

**UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID**

---



# **ASPECTOS MACROMECÁNICOS DE LA ROTURA**

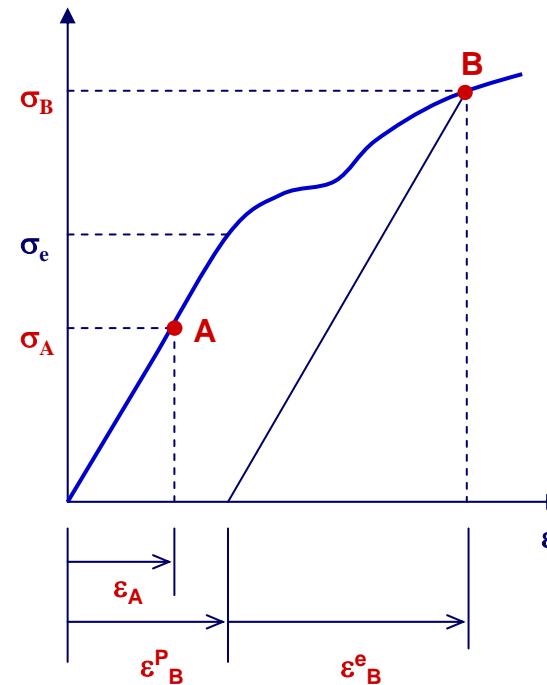
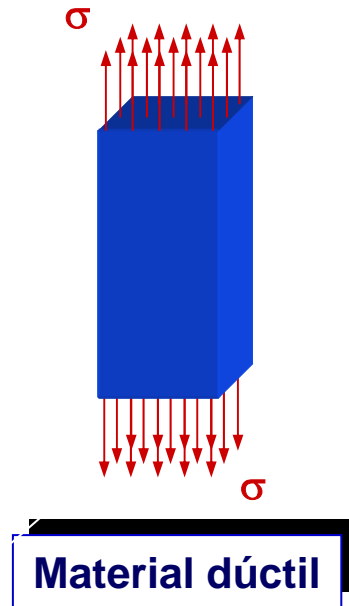
**Carlos Navarro**

**Departamento de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras**



## Concepto de criterio de fallo para materiales isótopos

En un estado de tracción



Criterio de Plastificación

$$\sigma - \sigma_e = 0$$

Punto A: Comportamiento elástico

$$\sigma_A < \sigma_e$$

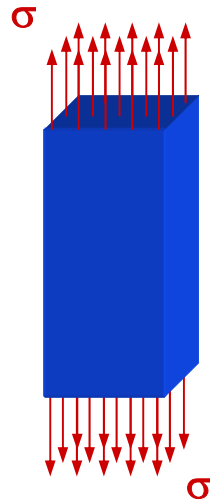
Punto B: Comportamiento plástico

$$\sigma_B > \sigma_e$$

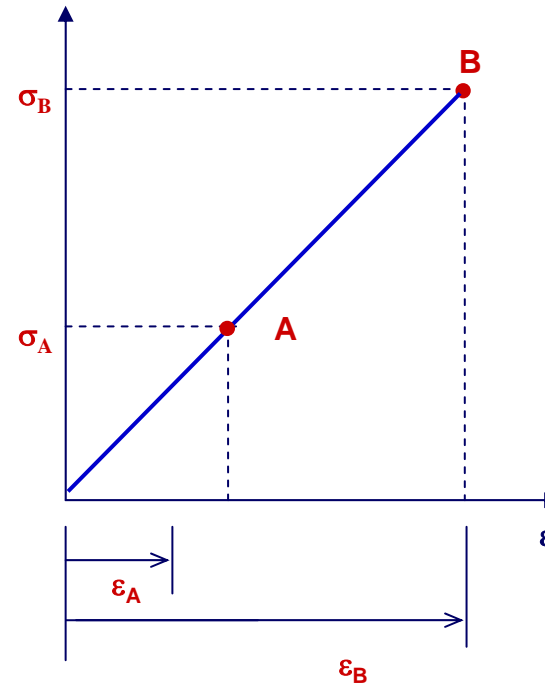


## Concepto de criterio de fallo para materiales isótropos

En un estado de tracción



**Material frágil**



Criterio de rotura

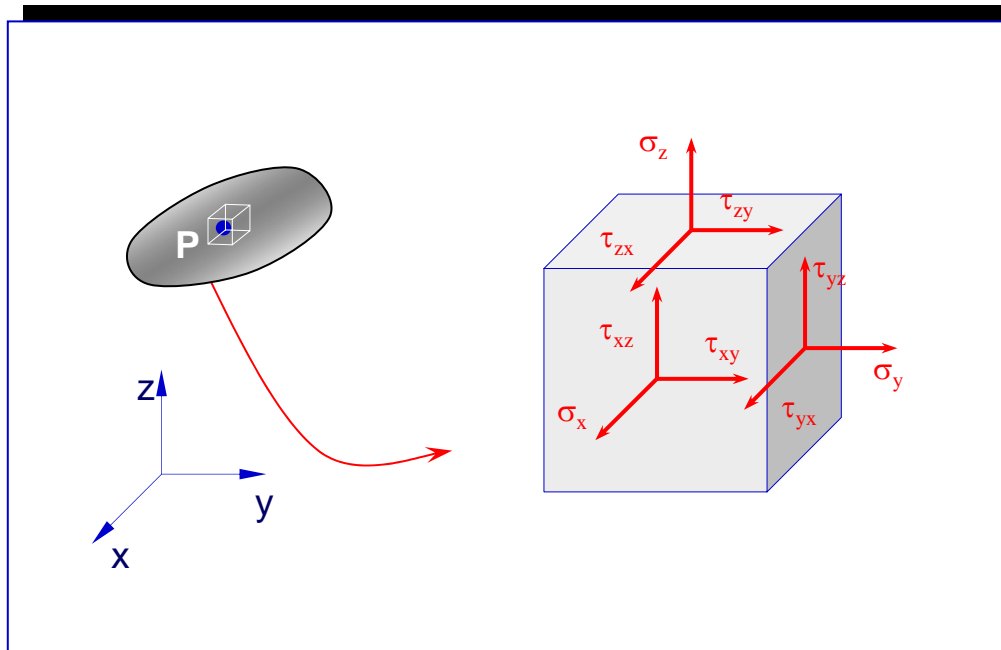
$$\sigma - \sigma_R = 0$$

Punto A: Material intacto  
Punto B: Rotura



## Concepto de criterio de fallo para materiales isótropos

En un estado de tensiones genérico



Criterio de Plastificación

$$f([T]; \sigma_{\text{plastificación}}) = 0$$

Para materiales isótropos no existen direcciones privilegiadas:

$$f(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \sigma_{\text{plastificación}}) = 0$$



## Bases físicas de la teoría de Von Mises (1900) (Materiales isótopos)

La plastificación se produce si  $U_d$  (Energía de distorsión) alcanza el mismo valor de  $U_d$  cuando se produce la plastificación en un ensayo de tracción

Concepto de Energía de distorsión :

Energía consumida para obtener un cambio de forma del punto elástico sin que éste cambie ni de dimensiones y ni de volumen.

$$U_d = U_T - U_V$$

Energía de distorsión      Energía Total      Energía necesaria para producir un cambio de volumen



1- Calculemos el cambio de volumen de un punto elástico sometido a las tensiones principales  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$ .

$$\begin{aligned}\Delta V &= [(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3) - 1] = \\ &= 1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 - 1 \approx \\ &\approx \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3\end{aligned}$$

Como quiera que:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\nu(\sigma_2 + \sigma_3)}{E} \quad \boxed{1}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \frac{\nu(\sigma_1 + \sigma_3)}{E} \quad \boxed{2}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\sigma_3}{E} - \frac{\nu(\sigma_1 + \sigma_2)}{E} \quad \boxed{3}$$

llegamos a que:

$$\Delta V = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)(1 - 2\nu)}{E}$$



- 2- Calculemos la tensión hidrostática que produciría la misma variación de volumen ( $\Delta V$ ):

$$\Delta V = 3e_v = \frac{3}{E} \sigma_{hidrostática} (1 - 2\nu) \quad \sigma_{hidrostática} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

- 3- Calculemos  $U_T$  para el punto elástico :

$U_T$  para un resorte :

$$U_T = \frac{1}{2} [\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3] \quad U_T = \frac{1}{2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{x} = \frac{1}{2} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} = \frac{1}{2} \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}^2$$



Utilizando las ecuaciones 1, 2 y 3

$$U_T = \frac{1}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) (1 - 2\nu)$$

4- Calculemos  $U_V$

$$U_V = \frac{3}{2E} \sigma_{\text{hidrostática}}^2 (1 - 2\nu)$$

$$U_V = \frac{1}{6E} (1 - 2\nu) (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2\sigma_1\sigma_2 + 2\sigma_1\sigma_3 + 2\sigma_2\sigma_3)$$

5- Despejemos  $U_d$

$$U_d = U_T - U_V = \frac{1 + \nu}{3E} \left[ \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2} \right]$$

A





6- Calculemos  $U_d$  cuando se produce la plastificación en un ensayo de tracción:

$$U_d = \underbrace{\frac{1+\nu}{3E} \sigma_y^2}_{B} \quad \sigma_y = \text{límite elástico del material}$$

7- Igualando las expresiones A y B

$$\sigma_y^2 = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2}$$

$$\sigma_y = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]^{1/2}$$



8- Llamando:

$$\sigma_e = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]^{1/2}$$

9- La plastificación se produce cuando  $\sigma_e \geq \sigma_y$

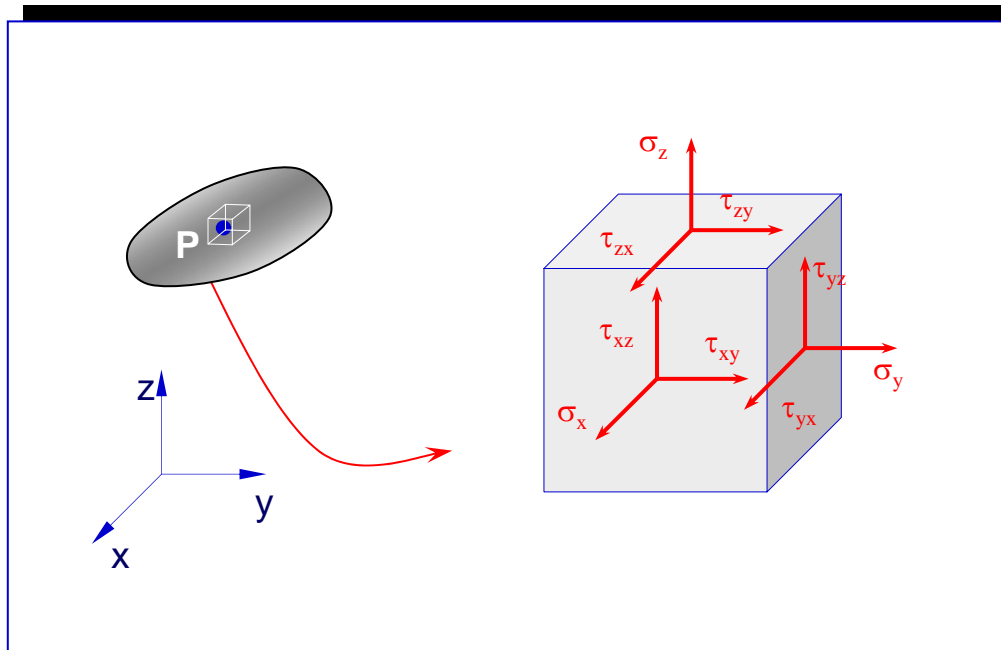


Tensión equivalente de Von Mises.



## Concepto de criterio de fallo para materiales anisótopos

En un estado de tensiones genérico



Criterio de Plastificación

$$f([T]; \sigma's_{\text{plastificación}}) = 0$$

Para materiales isotrópicos no existen direcciones privilegiadas:

$$f(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \sigma's_{\text{plastificación}}) = 0$$



## CRITERIO DE HILL (1948) (Materiales metálicos anisótropos)

$$F(\sigma_y - \sigma_z)^2 + G(\sigma_z - \sigma_x)^2 + H(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 2L\tau_{yz}^2 + 2M\tau_{zx}^2 + 2N\tau_{xy}^2 = 1$$

Si X, Y y Z son las tensiones de plastificación según las direcciones principales:

$$2F = \frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2} - \frac{1}{X^2}$$

$$2G = \frac{1}{X^2} + \frac{1}{Z^2} - \frac{1}{Y^2}$$

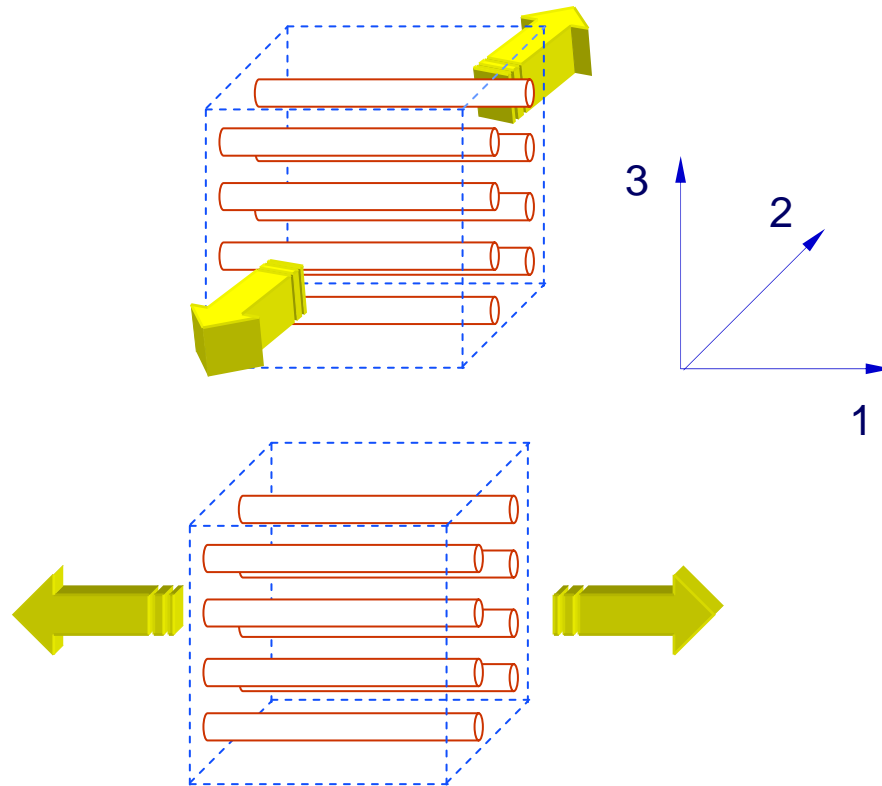
$$2H = \frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Z^2}$$

Si R, S y T son las tensiones de plastificación por cizalladura:

$$2L = \frac{1}{R^2} \quad 2M = \frac{1}{S^2} \quad 2N = \frac{1}{T^2}$$



## Concepto de criterio de rotura para materiales anisótopos



Criterio de Rotura

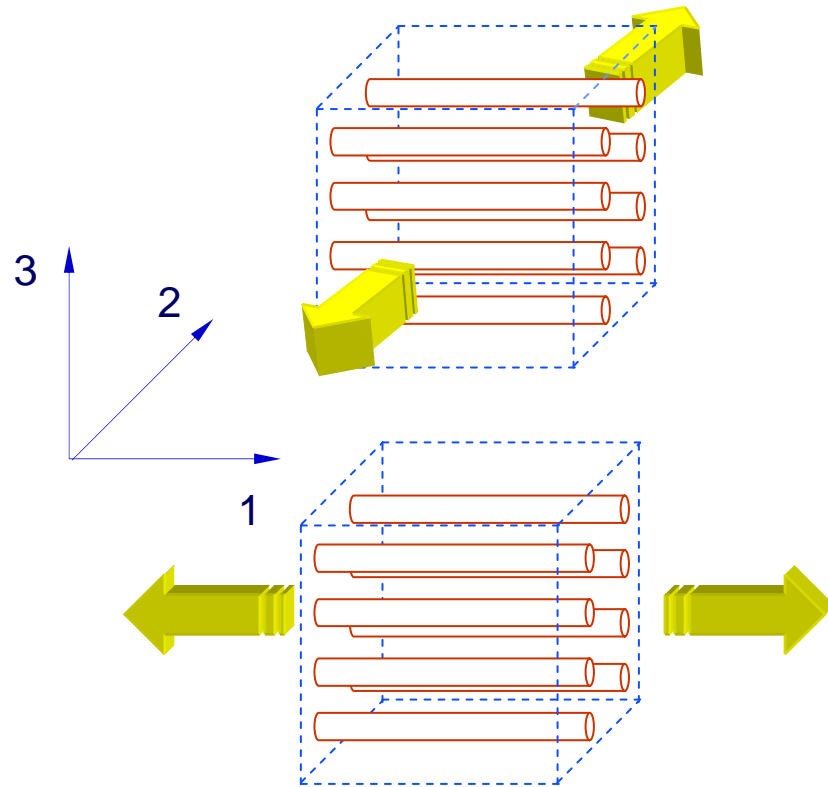
$$f([T]; \text{Resistencias mecánicas}) = 0$$

El criterio de rotura debe expresarse en ejes de ortotropía

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{12}, \tau_{23}, \tau_{13}, X_t, Y_t, Z_t, S_{xy}, S_{xz}, S_{yz}, X_c, Y_c, Z_c) = 0$$



## Características distintivas de los materiales compuestos



### Propiedades elásticas

$$E_1, E_2, E_3$$

$$G_{12}, G_{13}, G_{23}$$

$$\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}$$

### Propiedades resistentes

$$X_t, Y_t, Z_t$$

$$X_c, Y_c, Z_c$$

$$S_{12}, S_{13}, S_{23}$$



## Propiedades Mecánicas de los Materiales Compuestos

	<u>VIDRIO</u>	<u>ARAMIDA</u>	<u>CARBONO</u>
<b>Densidad</b> ( $\text{kg}/\text{m}^3$ )	2080	1350	1530
$X_t$ (MPa)	<b>1250</b>	<b>1410</b>	<b>1270</b>
$X_c$ (MPa)	600	280	1130
$Y_t$ (MPa)	<b>35</b>	<b>28</b>	<b>42</b>
$Y_c$ (MPa)	141	141	141
$E_1$ (GPa)	<b>45</b>	<b>85</b>	<b>134</b>
$E_2$ (GPa)	<b>12</b>	<b>56</b>	<b>7</b>
$\alpha_1$ ( $^{\circ}\text{C}^{-1}$ )	$0.4\div 0.7 \times 10^{-5}$	$-0.4 \times 10^{-5}$	$-0.12 \times 10^{-5}$
$\alpha_2$ ( $^{\circ}\text{C}^{-1}$ )	$1.6\div 2.0 \times 10^{-5}$	$5.8 \times 10^{-5}$	$3.4 \times 10^{-5}$



## HIPÓTESIS DE LINEALIDAD

$$X_t = E_1 X_{\varepsilon t}$$

$$X_c = E_1 X_{\varepsilon c}$$

$$Y_t = E_2 Y_{\varepsilon t}$$

$$Y_c = E_2 Y_{\varepsilon c}$$

$$S = G_{12} S_{\varepsilon}$$





## PRINCIPALES MECANISMOS DE FALLO DE LOS LAMINADOS REALIZADOS CON MATERIALES COMPUESTOS

**Deslaminación:** Los materiales compuestos fabricados a base de diferentes láminas apiladas tienden a deslaminarse. La rigidez a flexión de un panel con deslaminaciones se reduce significativamente, aún cuando visualmente estas deslaminaciones no se detecten.

**Fallo de la matriz a compresión:** Realmente es un fallo de la matriz por cortante puesto que la superficie de fractura forma un ángulo con la dirección de carga, lo que evidencia la naturaleza de este tipo de fallo.



**Fallo de las fibras a compresión:** Este modo de fallo se ve muy afectado por el comportamiento a cortante de la matriz y por las imperfecciones del proceso de fabricación del material (desalineamiento de fibras y existencia de huecos).

**Fallo de la matriz a tracción:** La superficie de fractura que resulta de este tipo de fallo es ortogonal a la dirección de carga, y dicha superficie puede ser fácilmente observada.

**Fallo de las fibras a tracción:** Este modo de fallo tiene un carácter “explosivo”, Pues se libera una gran cantidad de energía y, en estructuras que no tengan La posibilidad de redistribuir las cargas, este fallo causa una rotura catastrófica.



## Clasificación de los criterios de fallo

### Criterios de rotura desacoplada

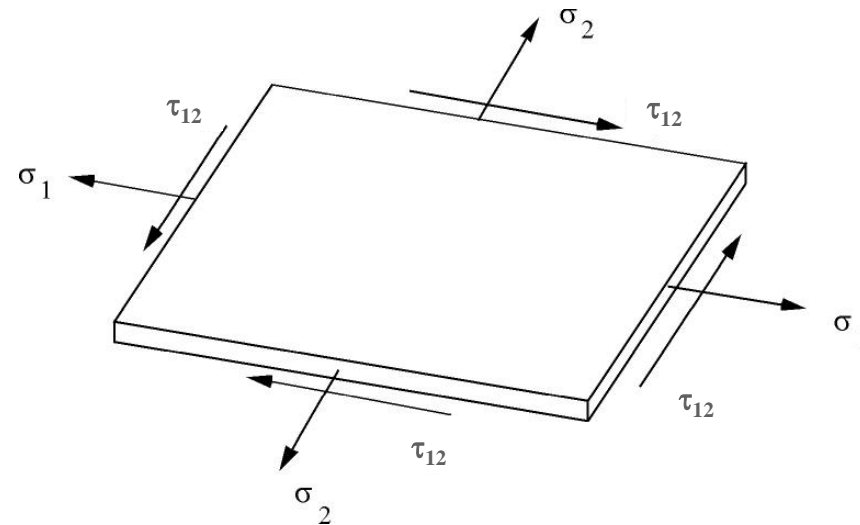
Tensión máxima  
Máxima deformación

### Criterios de rotura con interacción

Tsai Hill  
Hoftmann  
Tsai Wu

### Criterios de rotura fibra-matriz

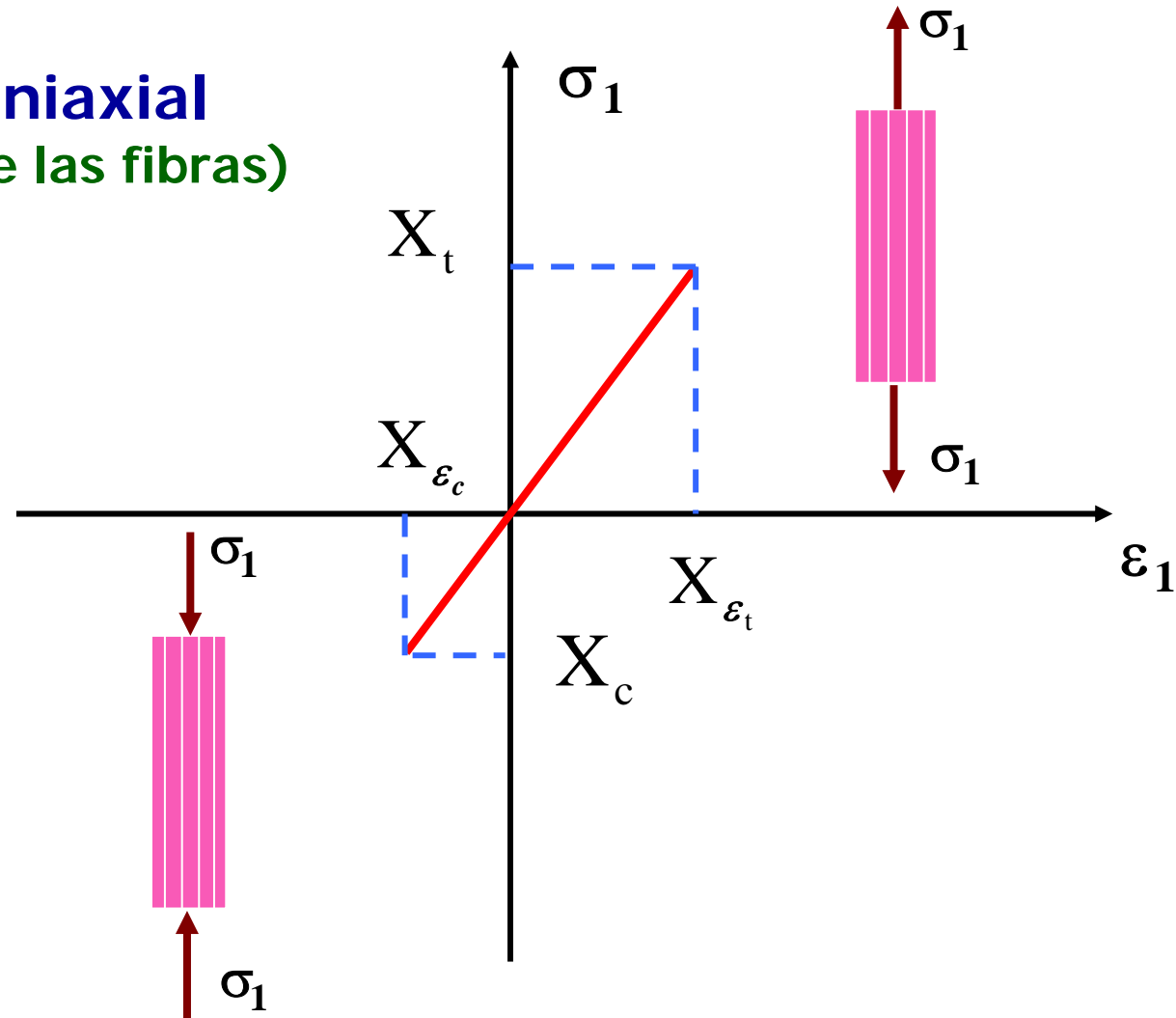
Hann, Erikson & Tsai  
Hashin





## Criterio de Tensión Máxima

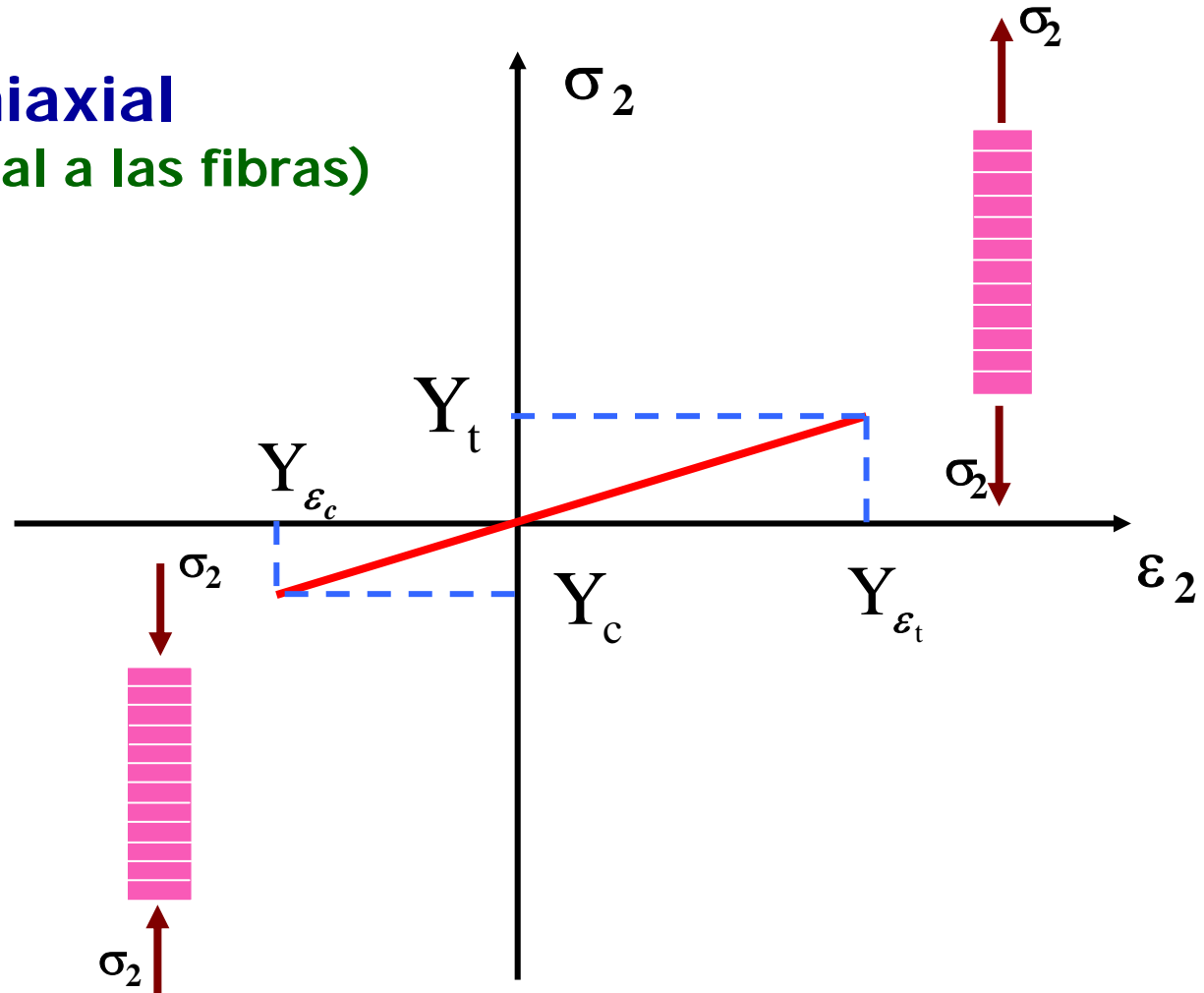
Carga uniaxial  
(dirección de las fibras)





## Criterio de Tensión Máxima

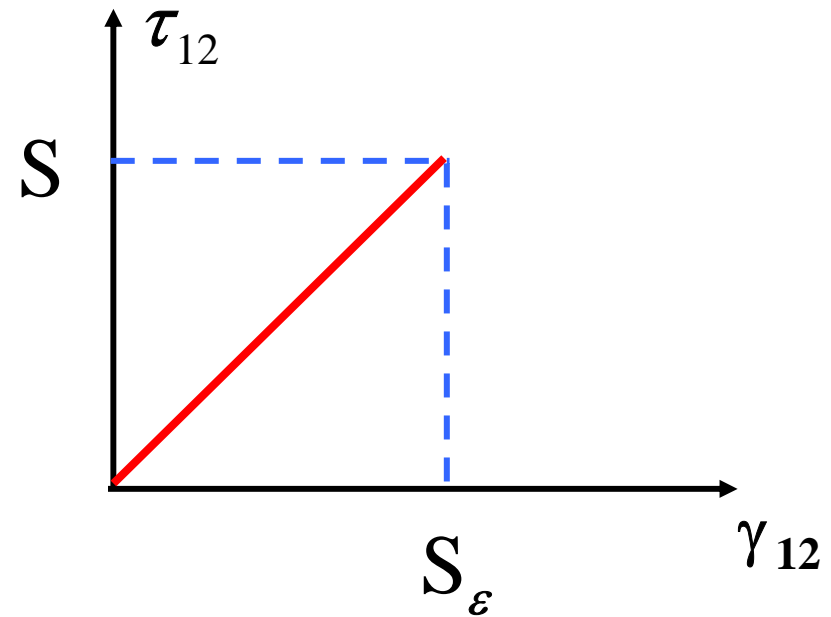
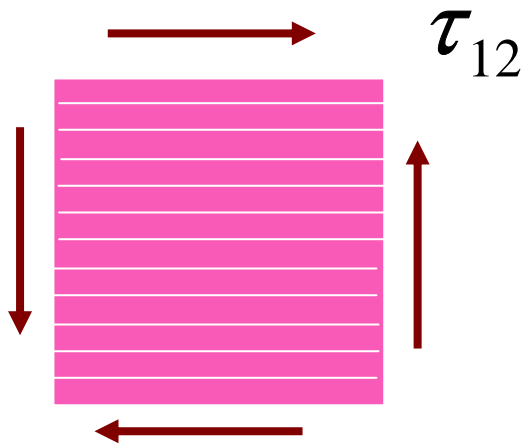
Carga uniaxial  
(dirección ortogonal a las fibras)





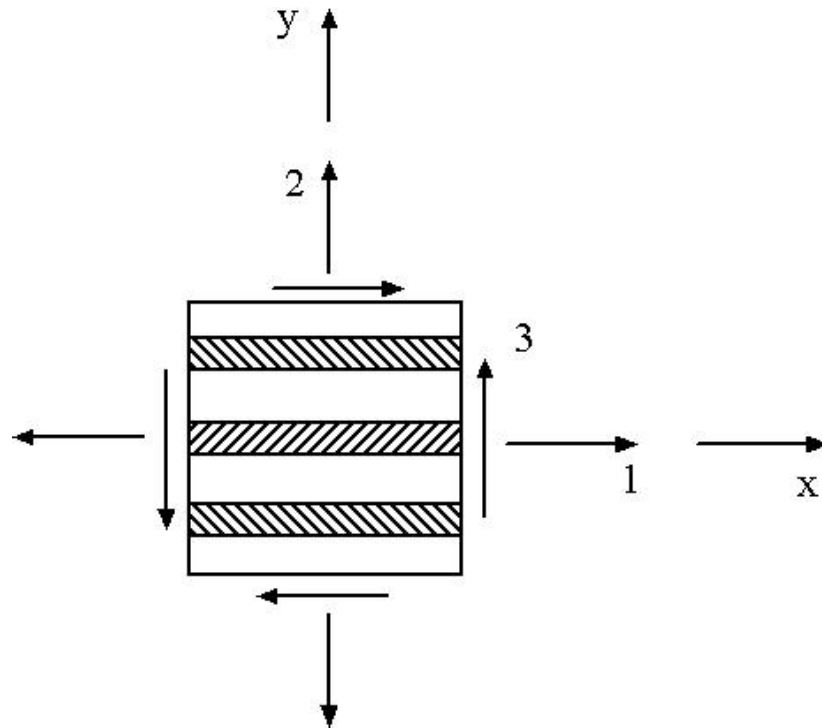
## Criterio de Tensión Máxima

### Carga cortante





## Criterio de Tensión Máxima



$$-X_c < \sigma_1 < X_t$$

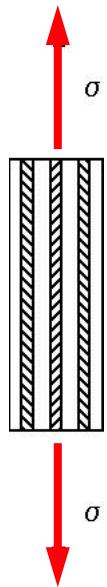
$$-Y_c < \sigma_2 < Y_t$$

$$|\tau_{12}| < S$$

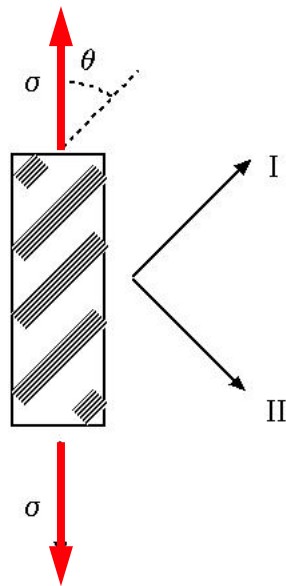


## Criterio de Tensión Máxima

Aplicación a estados de carga no aplicados en ejes de ortotropía



$$\sigma < X_t$$



$$\sigma_1 = \sigma \cdot \cos^2 \theta$$

$$\sigma_2 = \sigma \cdot \sin^2 \theta$$

$$\tau_{12} = -\sigma \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta$$

$$\sigma < \frac{X_t}{\cos^2 \theta}$$

$$\sigma < \frac{Y_t}{\sin^2 \theta}$$

$$\sigma < \frac{S}{\sin \theta \cdot \cos \theta}$$

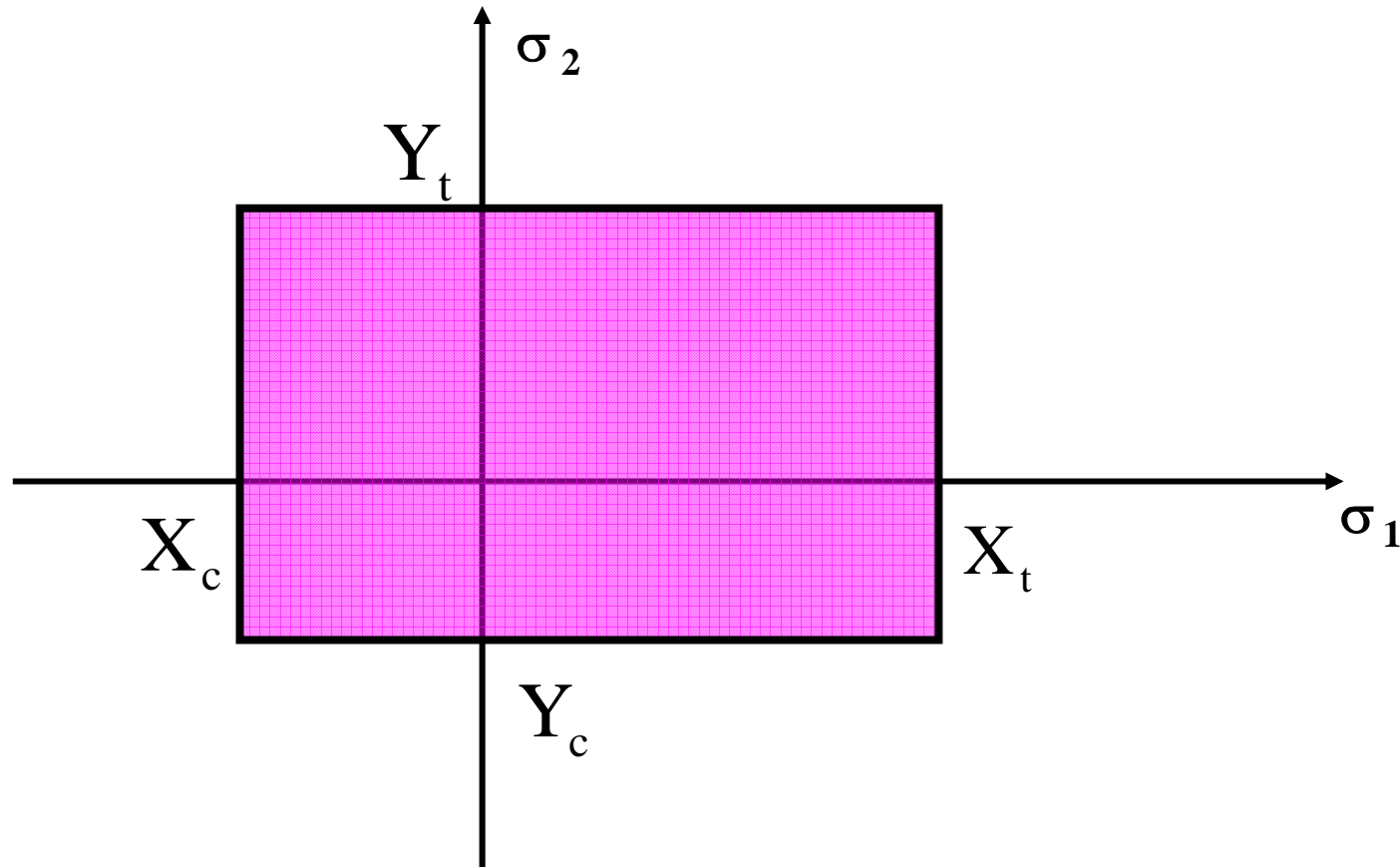
$$\sigma_{rotura} = \min \left\{ \begin{array}{l} X_t / \cos^2 \theta \\ Y_t / \sin^2 \theta \\ S / \sin \theta \cos \theta \end{array} \right\}$$





## Criterio de Tensión Máxima

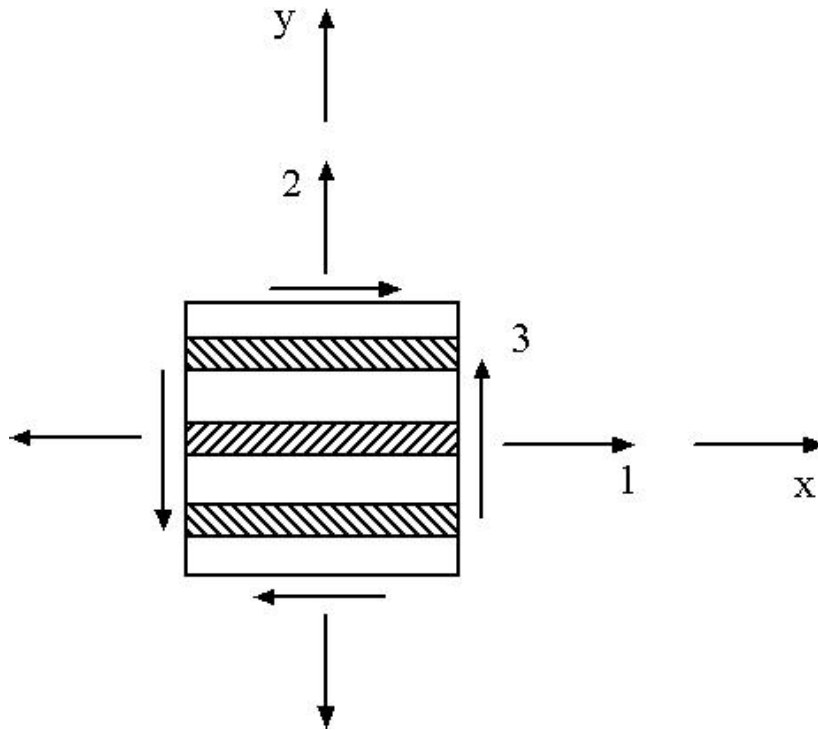
### ENVOLVENTE DE ROTURA



No existe ninguna interacción entre las diferentes tensiones



## Criterio de Máxima Deformación



$$-X_{\varepsilon_c} < \varepsilon_1 < X_{\varepsilon_t}$$

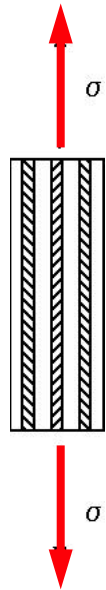
$$-Y_{\varepsilon_c} < \varepsilon_2 < Y_{\varepsilon_t}$$

$$|\gamma_{12}| < S_{\varepsilon}$$

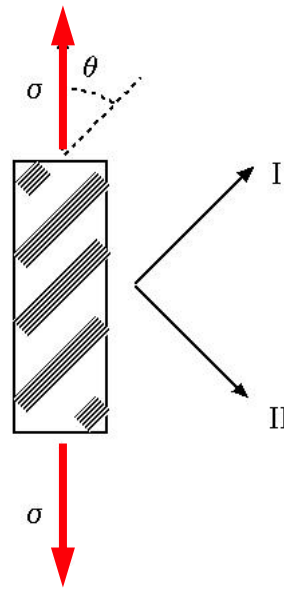


## Criterio de Máxima Deformación

Aplicación a estados de carga no aplicados en ejes de ortotropía



$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{\sigma}{E_1} \\ \varepsilon_2 &= -\nu_{21} \cdot \frac{\sigma}{E_1} \\ \gamma_{12} &= 0\end{aligned}$$



$$\sigma_1 = \sigma \cdot \cos^2 \theta$$

$$\sigma_2 = \sigma \cdot \sin^2 \theta$$

$$\tau_{12} = -\sigma \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E_1} (\sigma_1 - \nu_{12} \cdot \sigma_2) = \frac{1}{E_1} (\cos^2 \theta - \nu_{12} \sin^2 \theta) \cdot \sigma$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E_2} (\sigma_2 - \nu_{21} \cdot \sigma_1) = \frac{1}{E_2} (\sin^2 \theta - \nu_{21} \cos^2 \theta) \cdot \sigma$$

$$\gamma_{12} = \frac{\tau_{12}}{G_{12}} = -\frac{1}{G_{12}} (\sin \theta \cdot \cos \theta) \cdot \sigma$$



## Criterio de Máxima Deformación

Aplicación a estados de carga no aplicados en ejes de ortotropía

$\sigma < E_1 X_{\epsilon t}$   
 $\sigma < \frac{E_1 \cdot Y_{c\epsilon}}{\nu_{21}}$

$X_{\epsilon t} = \frac{X_t}{E_1}$        $Y_{\epsilon t} = \frac{Y_t}{E_2}$        $S_{\epsilon} = \frac{S}{G_{12}}$

$X_{\epsilon c} = \frac{X_c}{E_1}$        $Y_{\epsilon c} = \frac{Y_c}{E_2}$

$\sigma < X_t$   
 $\sigma < \frac{E_1}{\nu_{21} \cdot E_2} \cdot Y_c$

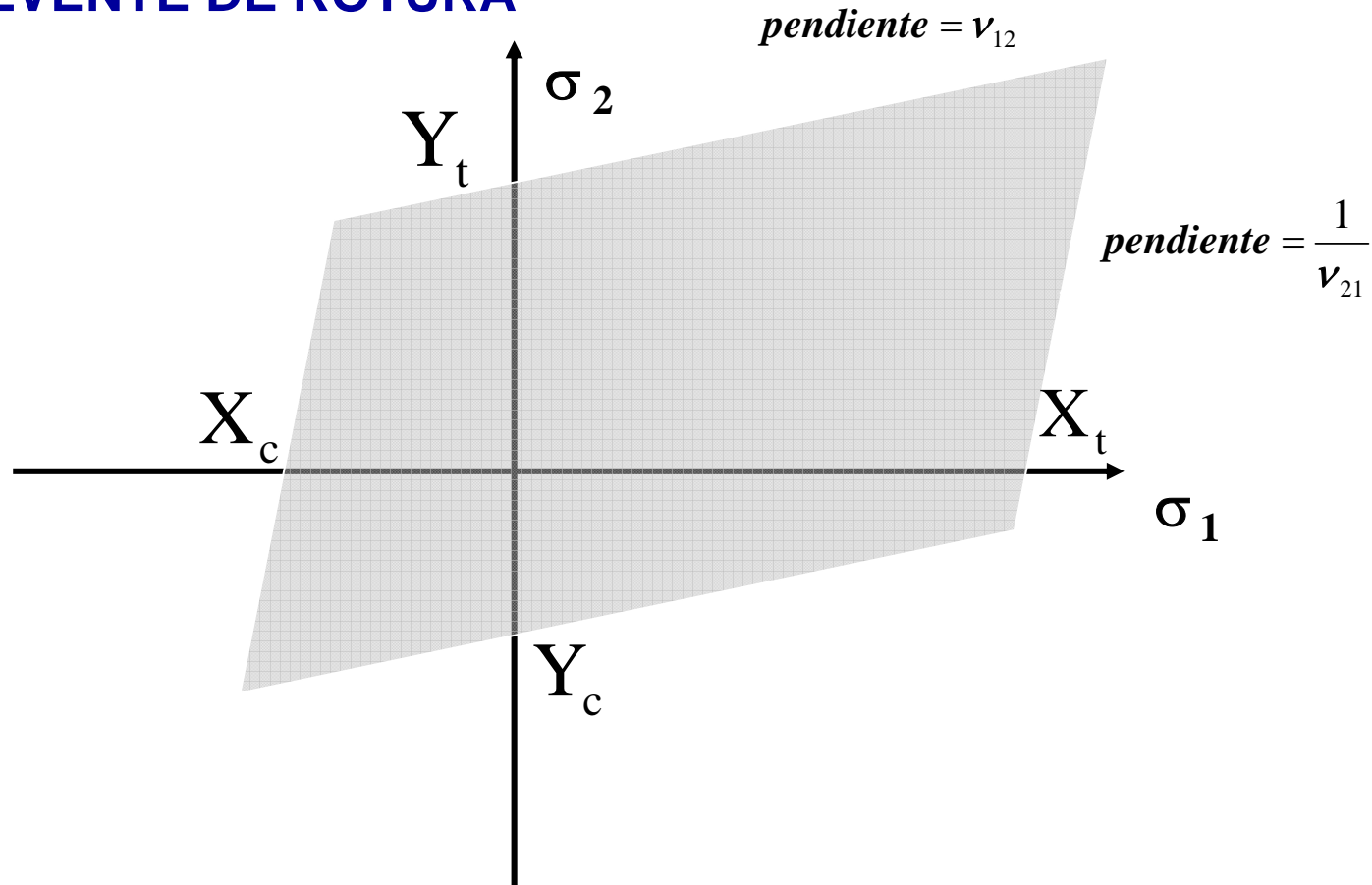
$\sigma < \frac{X_t}{\cos^2 \theta - \nu_{12} \sin^2 \theta}$   
 $\sigma < \frac{Y_t}{\sin^2 \theta - \nu_{21} \cos^2 \theta}$   
 $\sigma < \left| \frac{S}{\cos \theta \sin \theta} \right|$

$\sigma < \frac{X_c}{-\cos^2 \theta + \nu_{12} \sin^2 \theta}$   
 $\sigma < \frac{Y_c}{-\sin^2 \theta + \nu_{21} \cos^2 \theta}$



## Criterio de Máxima Deformación

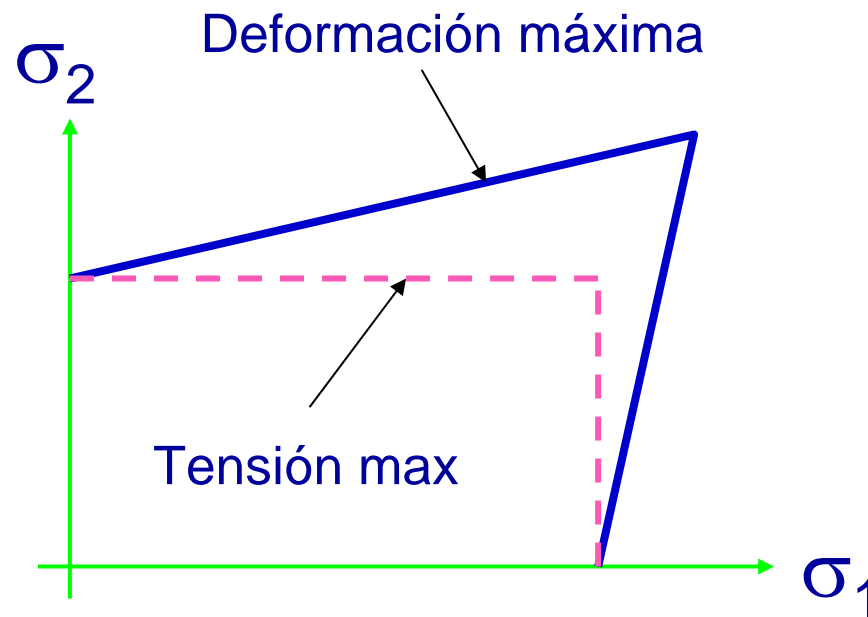
### ENVOLVENTE DE ROTURA



No existe ninguna interacción entre los diferentes tipos de deformación



En el primer cuadrante, el criterio de tensión máxima es más conservador que el de deformación máxima





## Criterio de Tsai-Hill

### Criterio de plastificación de Von Mises (≈1900)

Materiales isótopos

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]}$$

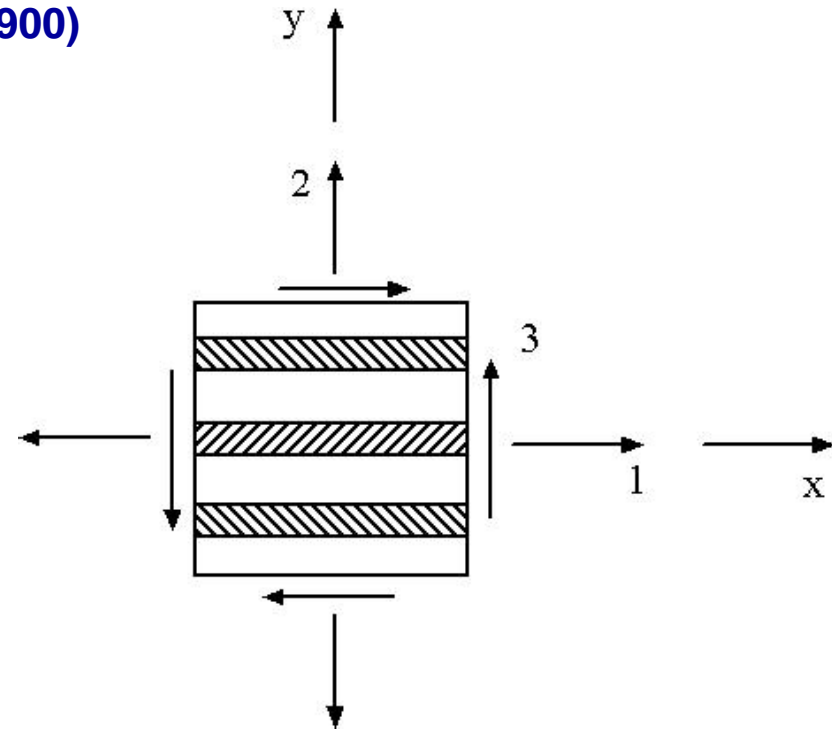
### Criterio de plastificación de Hill (1948)

Materiales anisotropos

$$\begin{aligned} &(G + H) \cdot \sigma_1^2 + (F + H) \cdot \sigma_2^2 + (F + G) \cdot \sigma_3^2 \\ &- 2 \cdot H \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 - 2 \cdot G \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_3 - 2 \cdot F \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \\ &+ 2 \cdot L \cdot \tau_{23}^2 + 2 \cdot M \cdot \tau_{13}^2 + 2 \cdot N \cdot \tau_{12}^2 = 1 \end{aligned}$$

### Criterio de rotura de Azzi y Tsai (1965)

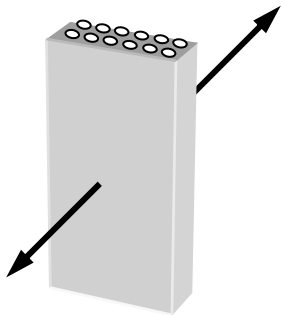
Materiales anisotropos



**Criterio de rotura de Tsai-Hill**



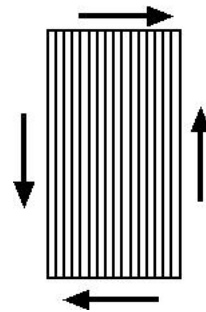
## Criterio de Tsai-Hill



$$\sigma_3 = Z$$

$$(F + G)\sigma_3^2 = 1$$

$$(F + G) = \frac{1}{Z^2}$$



$$\tau_{12} = S$$

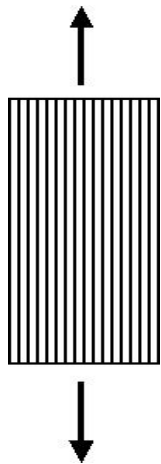
$$2 \cdot N \cdot \tau_{12}^2 = 1$$

$$2N = \frac{1}{S^2}$$



$$2L = \frac{1}{S_{yz}^2}$$

$$2M = \frac{1}{S_{xz}^2}$$



$$\sigma_1 = X$$

$$(G + H)\sigma_1^2 = 1$$

$$(G + H) = \frac{1}{X^2}$$



$$\sigma_2 = Y$$

$$(F + H)\sigma_2^2 = 1$$

$$(F + H) = \frac{1}{Y^2}$$

$$2H = \frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Z^2}$$

$$2G = \frac{1}{X^2} + \frac{1}{Z^2} - \frac{1}{Y^2}$$

$$2F = \frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2} - \frac{1}{X^2}$$

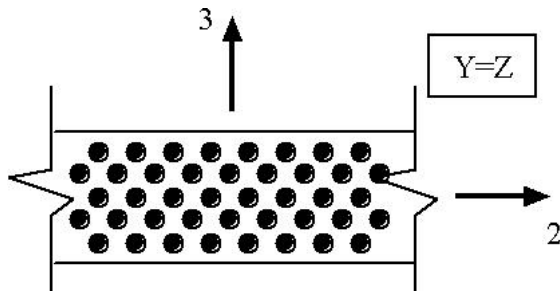




## Criterio de Tsai-Hill

$$\frac{1}{X^2}\sigma_1^2 + \frac{1}{Y^2}\sigma_2^2 + \frac{1}{Z^2}\sigma_3^2 - \left(\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Z^2}\right)\sigma_1\sigma_2 - \left(\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Z^2} - \frac{1}{Y^2}\right)\sigma_1\sigma_3 - \left(\frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2} - \frac{1}{X^2}\right)\sigma_2\sigma_3 + \frac{1}{S_{yz}^2}\tau_{23}^2 + \frac{1}{S_{xz}^2}\tau_{13}^2 + \frac{1}{S^2}\tau_{12}^2 = 1$$

Para una lámina unidireccional trabajando en tensión plana



$$\frac{\sigma_1^2}{X^2} - \frac{\sigma_1 \cdot \sigma_2}{X^2} + \frac{\sigma_2^2}{Y^2} + \frac{\tau_{12}^2}{S^2} = 1$$



## Criterio de Tsai-Hill

$$\frac{\sigma_1^2}{X^2} - \frac{\sigma_1\sigma_2}{X^2} + \frac{\sigma_2^2}{Y^2} + \frac{\tau_{12}^2}{S^2} \leq 1$$

$$X = X_t \quad \sigma_1 > 0$$

$$X = X_c \quad \sigma_1 < 0$$

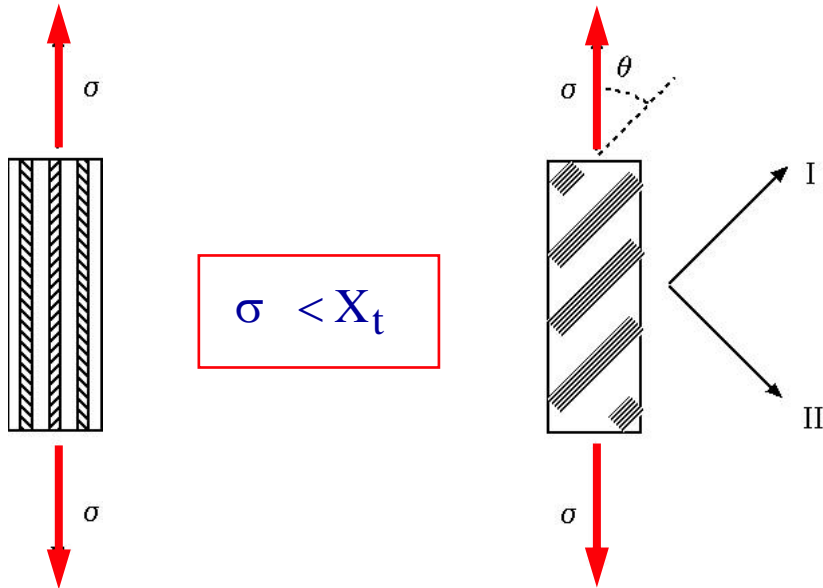
$$Y = Y_t \quad \sigma_2 > 0$$

$$Y = Y_c \quad \sigma_2 < 0$$



## Criterio de Tsai-Hill

Aplicación a estados de carga no aplicados en ejes de ortotropía



$$\sigma_1 = \sigma \cdot \cos^2 \theta$$

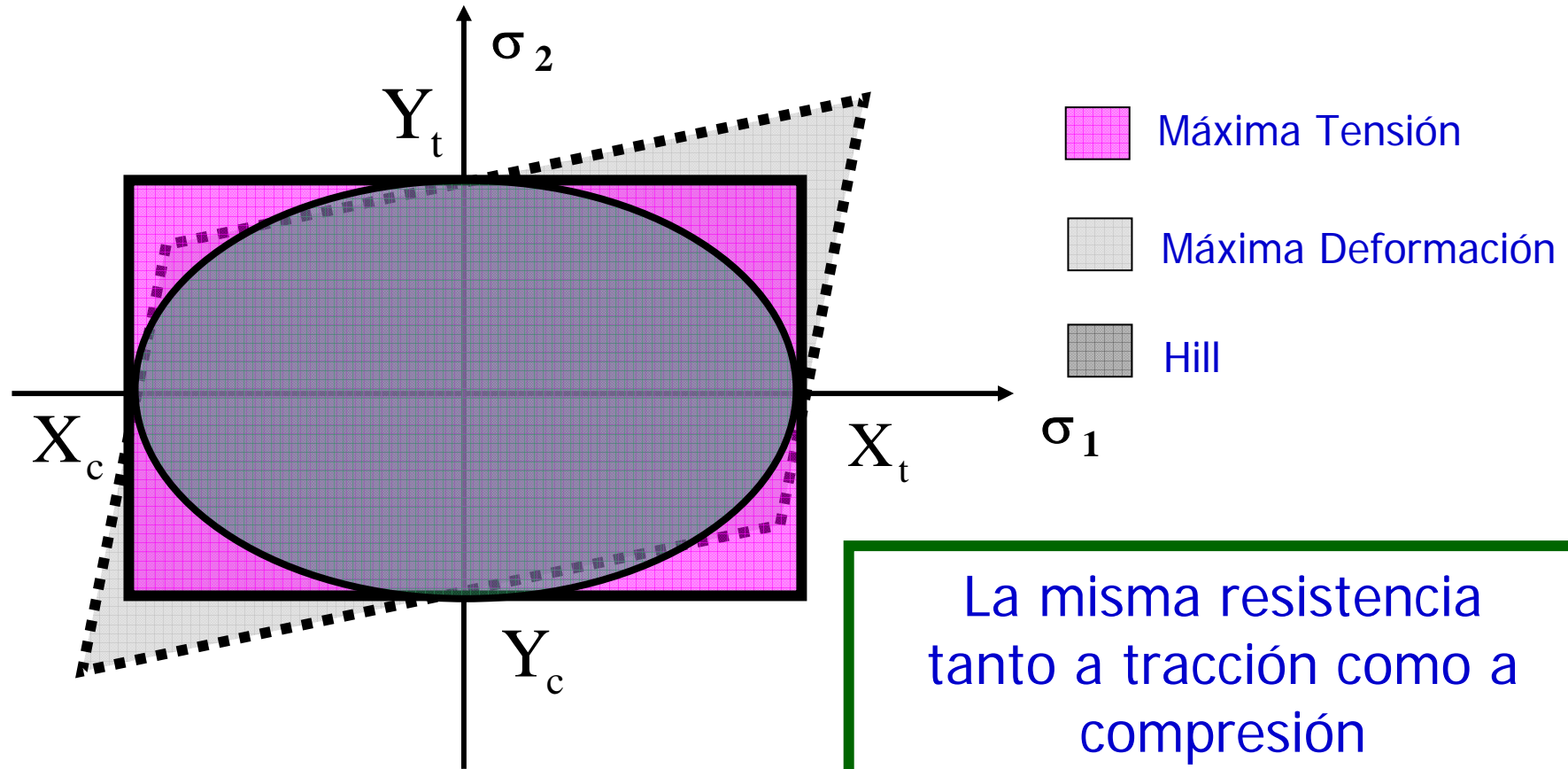
$$\sigma_2 = \sigma \cdot \sin^2 \theta$$

$$\tau_{12} = -\sigma \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta$$

$$\frac{\cos^4 \theta}{X^2} + \left( \frac{1}{S^2} - \frac{1}{X^2} \right) \cos^2 \theta \cdot \sin^2 \theta + \frac{\sin^4 \theta}{Y^2} = \frac{1}{\sigma^2}$$



## COMPARACIÓN ENTRE ENVOLVENTES DE ROTURA





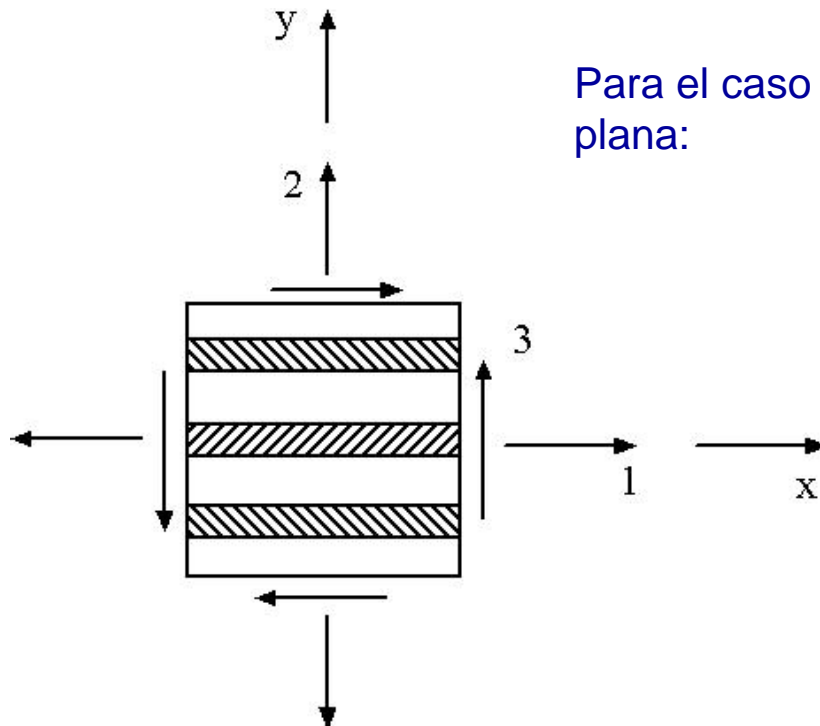
## Criterio de Tsai-Wu

Criterio de rotura polinómico (1971)

$$F_i \sigma_i + F_{ij} \sigma_i \sigma_j = 1$$

siendo  $F_i$  y  $F_{ij}$  dos tensores de orden 2 y 4 respectivamente.

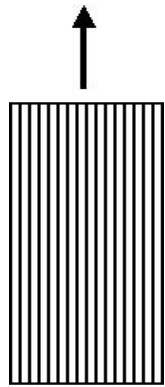
Para el caso de una lámina ortótropa trabajando en tensión plana:



$$F_1 \cdot \sigma_1 + F_2 \cdot \sigma_2 + F_6 \cdot \tau_{12} + F_{11} \cdot \sigma_1^2 + F_{22} \cdot \sigma_2^2 + F_{66} \cdot \tau_{12}^2 + 2 \cdot F_{12} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 = 1$$



## Criterio de Tsai-Wu



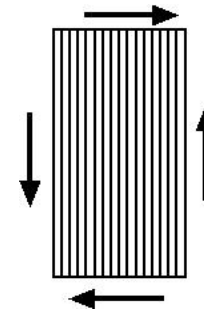
$$\sigma_1 = X$$

$$F_1\sigma_1 + F_{11}\sigma_1^2 = 1$$

$$F_1X + F_{11}X^2 = 1$$

$$F_1 = \frac{1}{X_t} + \frac{1}{X_c}$$

$$F_{11} = -\frac{1}{X_t X_c}$$



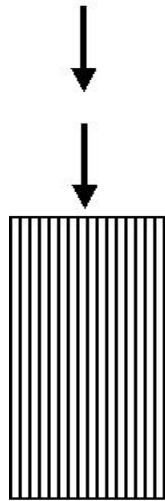
$$\tau_{12} = S$$

$$F_6\tau_{12} + F_{66}\tau_{12}^2 = 1$$

$$-F_6\tau_{12} + F_{66}\tau_{12}^2 = 1$$

$$F_6 = 0$$

$$F_{66} = \frac{1}{S^2}$$



$$\sigma_1 = -X'$$

$$F_1\sigma_1 + F_{11}\sigma_1^2 = 1$$

$$-F_1X' + F_{11}X'^2 = 1$$

Análogamente:

$$F_2 = \frac{1}{Y_t} + \frac{1}{Y_c}$$

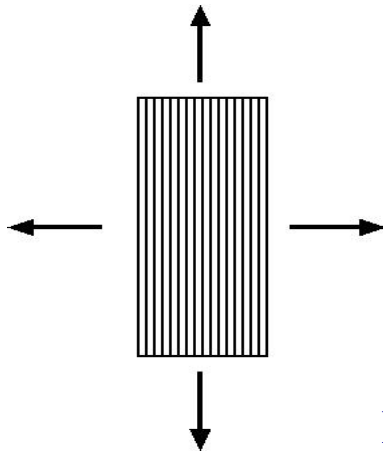
$$F_{22} = -\frac{1}{Y_t Y_c}$$



## Criterio de Tsai-Wu

¿ y  $F_{12}$ ?

a) Mediante un ensayo biaxial



$$\sigma_1 = \sigma_1^R$$

$$\sigma_2 = \sigma_2^R$$

$$F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 + F_{11}\sigma_1^2 + F_{22}\sigma_2^2 + 2F_{12}\sigma_1\sigma_2 = 1$$

$$(F_1 + F_2)\sigma + (F_{11} + F_{22} + 2F_{12})\sigma^2 = 1$$

$$F_{12} = \frac{1}{2\sigma^2} \left[ 1 - \left( \frac{1}{X_t} + \frac{1}{X_c} + \frac{1}{Y_t} + \frac{1}{Y_c} \right) \sigma + \left( \frac{1}{X_t X_c} + \frac{1}{Y_t Y_c} \right) \sigma^2 \right]$$

$$F_{12} = f(X_t \ X_c \ Y_t \ Y_c \ \sigma_{\text{rotura biaxial}})$$

¡ No es una propiedad de la lámina!



## Criterio de Tsai-Wu

### b) Por equivalencia con el criterio de Von Mises

Aplicando el criterio de Tsai-Wu como criterio de plastificación de un material metálico isótropo en ejes principales:

$$F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 + F_{11}\sigma_1^2 + F_{22}\sigma_2^2 + 2F_{12}\sigma_1\sigma_2 = 1$$

$$X_t = X_c = \sigma_e \quad F_{11} = F_{22} = \frac{1}{\sigma_e^2}$$
$$Y_t = Y_c = \sigma_e$$

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_e}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_e}\right)^2 + 2F_{12}\sigma_1\sigma_2 = 1$$





## Criterio de Tsai-Wu

Por otro lado aplicando el criterio de Von Mises:

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_e}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_e}\right)^2 - \frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma_e^2} = 1 \quad 2 \cdot F_{12} = -\frac{1}{\sigma_e^2}$$

Generalizando a un material anisótropo:

$$2 \cdot F_{12} = -\sqrt{F_{11} \cdot F_{22}}$$

$$F_{12} = F_{12}^* \cdot \sqrt{F_{11} \cdot F_{22}}$$

$$-0.5 < F_{12}^* < 0$$



## Otros criterios

### Criterio de Hahn, Erikson y Tsai

Rotura de las fibras

$$(F_{11} \cdot \sigma_1^2) + (F_1 \cdot \sigma_1) = 1$$

Rotura de la matriz

$$F_{22} \cdot \sigma_2^2 + F_{66} \cdot \tau_{12}^2 + F_{44} \cdot \tau_{13}^2 + F_{55} \cdot \tau_{23}^2 + F_2 \cdot \sigma_2 = 1$$

### Criterio de Hashin

Rotura de las fibras

$$F_{11} \cdot \sigma_1^2 + F_{66} \cdot \tau_{12}^2 + F_1 \cdot \sigma_1 = 1$$

Rotura de la matriz

$$F_{22} \cdot \sigma_2^2 + F_{66} \cdot \tau_{12}^2 + F_{44} \cdot \tau_{13}^2 + F_{55} \cdot \tau_{23}^2 + F_2 \cdot \sigma_2 = 1$$



## Criterio de Hashin (1973 y 1980)

Rotura de fibras

$$\sigma_1 > 0$$

$$\left(\frac{\sigma_1}{X_t}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}}{S}\right)^2 = 1$$

$$\sigma_1 < 0$$

$$\left(\frac{\sigma_1}{X_c}\right) = 1$$

Rotura de la matriz

$$\sigma_2 > 0$$

$$\left(\frac{\sigma_2}{Y_t}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{S}\right)^2 = 1$$

$$\sigma_2 < 0$$

$$\left(\frac{\sigma_2}{2S}\right)^2 + \left(\left(\frac{Y_c}{2S}\right)^2 - 1\right)\left(\frac{\sigma_2}{Y_c}\right) + \left(\frac{\tau_{12}}{S}\right)^2 = 1$$