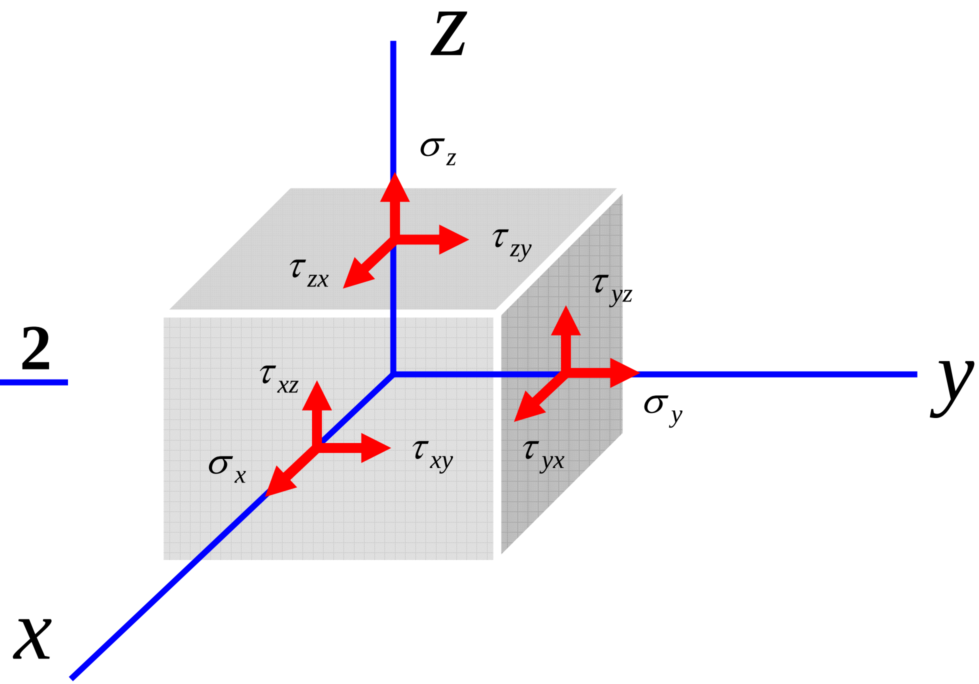


MACROMECANICA DE LA LAMINA

Nomenclatura de las tensiones:



Tensorial

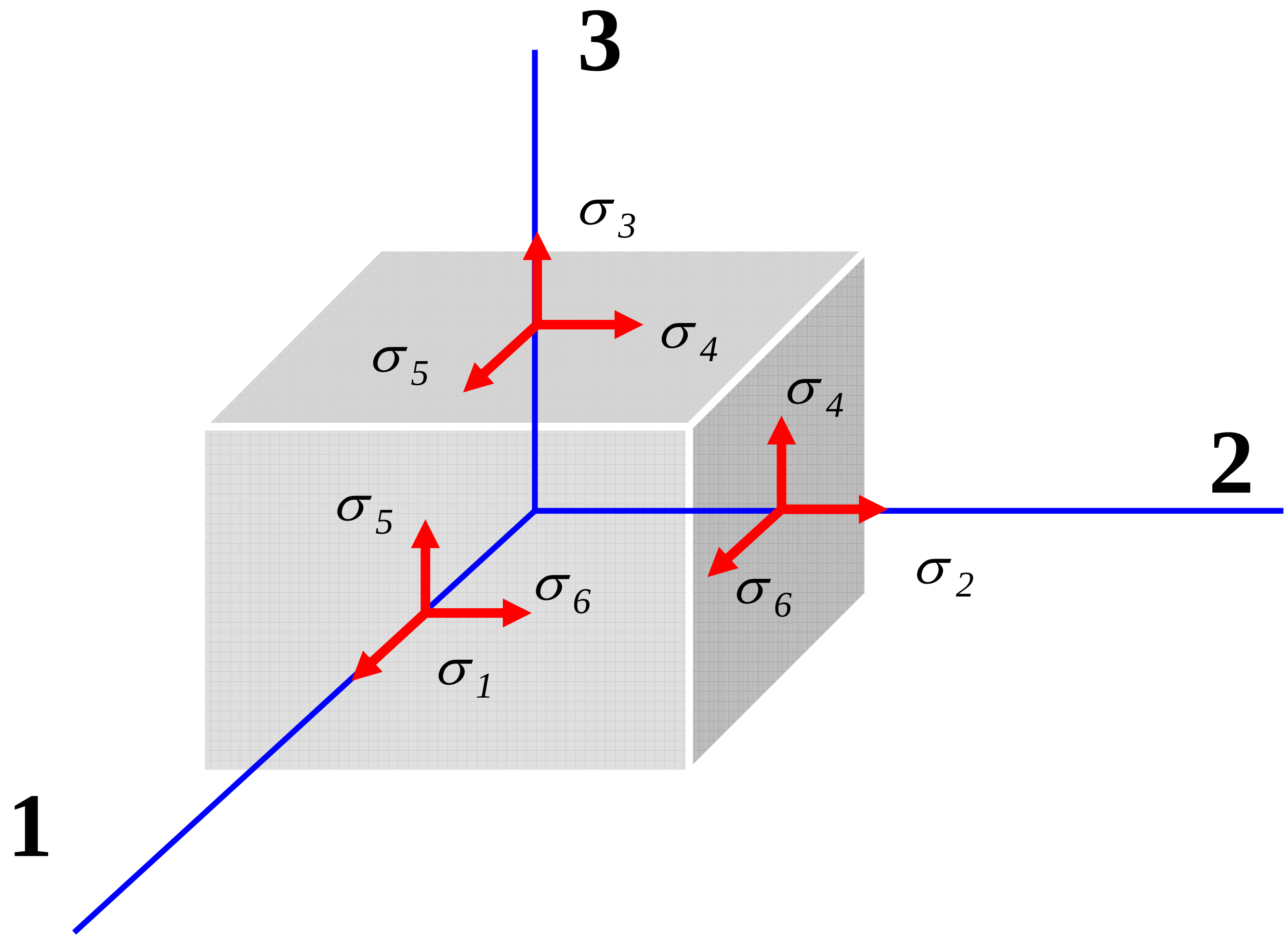


Clásica

MACROMECANICA DE LA LAMINA

TENSIONES		DEFORMACIONES	
Notación tensorial	Notación contractada	Notación tensorial	Notación contractada
σ_x (σ_{11})	σ_1	ε_x (ε_{11})	ε_1
σ_y (σ_{22})	σ_2	ε_y (ε_{22})	ε_2
σ_z (σ_{33})	σ_3	ε_z (ε_{33})	ε_3
τ_{yz} (σ_{23})	σ_4	$\gamma_{yz} = 2\varepsilon_{23}$	ε_4
τ_{zx} (σ_{31})	σ_5	$\gamma_{zx} = 2\varepsilon_{31}$	ε_5
τ_{xy} (σ_{12})	σ_6	$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{12}$	ε_6

NOTACIÓN CONTRACTADA:



Acoplamiento entre elongaciones

Acoplamiento elongación-cortante

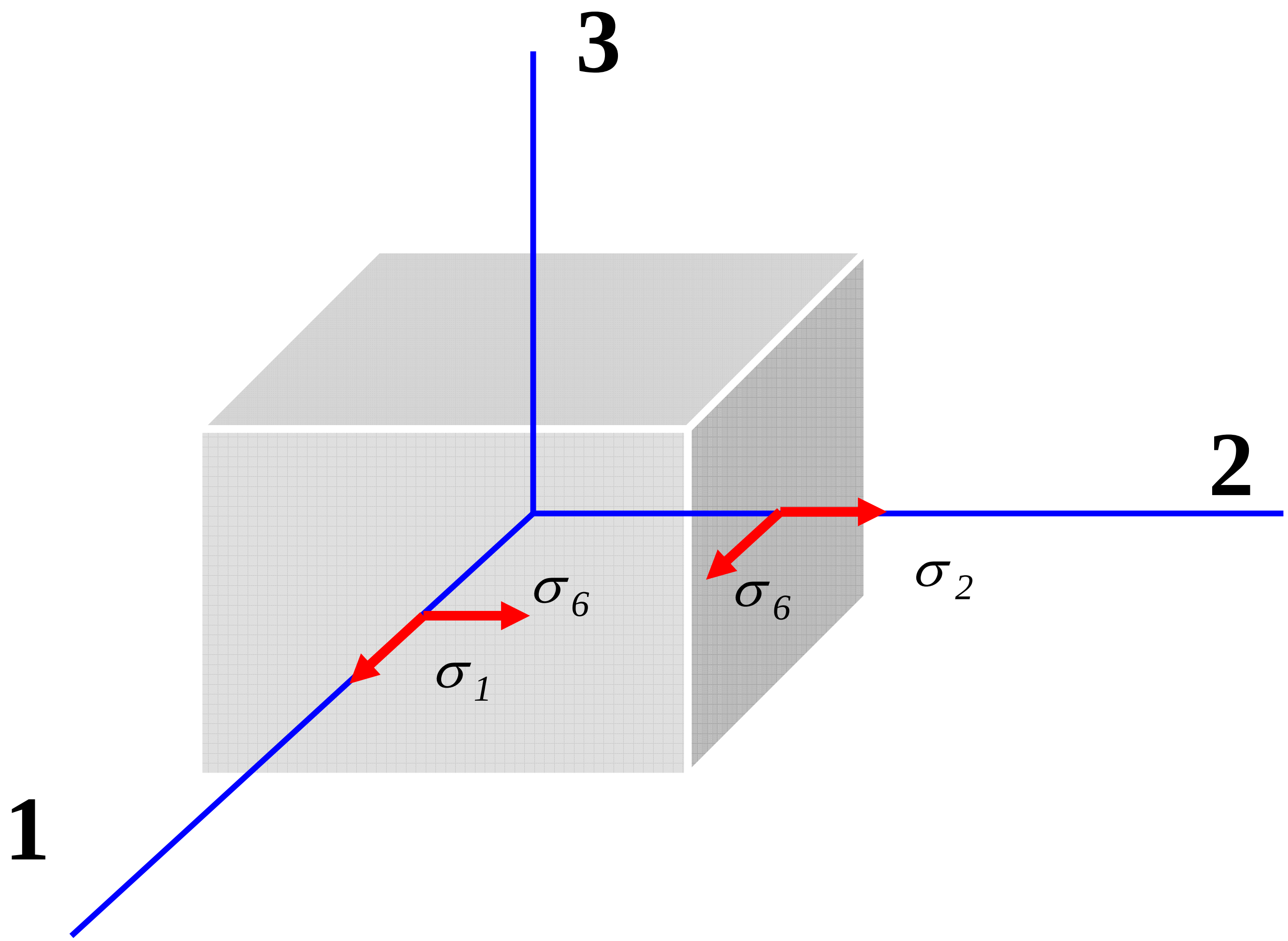
Elongación

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ \vdots & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ \vdots & \cdots & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ \vdots & \cdots & \cdots & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ \vdots & Sim & \cdots & \cdots & C_{55} & C_{56} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix}$$

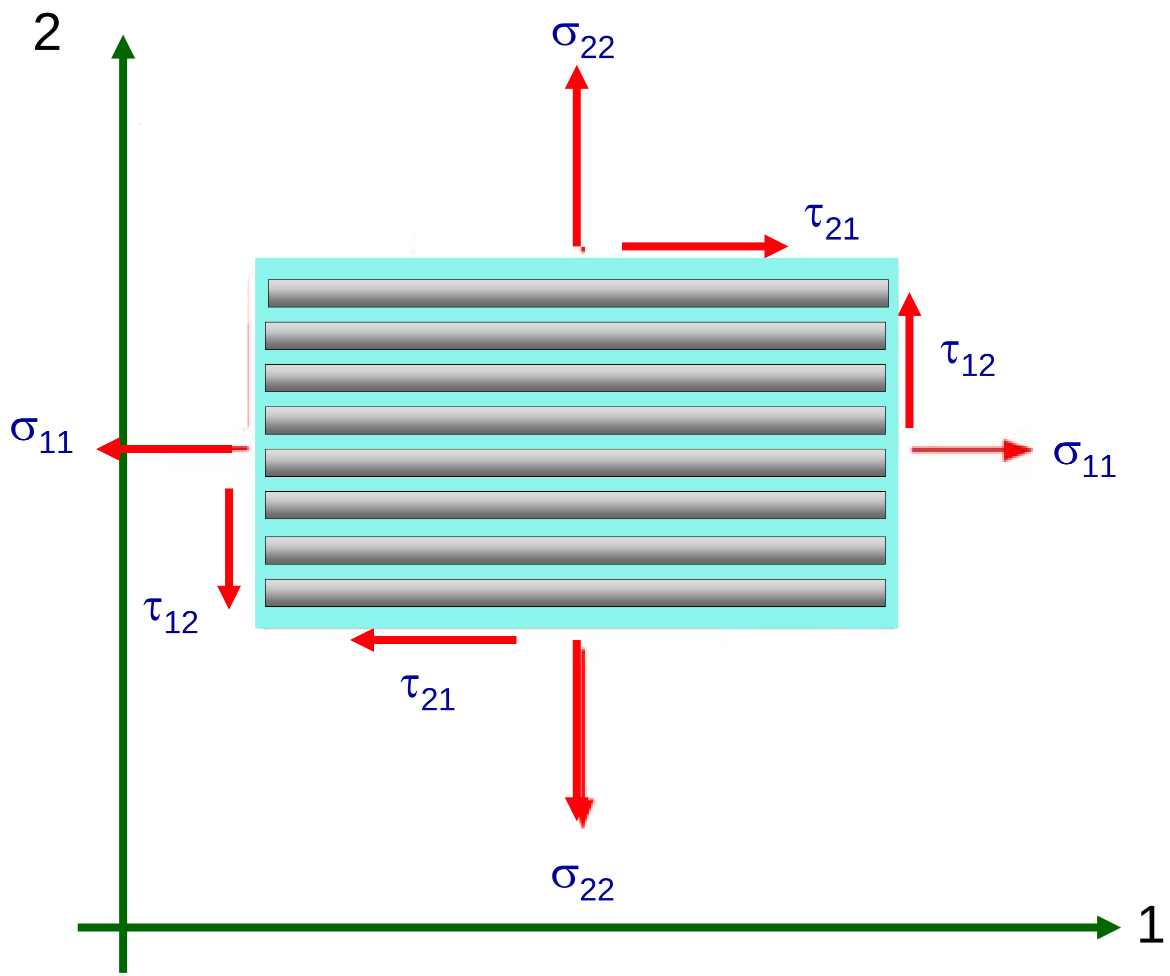
Acoplamiento entre cortantes

Cortante

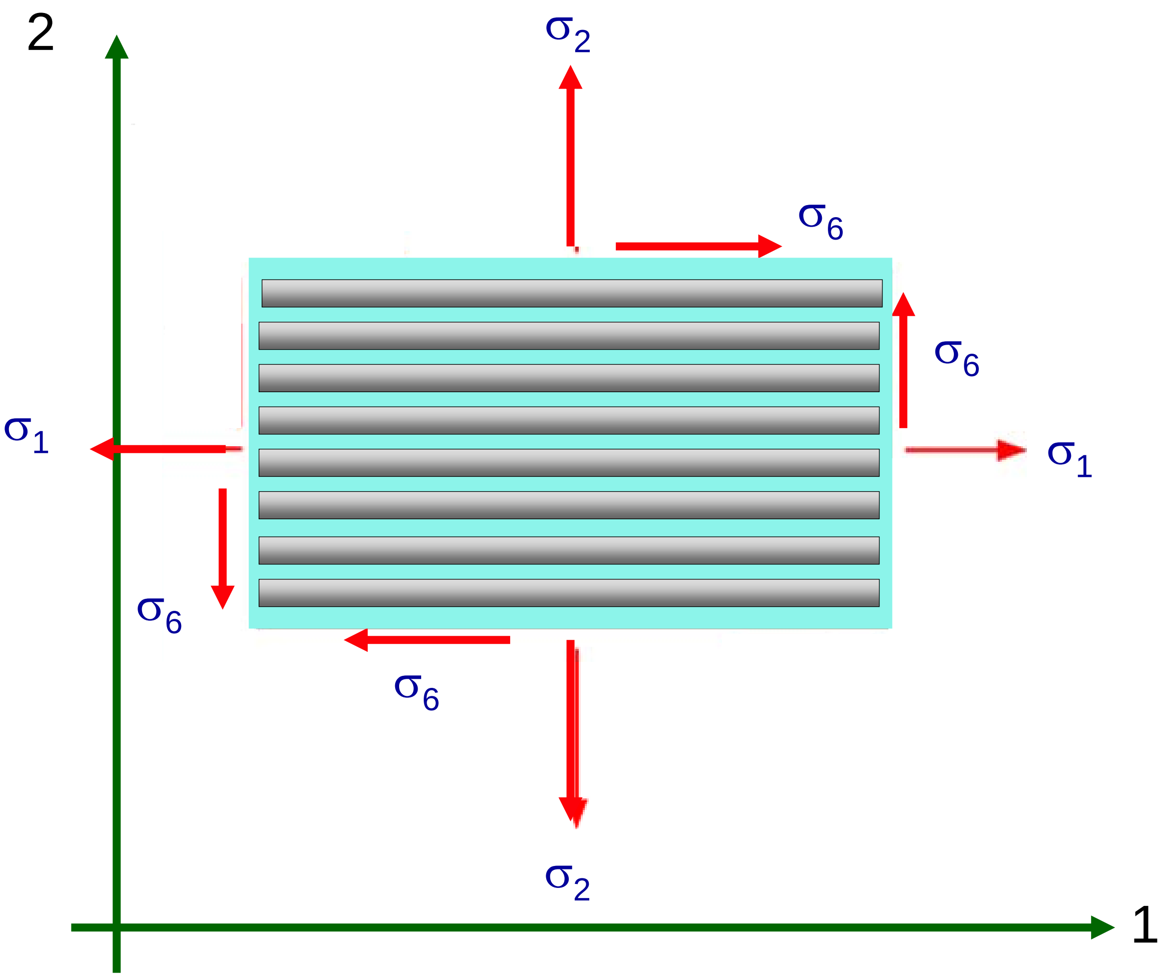
Si la lámina trabaja en sólo tensión plana en el plano 1-2:



MACROMECANICA DE LA LAMINA



MACROMECANICA DE LA LAMINA



En tensión plana (1-2) la relación tensión-deformación será:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ \vdots & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ \vdots & \cdots & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ \vdots & \cdots & \cdots & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ \vdots & \boldsymbol{Sim.} & \cdots & \cdots & C_{55} & C_{56} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix}$$

LEYES DE HOOKE GENERALIZADAS (material isótropo)

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_2 + \sigma_3)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_3)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\sigma_3}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2)$$

$$\gamma_{12} = \tau_{12}/G$$

$$\gamma_{31} = \tau_{31}/G$$

$$\gamma_{32} = \tau_{32}/G$$

En tensión plana (plano *1-2*):

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\nu}{E}\sigma_2$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \frac{\nu}{E}\sigma_1$$

$$\varepsilon_3 = -\frac{\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2)$$

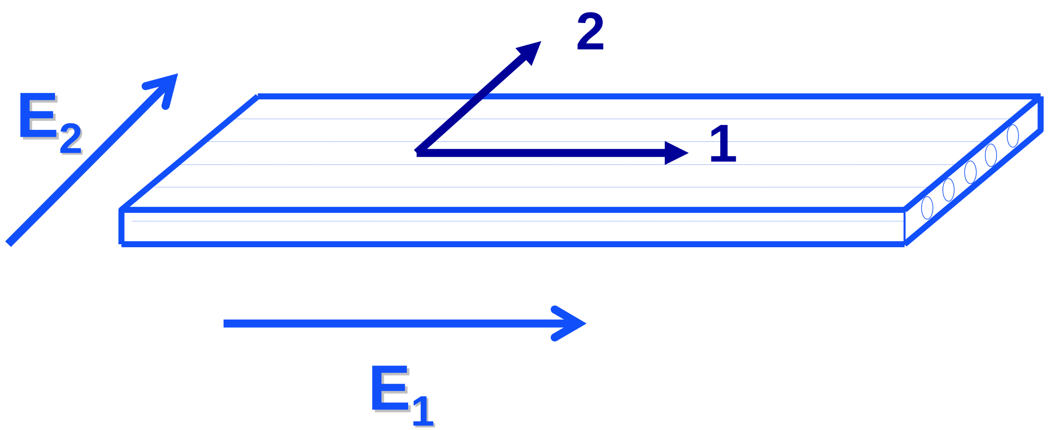
$$\gamma_{12} = \tau_{12}/G \quad \text{ó} \quad \varepsilon_6 = \sigma_6/G$$

$$\gamma_{31} = 0$$

$$\gamma_{32} = 0$$

LEYES DE HOOKE (material ortótropo)

En tensión plana (plano *1-2*):



$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_1} - \frac{\nu_{12}}{E_2}\sigma_2$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E_2} - \frac{\nu_{21}}{E_1}\sigma_1$$

$$\varepsilon_3 = -\frac{\nu_{31}}{E_1}\sigma_1 - \frac{\nu_{32}}{E_2}\sigma_2$$

$$\gamma_{12} = \tau_{12}/G_{12} \quad \text{ó} \quad \varepsilon_6 = \sigma_6/G_{12}$$

$$\gamma_{31} = 0$$

$$\gamma_{32} = 0$$

Matriz de flexibilidad de la lámina en tensión plana (Leyes de Hooke generalizadas)

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{\{\varepsilon\} = [\boldsymbol{S}]\{\sigma\}}$$

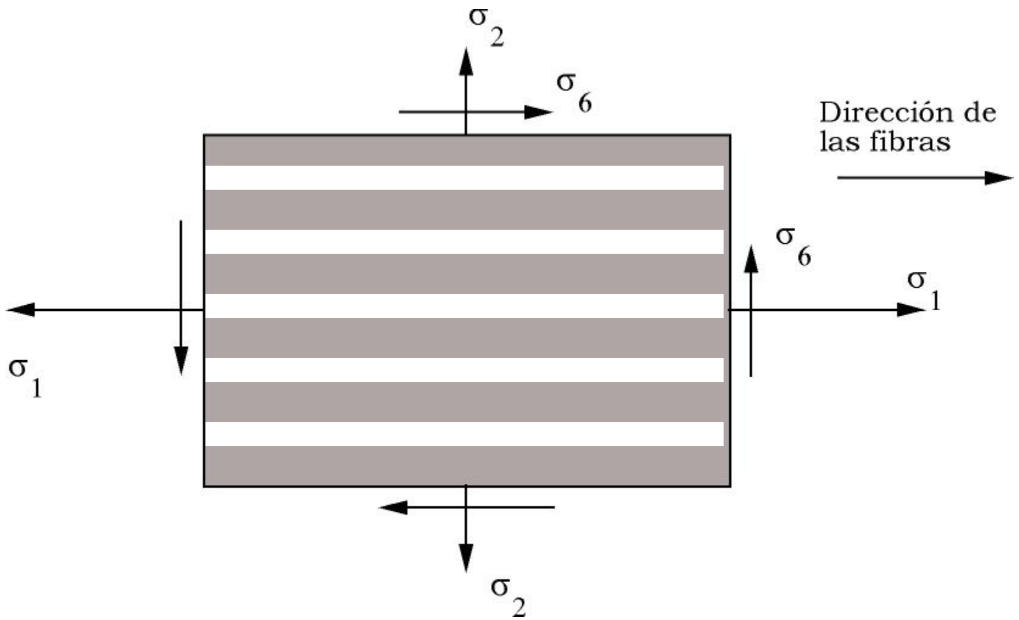
$$S_{11} = \frac{1}{E_1}$$

$$S_{22} = \frac{1}{E_2}$$

$$S_{66} = \frac{1}{G_{12}}$$

$$S_{12} = -\frac{\nu_{12}}{E_2} = -\frac{\nu_{21}}{E_1}$$

Matriz de rigidez de la lámina en tensión plana



$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix}$$

$$\{\varepsilon\} = [S]\{\sigma\}$$

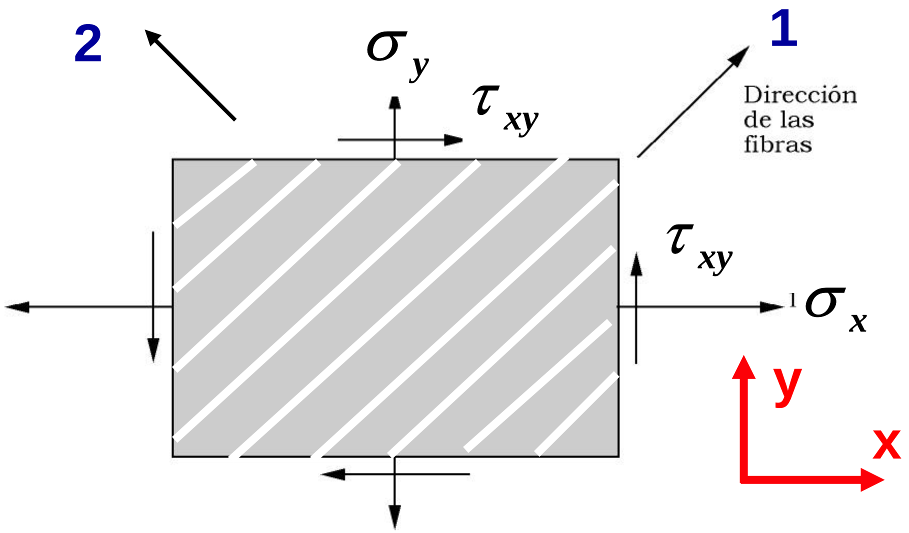
$$\{\sigma\} = [S]^{-1}\{\varepsilon\} = [Q]\{\varepsilon\}$$

$$\boxed{[Q] = [S]^{-1}}$$

$$Q_{11} = E_1/(1-\nu_{12}\nu_{21})$$
$$Q_{12} = \nu_{21}E_2/(1-\nu_{12}\nu_{21}) = \nu_{12}E_1/(1-\nu_{12}\nu_{21})$$
$$Q_{22} = E_2/(1-\nu_{12}\nu_{21})$$
$$Q_{66} = G_{12} = E_6$$

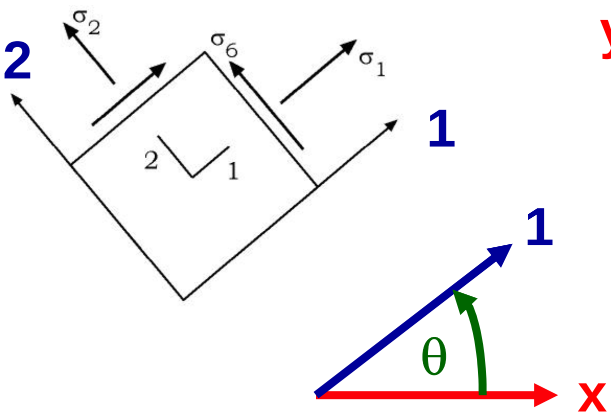
MACROMECANICA DE LA LAMINA

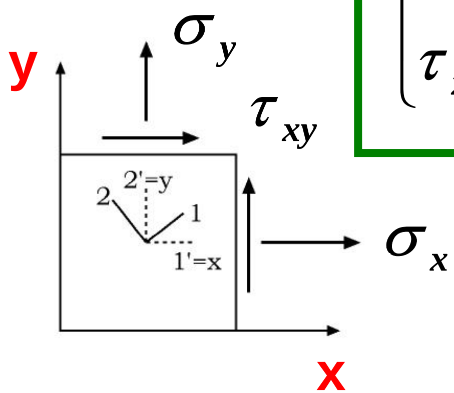
Matriz de rigidez en tensión plana (cualquier orientación)



$$\{\sigma'\} = [\overline{Q}]\{\varepsilon'\}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{xx} & \overline{Q}_{xy} & \overline{Q}_{xs} \\ \overline{Q}_{yx} & \overline{Q}_{yy} & \overline{Q}_{ys} \\ \overline{Q}_{sx} & \overline{Q}_{sy} & \overline{Q}_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$





O, también:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{21} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} \\ \overline{Q}_{61} & \overline{Q}_{62} & \overline{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

Expresión de $\left[\overline{Q}\right]$(matriz de rigidez en ejes globales) en función de $\left[Q\right]$(matriz de rigidez en ejes materiales)

$$\overline{Q}_{xx} = Q_{11}\cos^4\theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66})sen^2\theta\cos^2\theta + Q_{22}sen^4\theta$$

$$\overline{Q}_{yx} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})sen^2\theta\cos^2\theta + Q_{12}(sen^4\theta + \cos^4\theta)$$

$$\overline{Q}_{yy} = Q_{11}sen^4\theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66})sen^2\theta\cos^2\theta + Q_{22}\cos^4\theta$$

$$\overline{Q}_{xs} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})sen\theta\cos^3\theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})sen^3\theta\cos\theta$$

$$\overline{Q}_{ys} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})sen^3\theta\cos\theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})sen\theta\cos^3\theta$$

$$\overline{Q}_{ss} = (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})sen^2\theta\cos^2\theta + Q_{66}(sen^4\theta + \cos^4\theta)$$

¿Qué diferencias existen entre las matrices de rigidez de una lámina a +θ y otra a –θ?

$$\overline{Q}_{xx} = \overline{Q}_{11} = Q_{11}\cos^4\theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66})sen^2\theta\cos^2\theta + Q_{22}sen^4\theta$$

$$\overline{Q}_{yx} = \overline{Q}_{21} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})sen^2\theta\cos^2\theta + Q_{12}(sen^4\theta + \cos^4\theta)$$

$$\overline{Q}_{yy} = \overline{Q}_{22} = Q_{11}sen^4\theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66})sen^2\theta\cos^2\theta + Q_{22}\cos^4\theta$$

$$\overline{Q}_{xs} = \overline{Q}_{16} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})sen\theta\cos^3\theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})sen^3\theta\cos\theta$$

$$\overline{Q}_{ys} = \overline{Q}_{26} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})sen^3\theta\cos\theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})sen\theta\cos^3\theta$$

$$\overline{Q}_{ss} = \overline{Q}_{66} = (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})sen^2\theta\cos^2\theta + Q_{66}(sen^4\theta + \cos^4\theta)$$

Sólo estos dos términos cambiarían de signo

Matriz de flexibilidad en tensión plana (cualquier orientación)

$$\{\varepsilon'\} = [\overline{S}]\{\sigma'\}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{S}_{xx} & \overline{S}_{xy} & \overline{S}_{xs} \\ \overline{S}_{yx} & \overline{S}_{yy} & \overline{S}_{ys} \\ \overline{S}_{sx} & \overline{S}_{sy} & \overline{S}_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{[\overline{S}] = [\overline{Q}]^{-1}}$$

O, también:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{S}_{11} & \overline{S}_{12} & \overline{S}_{16} \\ \overline{S}_{21} & \overline{S}_{22} & \overline{S}_{26} \\ \overline{S}_{61} & \overline{S}_{62} & \overline{S}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

Expresión de $\left[\overline{S}\right]$ (matriz de flexibilidad en ejes globales) en función de $\left[S\right]$ (matriz de flexibilidad en ejes materiales)

$$\overline{S}_{xx} = \overline{S}_{11} = S_{11}\cos^4\theta + (2\cdot S_{12} + S_{66})sen^2\theta\cos^2\theta + S_{22}sen^4\theta$$

$$\overline{S}_{yx} = \overline{S}_{21} = (S_{11} + S_{22} - S_{66})sen^2\theta\cos^2\theta + S_{12}(sen^4\theta + \cos^4\theta)$$

$$\overline{S}_{yy} = \overline{S}_{22} = S_{11}sen^4\theta + (2S_{12} + S_{66})sen^2\theta\cos^2\theta + S_{22}\cos^4\theta$$

$$\overline{S}_{xs} = \overline{S}_{16} = (2S_{11} - 2S_{12} - S_{66})sen\,\theta\cos^3\theta - (2S_{22} - 2S_{12} - S_{66})sen^3\theta\cos\theta$$

$$\overline{S}_{ys} = \overline{S}_{26} = (2S_{11} - 2S_{12} - Q_{66})sen^3\theta\cos\theta - (-2S_{12} + 2S_{22} - 2S_{66})sen\,\theta\cos^3\theta$$

$$\overline{S}_{ss} = \overline{S}_{66} = 2(2S_{11} + 2S_{22} - 4S_{12} - S_{66})sen^2\theta\cos^2\theta + S_{66}(sen^4\theta + \cos^4\theta)$$

REQUISITOS DE LAS MATRICES DE FLEXIBILIDAD Y RIGIDEZ

Densidad de energía de deformación:

$$\omega = \frac{1}{2}\left\{\varepsilon_x\ \varepsilon_y\ \varepsilon_z\ \gamma_{yz}\ \gamma_{zx}\ \gamma_{xy}\right\}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_z\\ \tau_{yz}\\ \tau_{zx}\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix} \geq 0$$

MACROMECANICA DE LA LAMINA

O, expresando las tensiones en función de las deformaciones:

$$\omega = \frac{1}{2}\left\{\varepsilon_x\ \varepsilon_y\ \varepsilon_z\ \gamma_{yz}\ \gamma_{zx}\ \gamma_{xy}\right\}\left[\overline{Q}\right]\begin{Bmatrix}\varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix} \geq 0$$

La matriz $\left[\overline{Q}\right]$ tiene que ser definida positiva. Lo anterior implica que, también, la matriz $\left[\overline{S}\right]$ debe serlo. De la misma manera, estas matrices, expresadas en ejes materiales será definidas positivas.

Para un material ortótropo, la condición anterior se satisface si,

para la matriz

$$[S]=\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix}$$

se cumpliera los siguiente:

$$S_{11} \geq 0 \quad S_{22} \geq 0 \quad S_{33} \geq 0 \quad S_{44} \geq 0 \quad S_{55} \geq 0 \quad S_{66} \geq 0$$

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{S}_{22} & \boldsymbol{S}_{23} \\ \boldsymbol{S}_{32} & \boldsymbol{S}_{33} \end{vmatrix} \geq 0 \quad \begin{vmatrix} \boldsymbol{S}_{11} & \boldsymbol{S}_{13} \\ \boldsymbol{S}_{31} & \boldsymbol{S}_{33} \end{vmatrix} \geq 0 \quad \begin{vmatrix} \boldsymbol{S}_{11} & \boldsymbol{S}_{12} \\ \boldsymbol{S}_{21} & \boldsymbol{S}_{22} \end{vmatrix} \geq 0$$

$$\begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{vmatrix} \geq 0$$

MACROMECANICA DE LA LAMINA

Lo anterior se cumple si:

a) Material ortótropo:

$$E_1 \geq 0 \quad E_2 \geq 0 \quad E_3 \geq 0$$

$$G_{13} \geq 0 \quad G_{23} \geq 0 \quad G_{12} \geq 0$$

$$1 - \nu_{32}^2 \frac{E_3}{E_2} - \nu_{12}^2 \frac{E_2}{E_1} - \nu_{31}^2 \frac{E_3}{E_1} - 2\nu_{21}\nu_{31}\nu_{32} \frac{E_3}{E_1} \geq 0$$

$$\nu_{32}^2 \leq \frac{E_2}{E_1} \quad \nu_{31}^2 \leq \frac{E_1}{E_3} \quad \nu_{21}^2 \leq \frac{E_1}{E_2}$$

b) Material transversalmente isótropo:

$$E_1 \geq 0 \quad E_2 \geq 0 \quad G_{12} \geq 0$$

$$-1 \leq \nu_{32} \leq 1 - 2\frac{E_2}{E_1}\nu_{21}^2$$

$$\nu_{21}^2 \leq \frac{E_1}{E_2}$$

c) Material isótropo:

$$E \geq 0$$

$$-1 \leq \nu \leq 0{,}5$$

Ejemplo:

Las constantes de una lámina unidireccional carbono/epoxi son:

$$E_1 = 148\times 10^9 \ N/m^2 \quad E_2 = 9{,}65\times 10^9 \ N/m^2 \quad G_{12} = 4{,}55\times 10^9 \ N/m^2$$

$$\nu_{21} = 0{,}3 \quad \nu_{32} = 0{,}6$$

Determinar si estas constantes son físicamente posibles.

Solución (Método 1):

La matriz de flexibilidad de la lámina es:

$$[S]=\begin{bmatrix} 6{,}76 & -2{,}03 & -2{,}03 & 0 & 0 & 0 \\ -2{,}03 & 103{,}63 & -62{,}18 & 0 & 0 & 0 \\ -2{,}03 & -62{,}18 & 103{,}63 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 331{,}61 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 219{,}78 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 219{,}78 \end{bmatrix}\times 10^{-12} \quad \left(N/m^2\right)^{-1}$$

Cuyos autovalores (x10^9) son: $0{,}0065 \quad 0{,}0417 \quad 0{,}1658 \quad 0{,}2198 \quad 0{,}2198 \quad 0{,}3316$

Puesto que todos ellos son positivos, podemos afirmar que la matriz es definida positiva y, por tanto, que las constantes mecánicas de la lámina son físicamente posibles.

Solución (Método 2):

Para un material transversalmente isótropo:

$$E_1 = 148 \times 10^9 \ N/m^2 \geq 0 \quad E_2 = 9{,}65 \times 10^9 \ N/m^2 \geq 0 \quad G_{12} = 4{,}55 \times 10^9 \ N/m^2 \geq 0$$

$$-1 \leq \nu_{32} \leq 1 - 2\frac{E_2}{E_1}\nu_{21}^2 \longrightarrow -1 \leq 0{,}6 \leq 0{,}988$$

$$\nu_{21}^2 \leq \frac{E_1}{E_2} \longrightarrow 0{,}09 \leq 15{,}3$$

Puesto que se verifican todas, y cada una de las relaciones anteriores, podemos afirmar que la matriz es definida positiva y, por tanto, que las constantes mecánicas de la lámina son físicamente posibles.

Ejemplo (Para casa):

Las constantes de una lámina unidireccional carbono/epoxi son:

$$E_1 = 148 \times 10^9 \ N/m^2 \quad E_2 = 9{,}65 \times 10^9 \ N/m^2 \quad G_{12} = 4{,}55 \times 10^9 \ N/m^2$$

$$\nu_{12} = 0{,}3 \quad \nu_{32} = 0{,}6$$

Determinar si estas constantes son físicamente posibles.