



**UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID**  
**DEPARTAMENTO DE MECÁNICA DE MEDIOS CONTINUOS**  
**Y TEORÍA DE ESTRUCTURAS**

# **FOTOELASTICIDAD**

**Por Carlos Navarro**  
**Catedrático de Mecánica de medios continuos y teoría de estructuras**

## Conceptos básicos

A lo largo del texto de este guión aparecen varias palabras y conceptos que es conveniente que queden claros desde un principio, por lo que se recomienda al lector que los lea tantas veces como fuera necesario hasta estar convencido de que lo ha entendido correctamente.

**Luz polarizada:** Como se sabe la luz es una onda electromagnética (perturbación eléctrica y magnética que se propaga en el espacio y en el tiempo) de naturaleza transversal; es decir, el vector campo eléctrico  $E = A \cdot \cos(k \cdot x - \omega \cdot t)$ , es ortogonal a la dirección de propagación. En esta expresión,  $A$  es la amplitud,  $\omega$  es su pulsación y  $k$  el número de ondas ( $2 \cdot \pi / \lambda$ ). Cuando el vector  $E$  siempre se encuentra en el mismo plano se habla de **Luz polarizada linealmente**. Si el extremo del vector  $E$  va describiendo, a medida que avanza el tiempo y la luz se propaga, una circunferencia se tiene la **Luz polarizada circularmente**. De manera análoga se puede describir la luz **polarizada elípticamente** cuando el extremo del vector  $E$  describe una elipse.

**Luz monocromática:** Luz de una sola longitud de onda (un solo color)

**Polarizador y analizador:** Láminas delgadas que convierten la luz sin polarizar en luz polarizada linealmente según una dirección que se denomina eje del polarizador o analizador, respectivamente.

**Lámina cuarto de onda:** Es una lámina de un material apropiado, y dimensionada de tal forma que, al incidir sobre ella un rayo de luz emergen de ella dos rayos (el rayo ordinario y el rayo extraordinario) paralelos al rayo incidente y superpuestos, polarizados según dos direcciones ortogonales entre sí de manera que uno (polarizado según el denominado eje lento de la lámina cuarto de onda) lleva un desfase respecto al otro (que está polarizado según el eje rápido de la lámina) de  $\lambda / 4$ , lo que equivale a un desfase angular de  $\pi / 2$ . Es decir, si el rayo correspondiente al eje rápido fuera  $E = A \cdot \cos t$ , el rayo correspondiente al eje lento sería:  $E' = A' \cdot \cos (t - \pi / 2)$ .

**INTRODUCCION:** La velocidad de la luz depende de las características ópticas del medio por el que se propaga. Normalmente, la velocidad de la luz en un medio material se suele relacionar con la que tiene en un medio de referencia (el vacío, normalmente). El *índice de refracción*, que mide la anterior relación entre las velocidades, se define como el cociente entre la velocidad de propagación de la luz en el vacío (300.000 km/s) y la velocidad en el medio material que se considera. Un medio material se define como ópticamente homogéneo e isotrópico cuando su índice de refracción es el mismo en cualquier punto del sólido y, además, su valor es independiente de la dirección del rayo luminoso que lo ilumina. Algunos materiales exhiben una curiosa propiedad denominada *doble refracción o birrefringencia*. En este tipo de materiales, el índice de refracción, depende de la orientación relativa del vector campo eléctrico respecto del material considerado. Existen materiales no cristalinos, tales como resinas sintéticas, baquelita, etc., que cuando están libres de tensión presentan propiedades ópticas de carácter isotrópico; es decir, el índice de refracción  $n_0$  ( $n_0=c/v$ , donde  $c$  es la velocidad de propagación de la luz en el vacío y  $v$  es la velocidad de propagación en el medio considerado) es independiente de cualquiera que sea la dirección considerada dentro del medio material. Sin embargo, cuando los citados materiales se encuentran sometidos a un estado tensional se vuelven anisótropos, presentando un índice de refracción que depende de cual sea la dirección considerada. Si suponemos que el estado de tensión en un punto del material viene representado por los valores de sus tensiones principales  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , los correspondientes índices de refracción, para cada una de las direcciones principales, vienen dados por lo que se conocen como leyes de Maxwell:

$$n_1 - n_0 = p \sigma_1 + q (\sigma_2 + \sigma_3)$$

$$n_2 - n_0 = p \sigma_2 + q (\sigma_1 + \sigma_3)$$

$$n_3 - n_0 = p \sigma_3 + q (\sigma_2 + \sigma_1)$$

Cuando  $\sigma_3=0$  (estado de tensión plana) las expresiones anteriores se reducen, pudiéndose poner la primera de ellas como:

$$n_1 - n_2 = C (\sigma_1 - \sigma_2)$$

siendo  $C$  es una constante del material que recibe el nombre de *constante fotoelástica del medio* en cuestión, que se determina de manera experimental y que depende de la longitud de onda de la luz incidente así como también de la temperatura. La ecuación anterior se conoce como la ley de Brewster y constituye la relación básica de la fotoelasticidad.

Antes de continuar es interesante conocer que Sir David Brewster (1781-1868) era profesor de física en la universidad de St. Andrews (Escocia) y a él debemos, además de

la importantísima contribución anterior, una invención que la mayoría de nosotros, alguna vez, hemos disfrutado: el caleidoscopio.

De acuerdo con la teoría electromagnética de Maxwell, las ondas electromagnéticas -ver tabla 1 para el denominado espectro visible-, consisten en dos perturbaciones (un campo eléctrico y otro magnético ortogonales entre si) cuyos vectores representativos son ortogonales a la dirección de propagación, tal como se indica en la figura 1.

TABLA 1

LUZ o ESPETRO VISIBLE:  $3,8 \times 10^{-7} \text{ m} < \lambda < 7,8 \times 10^{-7} \text{ m}$   
 $4 \times 10^{14} \text{ Hz} < f < 8 \times 10^{14} \text{ Hz}$

COLOR	$\lambda$ ( $\times 10^{-7}$ m)
Violeta	3,9-4,55
Azul	4,55-4,92
Verde	4,92-5,77
Amarillo	5,77-5,97
Naranja	5,97-6,22
Rojo	6,22-7,80

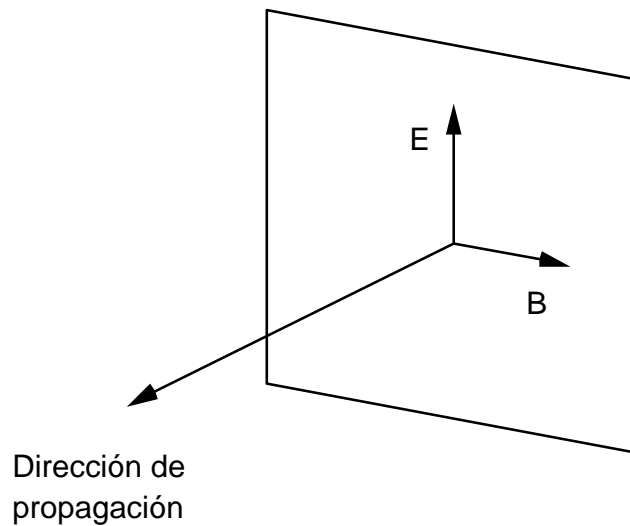


Figura 1

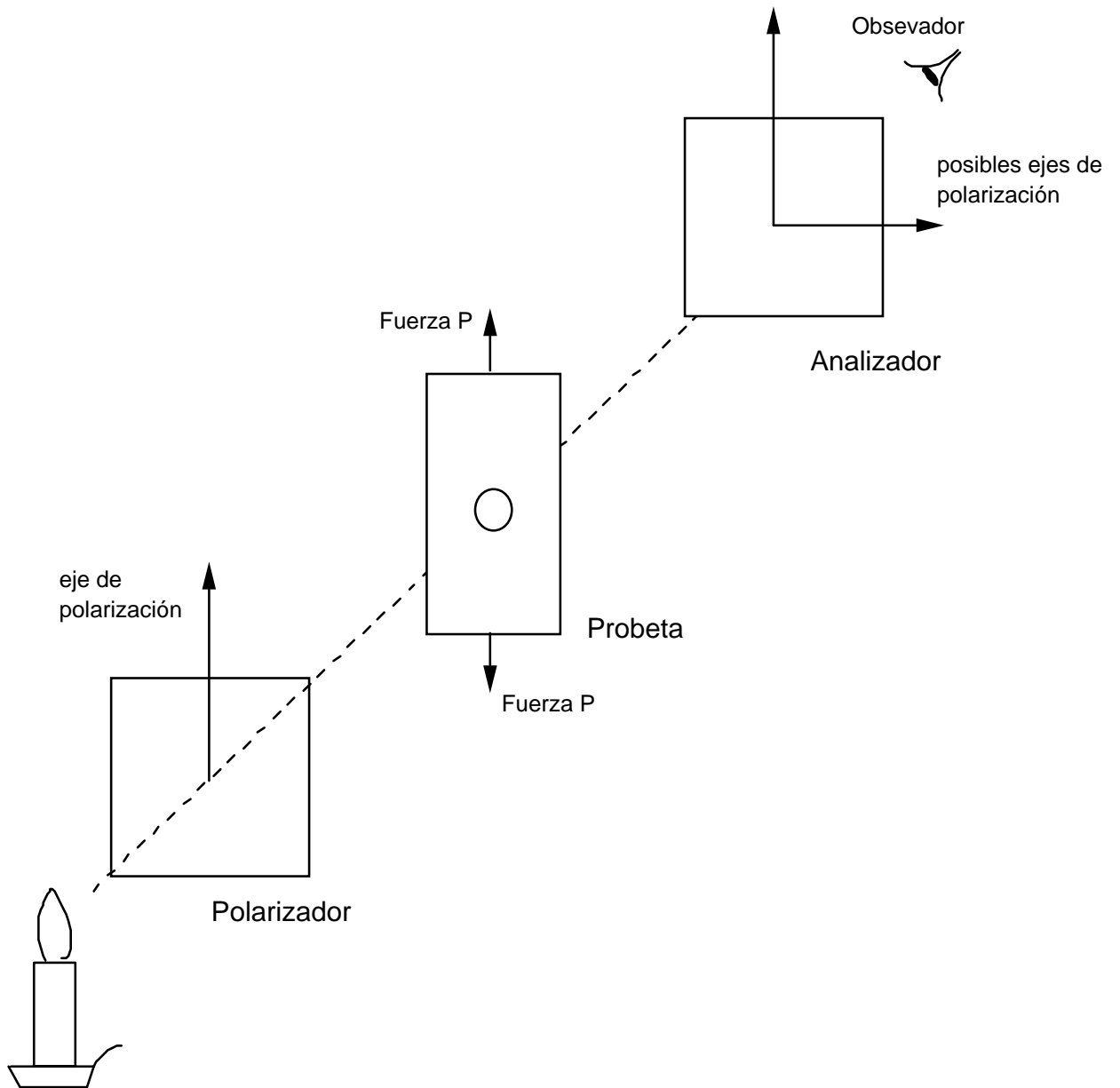
El vector campo eléctrico  $\mathbf{E} = A \cos(kx - \omega t)$ , donde  $x$  es la abscisa según la dirección de propagación,  $A$  es la amplitud,  $\omega$  es la pulsación de la onda ( $=2\pi f$ , siendo  $f$  la frecuencia de la onda) y  $k$  el número de ondas ( $=2\pi/\lambda$ , siendo  $\lambda$  la longitud de onda), es ortogonal a la dirección de propagación. En general (**luz no polarizada**) la dirección de  $\mathbf{E}$  cambia en un punto considerado a lo largo del tiempo. Si la luz se encuentra **polarizada linealmente** el vector  $\mathbf{E}$  siempre se encuentra contenido en el mismo plano. Si la luz se encuentra **polarizada circularmente**, el extremo del vector  $\mathbf{E}$  va describiendo, a medida que avanza el tiempo y la luz se propaga, una circunferencia. De manera análoga se puede describir la luz **polarizada elípticamente** cuando el extremo del vector  $\mathbf{E}$  describe una elipse. Para familiarizar al lector con la terminología que aparecerá, se denomina **Polarizador y Analizador** a unas láminas delgadas que convierten la luz sin polarizar en luz polarizada linealmente según una dirección que se denomina eje del polarizador o analizador, respectivamente.

Antes de continuar con los desarrollos matemáticos que se avecinan, que resultan algo pesados, es interesante conocer el siguiente anecdótico: la primera hoja polaroid, cuyo nombre ya orienta acerca de su uso, fue inventada en 1928 por Edwin H. Land teniendo 19 años y siendo aún estudiante. Esta hoja incorporaba una sustancia denominada herapatita (luego veremos el origen de este nombre) o peryoduro sulfatado de quinina. Land se apoyó en las observaciones de un físico de Bristol (Inglaterra) llamado William B. Herapath (de ahí el nombre de herapatita) que aprovechó las observaciones de un tal Mister Phelps, que era alumno suyo, y que consistían en lo siguiente: dicho señor había observado que cuando echaba yodo a la orina de un perro, al que se había incorporado a su dieta quinina, se formaban unos cristalitos de color verde; los cristales así formados, y superpuestos unos a otros, fueron analizados al microscopio por el Dr. Herapath quien observó que existían zonas en las que la luz atravesaba la capa de cristales y otras zonas se encontraban a oscuras. De esta manera tan rocambolesca fue como se descubrió este nuevo material polarizador.

Los instrumentos que se utilizan en las técnicas fotoelásticas son los *polariscopios*. Los hay de dos tipos: el *polariscopio plano* y el *polariscopio circular*. Aunque la práctica que acompaña a esta lección corresponde al uso del segundo tipo de polariscopio es conveniente, a efectos didácticos, analizar el funcionamiento del primero de ellos.

## FUNDAMENTO TEORICO DEL METODO DE LA FOTOELASTICIDAD Y DEL POLARISCOPIO PLANO

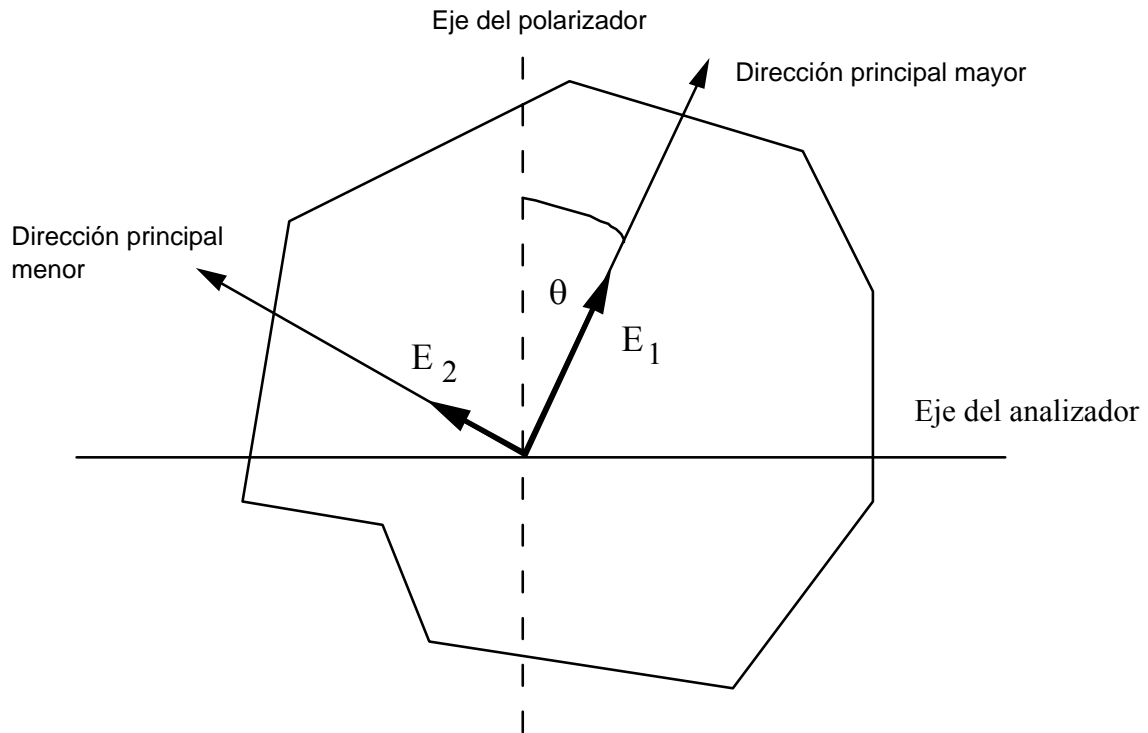
Veamos el funcionamiento del **polariscopio plano**. Consideremos el esquema que se muestra en la figura 2:



**FIGURA 2**

La luz que produce un foco luminoso (luz no polarizada) atraviesa un polarizador que la polariza linealmente. El campo eléctrico de la luz polarizada puede ponerse como:

$\mathbf{E}=A \cos \omega t$ . Al atravesar dicha onda luminosa la probeta, se descompondrá de acuerdo a las direcciones principales de la misma (ver figura 3).



**FIGURA 3**

Las dos vibraciones que llegan al modelo ( $\mathbf{E}_1=A \cos \theta \cdot \cos \omega t$  y  $\mathbf{E}_2=A \sin \theta \cdot \cos \omega t$ ) lo atraviesan sufriendo una un retraso respecto de la otra. Si llamamos  $e$  al espesor del modelo, el tiempo  $t_1$  que necesita la componente de  $\mathbf{E}$  paralela al eje principal mayor es:

$$t_1 = \frac{e}{v_1}$$

donde  $v_1$  es la velocidad a la que se propaga esta componente dentro del modelo. De igual manera, el tiempo  $t_2$  que necesita la componente de  $\mathbf{E}$  paralela al eje principal menor es:

$$t_2 = \frac{e}{v_2}$$

donde  $v_2$  representa la velocidad a la que se propaga esta componente. El desfase entre ambas componentes, una vez que han atravesado el modelo será:

$$\omega(t_1 - t_2)$$

y las componentes según los ejes principales mayor y menor serán, respectivamente:

$$E_1' = A \cos \omega(t - t_1) \cos \theta$$

$$E_2' = A \cos \omega(t - t_2) \sin \theta$$

Proyectando estas componentes sobre el eje del analizador (que se supone ortogonal al del polarizador) se obtienen las siguientes componentes sobre dicho eje:

$$E_1'' = E_1' \sin \theta = \frac{A}{2} \cos \omega(t - t_1) \cdot \sin 2\theta$$

$$E_2'' = E_2' \cos \theta = \frac{A}{2} \cos \omega(t - t_2) \cdot \sin 2\theta$$

La composición de estas dos vibraciones proporciona una perturbación total, según el eje del analizador, dada por:

$$\begin{aligned} & \frac{A}{2} \sin 2\theta \cdot [\cos \omega(t - t_1) - \cos \omega(t - t_2)] = \\ & = A \sin 2\theta \cdot \sin \omega \frac{t_1 - t_2}{2} \cdot \sin \omega \left( t - \frac{t_1 + t_2}{2} \right) \end{aligned}$$

que representa una perturbación de la misma pulsación (frecuencia) que la del rayo incidente y cuya amplitud  $B$  vale:

$$B = A \sin 2\theta \cdot \sin \omega \frac{t_1 - t_2}{2} \quad \text{Ec. (1)}$$

$B$  es máxima cuando:

$$\omega \frac{t_1 - t_2}{2} = \frac{2n + 1}{2} \pi$$

siendo  $n$  un número entero, y es nula cuando:

$$\omega \frac{t_1 - t_2}{2} = n\pi$$

pero:

$$\omega \frac{t_1 - t_2}{2} = \frac{\omega e}{2c} (n_1 - n_2)$$

siendo, en este caso,  $c$  la velocidad de la luz en el aire.

Utilizando la ley de Brewster:

$$\frac{\omega(t_1 - t_2)}{2} = \frac{\pi e}{\lambda} C(\sigma_1 - \sigma_2) \begin{cases} \text{Interf. construct.: } \frac{eC}{\lambda}(\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{2n + 1}{2} \\ \text{Interf. destruct.: } \frac{eC}{\lambda}(\sigma_1 - \sigma_2) = n \end{cases}$$

Introduciendo una nueva constante ( $F = \text{valor de franja} = \lambda C$ ) la interferencia destructiva (franja negra en la pantalla de observación) se produce cuando:

$$(\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{nF}{e}$$

que se conoce como la fórmula fundamental de la fotoelasticidad. El valor de  $n$  puede calcularse en cada punto contando el número de mínimos que se producen al aplicar la carga al modelo. Nótese que la ecuación (1) también se hace nula cuando

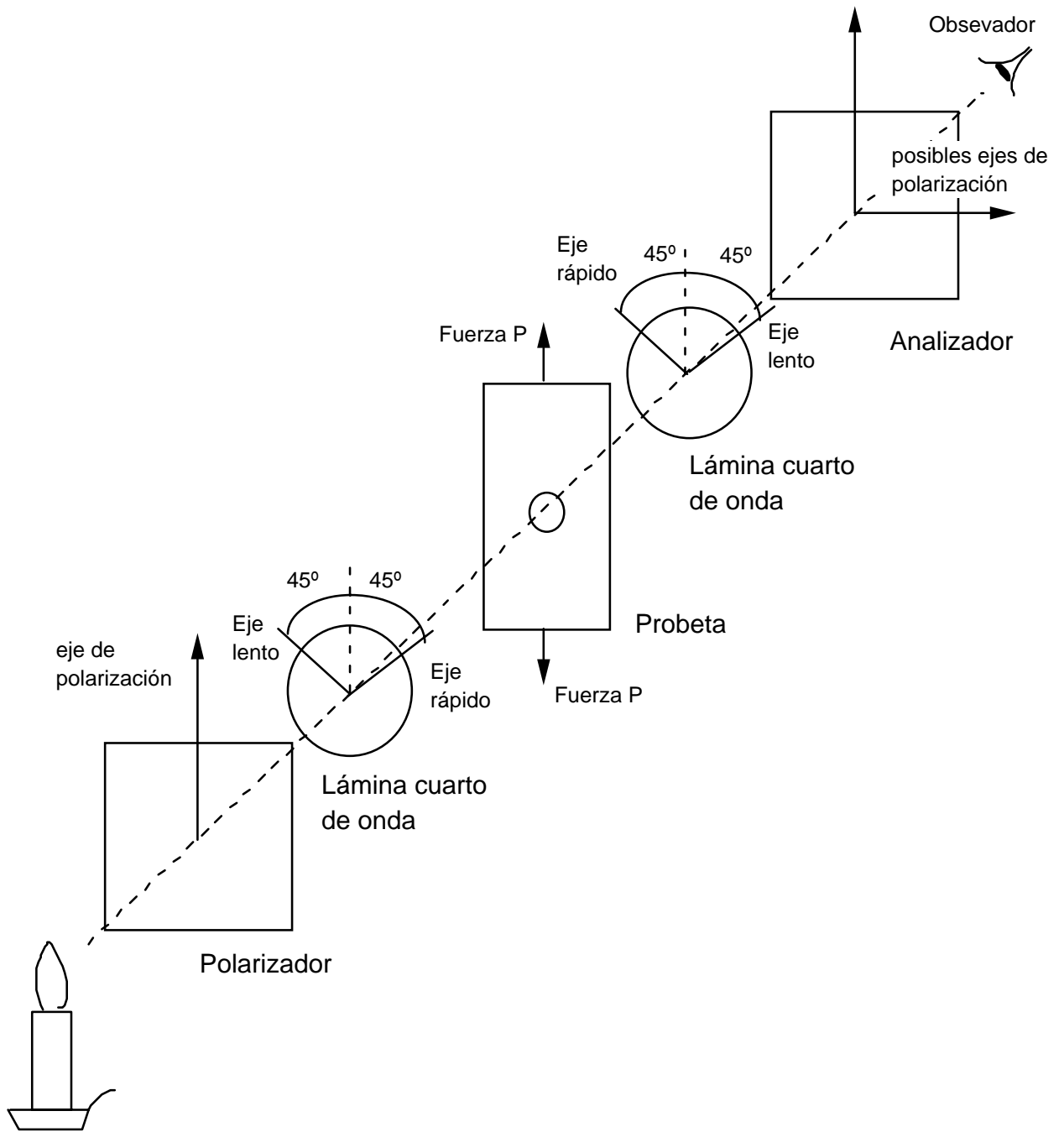


$\text{sen}2\theta = 0 \Rightarrow \theta = n\frac{\pi}{2} \quad n = 0,1,2,3,\dots$  que representan aquellos puntos en los que las direcciones principales son coincidentes con los ejes de polarización del polarizador y del analizador. Usando este polariscopio se obtiene una superposición de isocromáticas y de isoclinas.

### **FUNDAMENTO TEORICO DEL METODO DEL POLARISCOPIO CIRCULAR**

Su funcionamiento es el siguiente (ver figura 4): la luz producida en un foco luminoso se polariza a través de un polarizador lineal cuyo eje de polarización lo hemos dibujado vertical. La luz linealmente polarizada incide sobre una lámina cuarto de onda cuyos ejes rápido y lento forman  $45^\circ$  con el eje del polarizador. Una **Lámina cuarto de onda** es una lámina de un material apropiado, y dimensionada de tal forma que, al incidir sobre ella un rayo de luz emergen de ella dos rayos (el rayo ordinario y el rayo extraordinario) paralelos al rayo incidente y superpuestos, polarizados según dos direcciones ortogonales entre sí de manera que uno (polarizado según el denominado eje lento de la lámina cuarto de onda) lleva un desfase respecto al otro (que está polarizado según el eje rápido de la lámina) de  $\lambda/4$ , lo que equivale a un desfase angular de  $\pi/2$ . Es decir, si el rayo correspondiente al eje rápido fuera  $\mathbf{E} = A \cos \omega t$ , el rayo correspondiente al eje lento sería:  $\mathbf{E}' = A' \cos (\omega t - \pi/2)$ .

La luz emergente, que queda polarizada circularmente como se demostrará con posterioridad, atraviesa el modelo cargado, incidiendo sobre otra nueva lámina cuarto de onda, cuyos ejes son paralelos a los de la lámina cuarto de onda previa pero intercambiados de posición, para luego incidir sobre lo que se denomina analizador y que vuelve a ser otro polarizador lineal. El eje de polarización del analizador puede ser colocado paralelo u ortogonal al eje del primer polarizador. Los efectos de esto último serán analizados más tarde.



**FIGURA 4**

Volviendo a la pesadez de los cálculo matemáticos: sea  $\mathbf{E} = A \cos \omega t$  el campo eléctrico tras atravesar la luz el polarizador. Al incidir sobre la primera lámina cuarto de onda este vector se descompondría en otros dos: uno en la dirección del eje rápido ( $\mathbf{E}_r = A/\sqrt{2} \cos \omega t$ ) y otro en la dirección del eje lento ( $\mathbf{E}_l = A/\sqrt{2} \cos \omega t$ ). Este último, al atravesar la

lámina cuarto de onda, sufre un desfase de  $\pi/2$  respecto al primero, por lo que los dos rayos emergentes de la primera lámina cuarto de onda serán:

$$\mathbf{E}_r = A/\sqrt{2} \cos \omega t$$

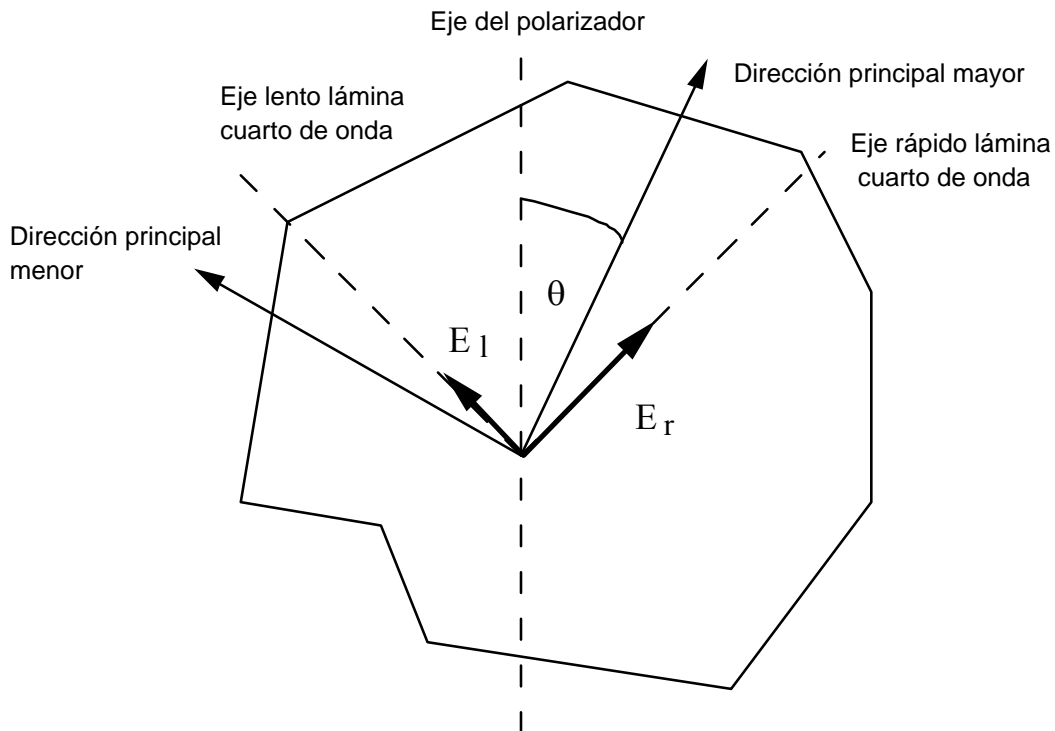
$$\mathbf{E}_1 = A/\sqrt{2} \cos (\omega t - \pi/2) = A/\sqrt{2} \sin \omega t$$

El extremo del vector campo eléctrico resultante describirá, a lo largo del tiempo, un círculo por lo que la luz que emerge se dice que está polarizada circularmente. Al atravesar el modelo cargado debemos calcular las nuevas componentes del campo eléctrico según la direcciones principales de tensión (se supone que el eje correspondiente a la tensión principal mayor forma un ángulo de  $\theta$  con el eje del polarizador, tal como se indica en la figura de la página siguiente).

Los valores de las componentes del campo eléctrico sobre los ejes principales mayor y menor ( $\mathbf{E}_1$  y  $\mathbf{E}_2$ , respectivamente) vendrán dadas (ver figura 5) por:

$$\mathbf{E}_1 = A/\sqrt{2} \cos (\omega t + \theta - \pi/4)$$

$$\mathbf{E}_2 = A/\sqrt{2} \sin (\omega t + \theta - \pi/4)$$



**FIGURA 5**

Cada una de estas dos componentes se propagan en el medio material a velocidades diferentes, pues éste se encuentra sometido a un estado tensional y, por tanto, presenta diferentes índices de refracción según cada dirección. Si llamamos  $e$  al espesor del modelo, que se supone constante, y  $v_1$  y  $v_2$  a las velocidades de propagación de las dos componentes consideradas, el nuevo desfase ( $\Phi$ ), que la interposición física del modelo introduce, resultará:

$$\Phi = \omega (e/v_1 - e/v_2) = 2 \pi e C (\sigma_1 - \sigma_2) / \lambda$$

Por lo que las componentes que emergen del modelo son:

$$\mathbf{E}_1 = A/\sqrt{2} \cos (\omega t + \theta - \pi/4)$$

$$\mathbf{E}_2 = A/\sqrt{2} \sin (\omega t + \theta - \pi/4 - \Phi)$$

Sobre la siguiente lámina cuarto de onda, las componentes que incidirían según el eje rápido y lento (no olvidar que están cruzados respecto a los ejes de la primera lámina cuarto de onda) son:

$$\mathbf{E}'_r = A/\sqrt{2} (\cos (\omega t + \theta - \pi/4) \cdot \sin (\pi/4 - \theta) + \sin (\omega t + \theta - \pi/4 - \Phi) \cdot \cos (\pi/4 - \theta))$$

$$\mathbf{E}'_l = A/\sqrt{2} (\cos (\omega t + \theta - \pi/4) \cdot \cos (\pi/4 - \theta) - \sin (\omega t + \theta - \pi/4 - \Phi) \cdot \sin (\pi/4 - \theta))$$

Como la componente  $\mathbf{E}'_l$  sufre un desfase de  $\pi/2$  al atravesar la segunda lámina cuarto de onda, las componentes emergentes serán:

$$\mathbf{E}'_r = A/\sqrt{2} (\cos (\omega t + \theta - \pi/4) \cdot \sin (\pi/4 - \theta) + \sin (\omega t + \theta - \pi/4 - \Phi) \cdot \cos (\pi/4 - \theta))$$

$$\mathbf{E}'_l = A/\sqrt{2} (\sin (\omega t + \theta - \pi/4) \cdot \cos (\pi/4 - \theta) + \cos (\omega t + \theta - \pi/4 - \Phi) \cdot \sin (\pi/4 - \theta))$$

- Si el eje del analizador fuera ortogonal al del polarizador, el campo eléctrico que podría ser finalmente observado sería:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}'_l \cos \pi/4 - \mathbf{E}'_r \cos \pi/4 = A \sin (\Phi/2) \cdot \sin (\omega t + 2\theta - \Phi/2)$$

por lo que se producirán franjas oscuras (interferencia destructiva) cuando  $\sin (\Phi/2) = 0$ ; es decir, cuando  $\Phi/2 = n\pi$  ( $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ). Como  $\Phi$  depende de la diferencia entre los valores de las tensiones principales, la ecuación anterior definirá las isocromáticas  $\sigma_1 - \sigma_2 = n \lambda / (e C)$ , donde  $\lambda / (e C)$  es constante.

- Si el eje del analizador fuera paralelo al del polarizador, el campo eléctrico que podría ser observado resultaría ser:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}'_l \cos \pi/4 + \mathbf{E}'_r \cos \pi/4 = A \cos (\Phi/2) \cdot \sin (\omega t - \Phi/2)$$

por lo que se producirán franjas oscuras (interferencia destructiva) cuando  $\cos (\Phi/2) = 0$ ; es decir, cuando  $\Phi/2 = (2n+1) \pi$  ( $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ). Al igual que anteriormente sucedió, la ecuación anterior definirá las isocromáticas  $\sigma_1 - \sigma_2 = (2n+1) \lambda / (e C)$ , donde  $\lambda / (e C)$  es constante.