ANEXO A

EL CÍRCULO DE MOHR: APLICACIÓN A SITUACIONES BIDIMENSIONALES

A.1. DESARROLLO DEL CÍRCULO DE MOHR

Supongamos el sólido de la figura sometido a un estado tensional plano ($\sigma_z=\tau_{zx}=\tau_{zy}=0$). Sea P un punto elástico (Punto geométrico más un entorno material de forma paralelepipédica de lados infinitesimales) de su interior. Su estado tensional vendrá definido por las tensiones σ_x, σ_y y τ_{xy} tal como se representa en la figura.

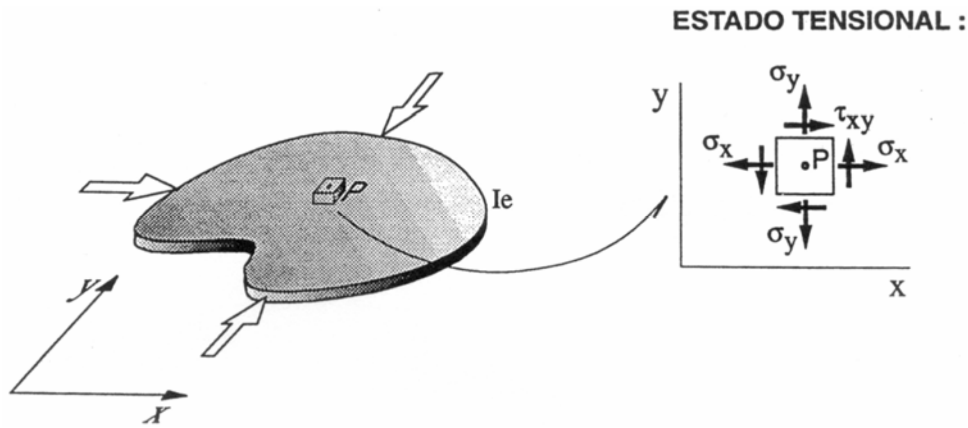

Figura A.1

El criterio de signos para estas tensiones que se adopta es el siguiente:

Tensiones normales: positivas si son de tracción y negativas si fueran de compresión.

Tensiones tangenciales:

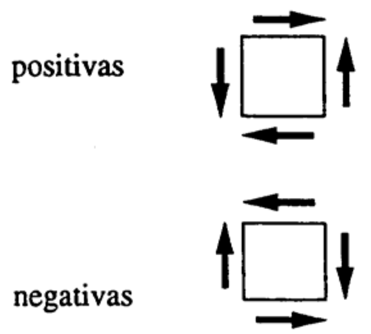

Figura A.2

Supongamos que deseáramos determinar las tensiones en una dirección cualquiera como la definida en la figura mediante el ángulo θ:

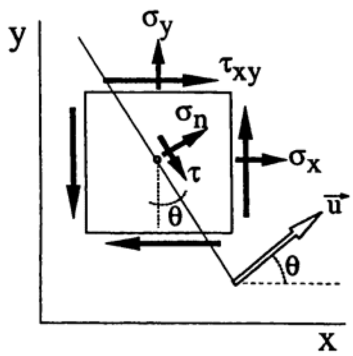

Figura A.3

Antes de continuar, conviene dejar claro que, los signos de las tensiones actuantes sobre el plano considerado, son las siguientes:

- La tensión normal será positiva si es de tracción

- La tensión tangencial es positiva si desde el centro del punto elástico produjera un giro en sentido horario, tal como se indica en la figura siguiente.

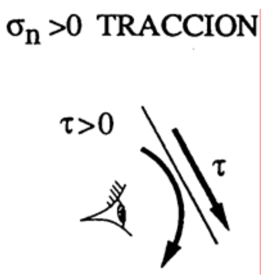

Figura A.4

Las componentes del vector tensión actuante $\vec{\sigma}'$ sobre el plano considerado, así como sus componentes normal y tangencial, pueden calcularse como sigue:

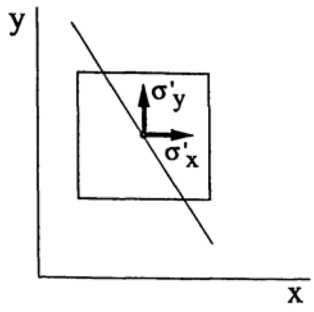

Figura A.5

$$\begin{pmatrix} \sigma_x' \\ \\ \sigma_y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\ \theta \\ \\ sen\ \theta \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_x \cos^2 \theta + \tau_{xy} sen 2\theta + \sigma_y sen^2 \theta \\ \tau &= \frac{\sigma_x}{2} sen 2\theta - \frac{\sigma_y}{2} sen 2\theta - \tau_{xy} \cos 2\theta \end{aligned}\right\} Ecs.(1)$$

Las Ecs. (1) pueden ponerse como:

$$\left.\begin{aligned} \left[\sigma_n - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right]^2 &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} sen 2\theta \\ \tau &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} sen 2\theta - \tau_{xy} \cos 2\theta \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Operando se obtiene:

$$\left[\sigma_n - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right]^2 + \tau^2 = \underbrace{\frac{1}{4}\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + \tau_{xy}^2}_{\text{¡ Independiente de } \vartheta \text{ !}} \tag{3}$$

que corresponde a la ecuación de una circunferencia de centro

$$(\sigma_x + \sigma_y)/2 \tag{4}$$

y radio

$$\sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{5}$$

respecto a unos ejes en los que en el de abcisas se llevaran los valores de σ y en el de ordenadas los de τ. El plano así definido se denomina plano de Mohr y, la circunferencia anterior se denomina círculo (no circunferencia) de Mohr.

Realizando la construcción gráfica anterior se observa que existe una correspondencia biunívoca entre cada dirección y un punto del círculo de Mohr: a cada dirección que pasa por las proximidades del punto P le corresponde un punto del círculo de Mohr cuya abcisa es la componente normal del vector tensión que actúa sobre la dirección considerada y cuya ordenada es la componente tangencial de dicho vector tensión.

Se podría demostrar que, para pasar del punto representativo de la dirección paralela al eje y (tensiones actuantes: σ_x y τ_{xy}) al punto representativo de la dirección que forma un ángulo θ en sentido antihorario con dicho eje, bastaría con girar el radio vector que une el centro del círculo de Mohr con el punto representativo del eje y un ángulo doble del que en la realidad forman las dos direcciones consideradas y en el mismo sentido, tal como se aprecia en la figura.

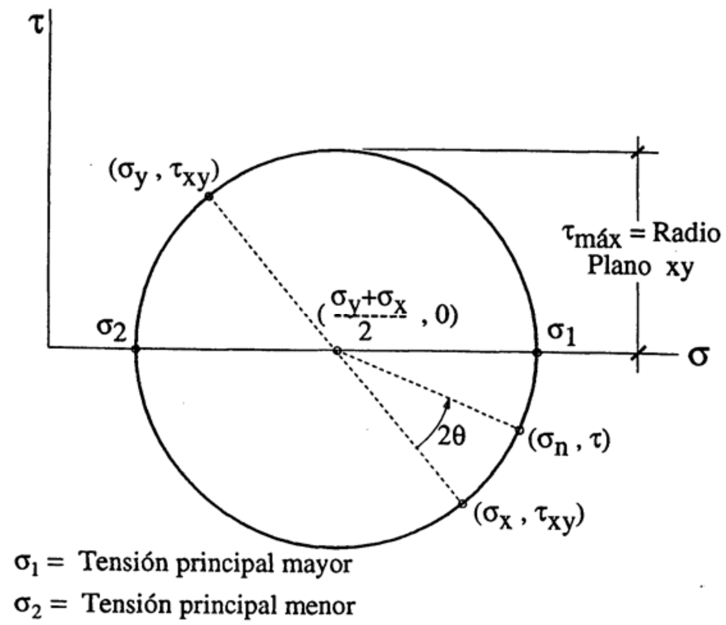

Figura A.6

σ_1 = Tensión principal mayor

σ_2 = Tensión principal menor

A.2. PROPIEDADES CÍRCULO DE MOHR

a) La primera propiedad es la que acabamos de describir y que, esquemáticamente se representa en la figura.

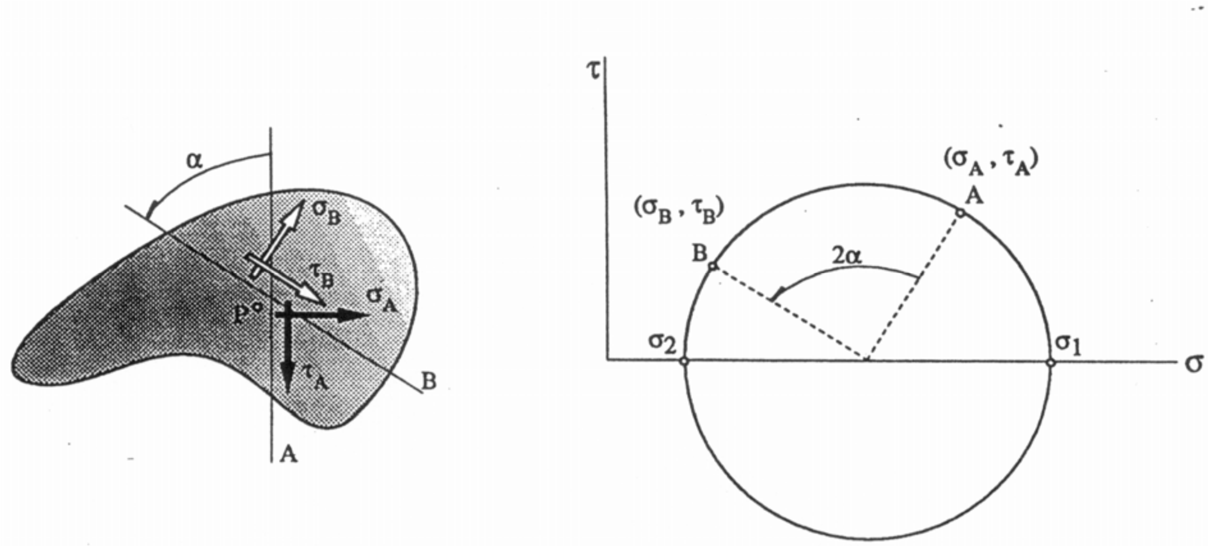

Figura A.7

b) Polo del círculo de Mohr: Existe un punto del círculo de Mohr denominado polo tal que, trazando por él una paralela a una dirección cualquiera intersecta al círculo en el punto correspondiente a esta dirección.

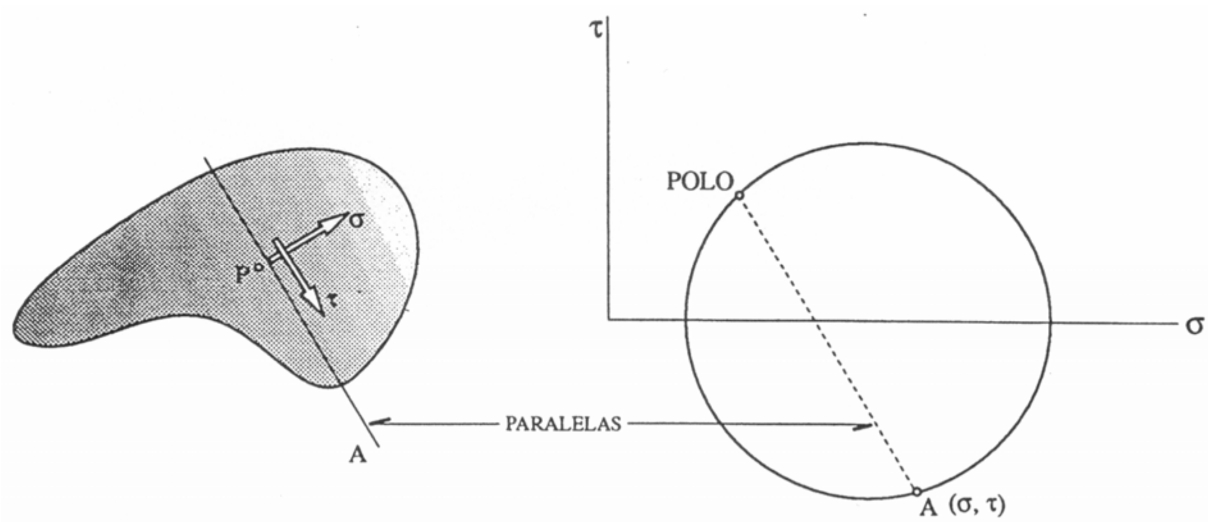

Figura A.8

Obtención del polo: El polo se obtiene de la manera siguiente: conociendo el estado tensional y los puntos representativos de las direcciones consideradas bastaría con trazar paralelas a dichas direcciones que se cortarían en el polo, tal como se representa en la figura siguiente.

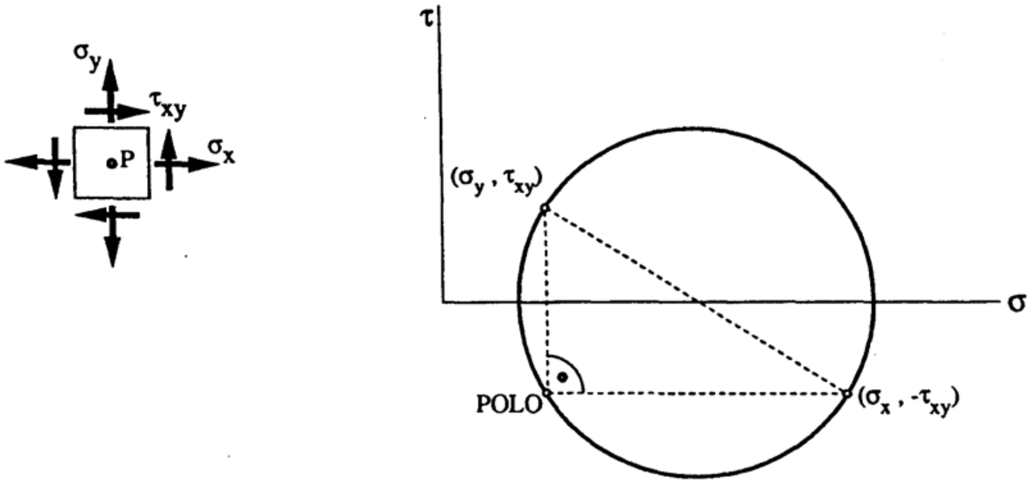

Figura A.9