CAPÍTULO 2

ASPECTOS MICROMECANICOS DE LOS MATERIALES COMPUESTOS

2.1. INTRODUCCIÓN

En este apartado se va a analizar el comportamiento mecánico de los materiales compuestos en función de las propiedades de sus constituyentes, en concreto nos centraremos en los materiales de tipo laminado. La unidad básica de un material de este tipo se denomina *lámina* (ver Figura 2.1), en la que el refuerzo puede ser mediante fibras largas paralelas (*lámina unidireccional*) o mediante un tejido que se obtendría entrelazando las fibras (*lámina bidireccional*), o bien tener una configuración de fibras cortas. Los espesores típicos de una lámina están comprendidos entre una décima de milímetro y un milímetro.

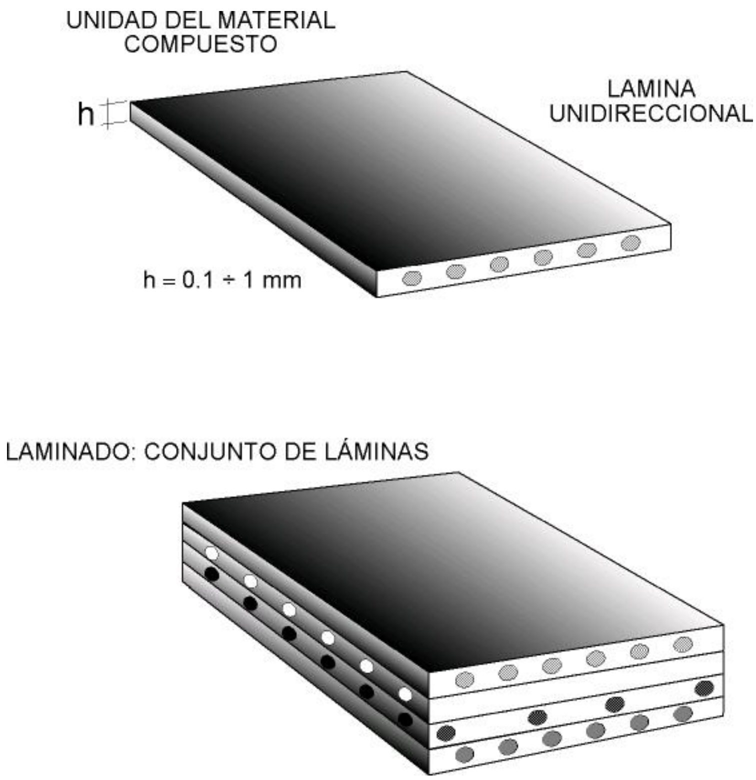


Figura 2.1.

Se reservará el nombre de *laminado* a un conjunto de láminas, apiladas unas sobre otras (ver Figura 2.1), y entre las que existe continuidad de la matriz entre ellas en la dirección perpendicular al laminado. Nótese que, cada lámina, puede tener sus fibras con una orientación distinta a la del resto de las otras. Como quiera que las fibras de un material compuesto son las que más contribuyen a soportar los esfuerzos a que se encuentre sometido la pieza fabricada, la posibilidad de apilar láminas en las que las direcciones de las fibras vayan cambiando posibilita al ingeniero realizar un diseño óptimo del material compuesto.

2.2. MICROMECÁNICA DE MATERIALES DE FIBRA LARGA

2.2.1 PORCENTAJES DE FIBRA Y MATRIZ

Previamente a la obtención de las propiedades de una lámina conviene establecer una definición más precisa de los parámetros relativos a los contenidos de fibra y matriz. Así, se define como contenido másico de refuerzo, M_f de una lámina a:

$$M_f = \frac{masa\ de\ fibras}{masa\ total} \qquad [2.1]$$

Denominando M_m al contenido másico de matriz, que se definiría como:

$$M_m = \frac{masa\ de\ matriz}{masa\ total} \qquad [2.2]$$

se tendría que:

$$M_f + M_m = 1 \qquad [2.3]$$

Un parámetro de definición del material compuesto, que se utiliza ampliamente, es el contenido volumétrico de refuerzo, V_f de la lámina, que se define como

$$V_f = \frac{volumen\ de\ fibras}{volumen\ total} \qquad [2.4]$$

Denominando V_m al contenido volumétrico de matriz de la lámina, definido como

$$V_m = \frac{volumen\ de\ matriz}{volumen\ total} \qquad [2.5]$$

se tendría que

$$V_f + V_m = 1 \qquad [2.6]$$

Los contenidos volumétricos de fibras más usuales que se obtienen en los materiales compuestos dependen de su sistema de procesado. En la Tabla 2.1 se resumen algunos valores típicos de este parámetro en función del tipo de proceso:

PROCESO DE FABRICACIÓN	V_f (%)
Por contacto	30
Por presión	40
Por enrollamiento continuo (filament winding)	60-85
Por bolsa de vacío	50-80

Tabla 2.1. Propiedades físicas de diversos materiales.

Los contenidos volumétricos de fibra que posee una lámina también pueden determinarse a partir de la arquitectura del refuerzo. Así, por ejemplo, para unas estructuras de refuerzo hexagonal o cuadrado, como se indican en la figura 2.2, se obtiene, respectivamente

$$V_f = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\left(\frac{r}{R}\right)^2 \quad \text{(hexagonal)} \qquad [2.7]$$

$$V_f = \frac{\pi}{4}\left(\frac{r}{R}\right)^2 \quad \text{(cuadrado)} \qquad [2.8]$$

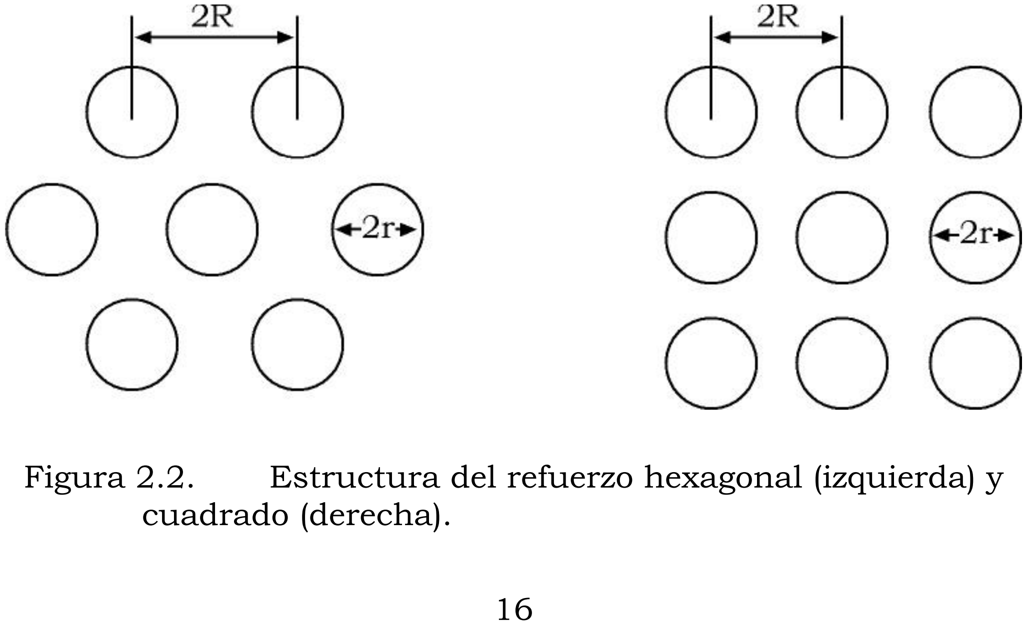


Figura 2.2. Estructura del refuerzo hexagonal (izquierda) y cuadrado (derecha).

2.2.2 DENSIDAD DE LA LÁMINA

La densidad de la lámina ρ puede determinarse a partir de las densidades y porcentajes volumétricos de los constituyentes, resultando:

$$\rho = \frac{Masa}{Volumen} = \frac{M_f}{V} + \frac{M_m}{V} =$$
$$= \frac{Volumen \ \ fibras}{V}\rho_f + \frac{Volumen \ \ matriz}{V}\rho_m = V_f\rho_f + V_m\rho_m \qquad [2.9]$$

Fácilmente puede demostrarse que

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_f}{\rho_f} + \frac{M_m}{\rho_m} \qquad [2.10]$$

2.2.3 ESPESOR DE LA LÁMINA

El espesor de la lámina h puede deducirse suponiendo conocida una magnitud, además de los parámetros anteriores, que se denomina gramaje m_g que representa la masa de fibras por metro cuadrado de laminado y que, por tanto, se expresa en kg/m^2. Así, considerando un metro cuadrado de laminado puede escribirse:

$$\rho_f = \frac{m_g}{Volumen \ de \ fibras} =$$
$$= \frac{m_g}{Volumen \ total} \cdot \frac{Volumen \ total}{Volumen \ fibras} = \frac{m_g}{V_T} \cdot \frac{1}{V_f} \qquad [2.11]$$

Como $V_T = h \cdot 1(m^2)$, se obtiene:

$$h = \frac{m_g}{V_f \cdot \rho_f} = m_g\left(\frac{1}{\rho_f} + \frac{1}{\rho_m}\left(\frac{1 - M_f}{M_f}\right)\right) \qquad [2.12]$$

2.2.4 PROPIEDADES ELÁSTICAS

Las láminas y, por tanto, los laminados, presentan un comportamiento marcadamente anisótropo. Este es un concepto que es importante entender antes de profundizar en los aspectos micromecánicos de una lámina. En la parte superior de la Figura 2.3 se muestran dos placas rectangulares; la de la izquierda está fabricada utilizando una material isótropo y, la de la derecha, utilizando uno anisótropo -que podría ser perfectamente una lámina de material compuesto en la que las fibras llevaran la dirección marcada en el dibujo. Cuando ambas placas se someten a tracción en dirección paralela a su lado más largo, la manera en que se deforman las placas es diferente: la placa de material isótropo se alarga longitudinalmente y se contrae transversalmente por el denominado efecto Poisson, pero todos los lados de la placa permanecen paralelos a sus direcciones iniciales; sin embargo, en la placa de material anisótropo (material compuesto), la manera de deformarse es diferente a la de la placa de material de comportamiento isótropo: en efecto, los lados ya no permanecen paralelos a los originales apareciendo, para este estado de deformación axial de tracción, fenómenos de cizalladura asociados con él, cosa que no sucedía en el caso anterior.

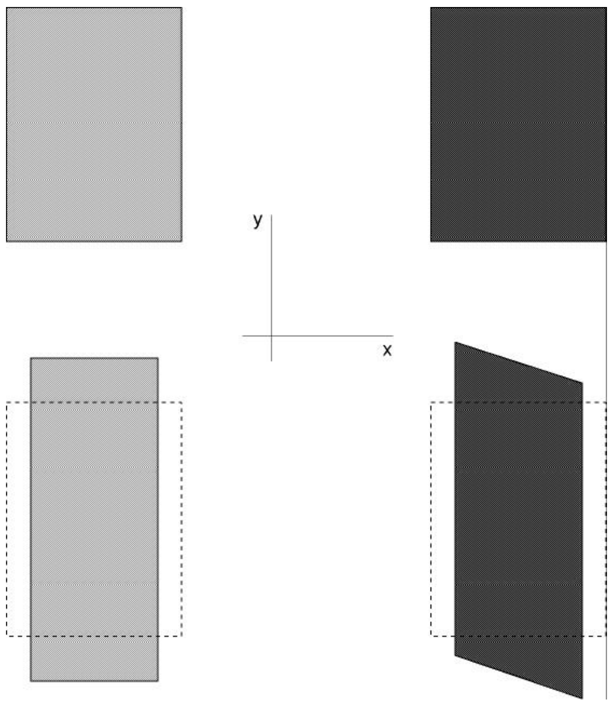


Figura 2.3.

Toda la discusión anterior hace ver que, en el caso de materiales anisótropos, las maneras de deformarse un sólido son más complejas que cuando el material presenta un comportamiento isótropo. Desde el punto de vista formal, un material es isótropo si sus propiedades -por ejemplo, las mecánicas- son independientes de la dirección en que las midamos y anisótropo si esto no fuera así. Para aclarar esto, y volviendo al ejemplo de la Figura 2.3, si se determinara el módulo de elasticidad E del material de la placa de la izquierda en base al ensayo de tracción realizado (simplemente E sería el cociente entre la tensión aplicada y la deformación longitudinal conseguida), y repitiéramos el ensayo pero ahora traccionando de los dos lados verticales, el módulo de elasticidad que se obtendría sería el mismo que en el caso anterior. Es decir, al tratarse de un material isótropo la propiedad que se mede es independiente de la dirección en la que se ha realizado el ensayo. Sin embargo, cuando en una lámina se haga un ensayo de tracción ordinario en la dirección de sus fibras se obtendrá un valor del módulo de elasticidad E_x (ó E_1) mientras que, cuando se realice el ensayo en dirección perpendicular a la fibras, se obtendrá otro valor E_y (ó E_2) del módulo de elasticidad que será distinto al anterior. La propiedad que se mede es, en este caso, dependiente de la dirección en que se realice el ensayo. En definitiva, en los desarrollos posteriores, el lector va a encontrarse con materiales de marcado carácter anisótropo en los que la formulación de sus relaciones constitutivas -relaciones entre las componentes de los tensores de tensión y deformación- resulta ser algo más complicadas que las correspondientes a materiales isótropos.

El objetivo del análisis micromecánico de una lámina unidireccional de material compuesto es relacionar sus propiedades con las de los materiales que lo constituyen. Básicamente, las propiedades macromecánicas a obtener son:

- Módulo de elasticidad en la dirección de las fibras (E_x ó E_1)
- Módulo de elasticidad en la dirección ortogonal a las fibras (E_y ó E_2)
- Coeficiente de Poisson principal (ν_{yx} ó ν_{21})
- Coeficiente de Poisson secundario (ν_{xy} ó ν_{12})
- Módulo de rigidez transversal (G_{xy} ó G_{12})
- Coeficiente de dilatación principal (dirección de las fibras) (α_1)
- Coeficiente de dilatación secundario (dirección perpendicular a las fibras) (α_2)

Se partirá de que las propiedades de las fibras y de la matriz son conocidas; cuando se emplee el subíndice f, la propiedad correspondiente, se refirá a las fibras mientras que cuando se utilice el subíndice m, la propiedad se refiere a la matriz.

Las hipótesis fundamentales de todos los desarrollos que siguen son las siguientes:

- El material de las fibras se considera homogéneo, isótropo y con un comportamiento elástico-lineal hasta rotura. Las fibras se supondrán regularmente espaciadas dentro de la matriz y perfectamente alineadas.

- El material de la matriz es homogéneo, isótropo y también presenta un comportamiento elástico-lineal hasta rotura. Se supone que la matriz rodea a todas las fibras y que existe una adherencia perfecta en la interfase fibra-matriz.

- El material compuesto resultante que configura la lámina se considera, a nivel macroscópico, homogéneo con un comportamiento ortótropo elástico lineal hasta rotura y libre de tensiones residuales generadas por el proceso de curado.

Adicionalmente a todo lo anterior se supondrá que fibra y matriz trabajan "solidariamente". Este concepto, que es el fundamento de todos los cálculos que se van a realizar, quedará más claro tras la lectura de lo párrafos siguientes pero se puede adelantar que esta hipótesis relativa a la "solidaridad" implica que, cuando una lámina sea traccionada en la dirección de las fibras, tanto éstas como la matriz que las rodea, sufren la misma deformación longitudinal en la dirección de la carga aplicada.

Sobre la hipótesis de isotropía de las fibras conviene precisar que no es del todo real en el caso de algunas fibras. Así, por ejemplo, en la Tabla 2.2 se recogen propiedades de varias fibras muy usadas como refuerzos en laminados. En particular se indican los módulos de elasticidad en la propia dirección de una fibra (E_{fl}) y en dirección perpendicular a ella (E_{ft}).

	FIBRAS			
	Vidrio E	Kevlar	Carbono H.R.	Carbono H.M.
E_{fl} (MPa)	74000	130000	230000	390000
E_{ft} (MPa)	74.000	5.400	15.000	6.000
G_f (MPa)	30.000	12.000	50.000	20.000
ν_{ftl}	0,25	0,40	0,30	0,35

Tabla 2.2.

Este comportamiento anisótropo que muestran algunas fibras se debe a que, durante su proceso de fabricación, sufren un estiramiento en la que se orientan sus cadenas moleculares.

A continuación va a calcularse el módulo de elasticidad del material compuesto de la lámina según la dirección de la fibras (E_x ó E_1) suponiendo conocidos los módulos de elasticidad de la fibra (E_f) y de la matriz (E_m). Para ello considérese la Figura 2.4, en la que se observa un trozo de fibra rodeada por la parte de matriz correspondiente a esa fibra. En la figura 2.5 se ha representado, para una mayor claridad, la sección transversal de la parte de lámina representada en la Figura 2.4.

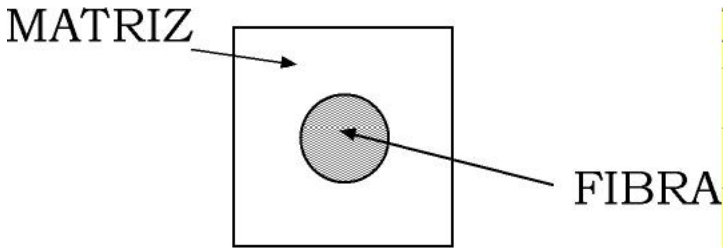


Figura 2.4.

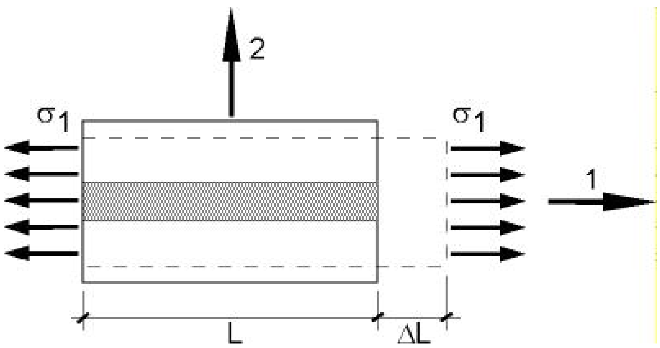


Figura 2.5.

Volviendo a la Figura 2.4, supóngase que el material compuesto es sometido a una tensión de tracción en la dirección de la fibra, por lo que su longitud inicial L se incrementa en ΔL como consecuencia del proceso de deformación inducido. Por tanto, el conjunto fibra-matriz representado en la Figura 2.4 sufre una deformación ε_1 cuyo valor es:

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta L}{L}$$

Suponer que la fibra y la matriz trabajan solidariamente quiere decir que las deformaciones que experimentan la fibra ε_f y la matriz ε_m son iguales entre sí e iguales a ε_1. Sin embargo, las tensiones longitudinales de tracción que aparecerán en la fibra σ_f y en la matriz σ_m no serán las mismas y vendrán dadas por el producto de la deformación ε_1 por el correspondiente módulo de elasticidad de cada una de ellas.

$$\sigma_f = E_f \cdot \varepsilon_f = E_f \cdot \varepsilon_1 \qquad [2.13]$$

$$\sigma_m = E_m \cdot \varepsilon_m = E_m \cdot \varepsilon_1 \qquad [2.14]$$

Un ejemplo de este comportamiento se puede visualizar si se consideran dos personas, una fuerte y otra débil, empujando un coche; cada una de ellas recorrería la misma longitud a medida que el coche se mueve pero, sin embargo, la fuerza ejercida por cada uno de ellos sería diferente, siendo mayor la ejercida por la persona más fuerte.

Obviando la composición del material, la tensión de tracción "aparente" que actúa sobre el material σ_1, que podría calcularse como el cociente entre la fuerza total aplicada F y el área de la sección transversal A sobre la que actúa la fuerza, podría expresarse como el "módulo de elasticidad aparente del material compuesto" E_1 multiplicado por la deformación ε_1. Si se denomina A_f y A_m a las áreas de las secciones transversales de la fibra y matriz, respectivamente, que se observan en la Figura 2.5, la fuerza total F (F=σ_1.A) será igual a la suma de la fuerza soportada por la fibra F_f (F_f=σ_f.A_f) y la soportada por la matriz F_m (F_m=σ_m.A_m).

$$\begin{aligned} F &= F_f + F_m \\ \sigma_1 \cdot A &= \sigma_f \cdot A_f + \sigma_m \cdot A_m \end{aligned} \qquad [2.15]$$

Expresando las tensiones σ_1, σ_f y σ_m en función de las deformaciones ε_1, ε_f y ε_m, se puede obtener E_1 en función de E_f y E_m. Las fracciones A_f/A y A_m/A representan los fracciones volumétricas de fibra y matriz, respectivamente.

$$\begin{aligned} E_1 \cdot \varepsilon_1 \cdot A &= E_f \cdot \varepsilon_1 \cdot A_f + E_m \cdot \varepsilon_1 \cdot A_m \\ E_1 &= E_f \cdot \frac{A_f}{A} + E_m \cdot \frac{A_m}{A} \end{aligned} \qquad [2.16]$$

Es decir, cuando se dice de un material compuesto que el volumen de fibra es del 45% se está diciendo, implícitamente, que A_f/A=0,45. Llamando V_f y V_m a los volúmenes específicos de fibra y matriz, respectivamente, se obtiene la siguiente ecuación conocida como regla de las mezclas:

$$E_1 = E_f \cdot V_f + E_m \cdot (1 - V_f) \quad [2.17]$$

A partir de ella se puede obtener el módulo de elasticidad del material compuesto en la dirección de sus fibras en función de los módulos de elasticidad de la fibra y de la matriz teniendo en cuenta los porcentajes de fibra y matriz.

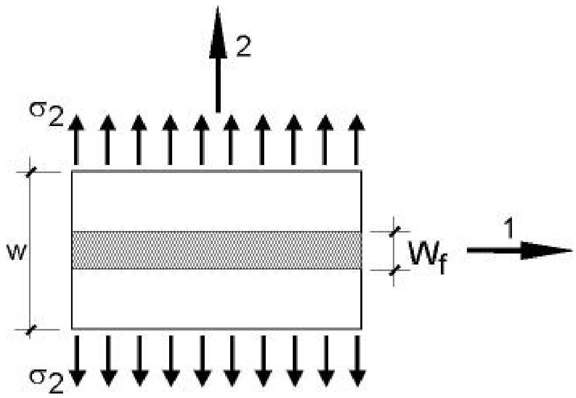


Figura 2.6.

El cálculo del módulo de elasticidad en dirección perpendicular a las fibras E_2 (ó E_y), en función de los módulos de elasticidad de la fibra y de la matriz, se puede realizar de manera similar a como se ha hecho con anterioridad. Para ello, considérese la Figura 2.6, en la que la dirección de carga coincide con la del eje 2 (ó eje y). En este caso, las tensiones que actúan sobre la fibra y la matriz, por razones de equilibrio interno en el conjunto fibra-matriz, serán iguales y de valor σ_2. Si llamamos W al espesor total de la lámina y Wf al de la fibra, las deformaciones que aparecerán en la fibra y la matriz (ε_f y ε_m) vendrán dadas por los cocientes entre la tensión σ_2 y los módulos de elasticidad de la fibra E_f y de la matriz E_m.

$$\varepsilon_f = \frac{\sigma_2}{E_f} \quad [2.18]$$

$$\varepsilon_m = \frac{\sigma_2}{E_m} \quad [2.19]$$

Denominando ε_2 al valor de la deformación total del conjunto fibra-matriz, ésta se puede expresar en función de ε_2 mediante el módulo de elasticidad aparente de la lámina E_2.

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E_2} \qquad [2.20]$$

Por otra parte, el desplazamiento relativo entre las caras de la lámina ($\varepsilon_2.W$) será igual a la suma de los desplazamientos relativos experimentados por la fibra y la matriz, los cuales pueden expresarse, respectivamente como $\varepsilon_f.W_f$ y $\varepsilon_m.W_m = \varepsilon_m.(1-W_f)$, siendo W_m el espesor de la matriz.

$$\varepsilon_2 \cdot W = \varepsilon_f \cdot W_f + \varepsilon_m \cdot W_m \qquad [2.21]$$

Simplificando las ecuaciones anteriores se puede poner ε_2 en función de ε_f y ε_m a través de las fracciones de fibra y matriz (V_f y V_m).

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_f \cdot \frac{W_f}{W} + \varepsilon_m \cdot \frac{W_m}{W}$$
$$\varepsilon_2 = \varepsilon_f \cdot V_f + \varepsilon_m \cdot V_m \qquad [2.22]$$

Expresando las deformaciones en función de las tensiones:

$$\sigma_2 = E_2 \cdot \varepsilon_2 = E_2 \cdot \left(\frac{\sigma_2}{E_f} \cdot V_f + \frac{\sigma_2}{E_m} \cdot V_m \right) \qquad [2.23]$$

De donde se puede deducir la expresión final de E_2 que se iba buscando.

$$E_2 = E_m \left(\frac{1}{(1 - V_f) + \frac{E_m}{E_f} V_f} \right) \qquad [2.24]$$

La determinación del coeficiente de Poisson principal ν_{21} (ó ν_{yx}) puede hacerse de manera análoga a como se hizo en el caso de las propiedades anteriores. Antes de continuar, conviene dejar claro que cuando se escriba ν_{ji} debe entenderse que la dirección en que se aplica la carga es justo la dirección i. Por definición de coeficiente de Poisson (ver figura 2.7), éste será el cociente, cambiado de signo, entre la deformación transversal ε_2, que aparece cuando tiene lugar una deformación longitudinal ε_1.

$$\nu_{21} = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \qquad [2.25]$$

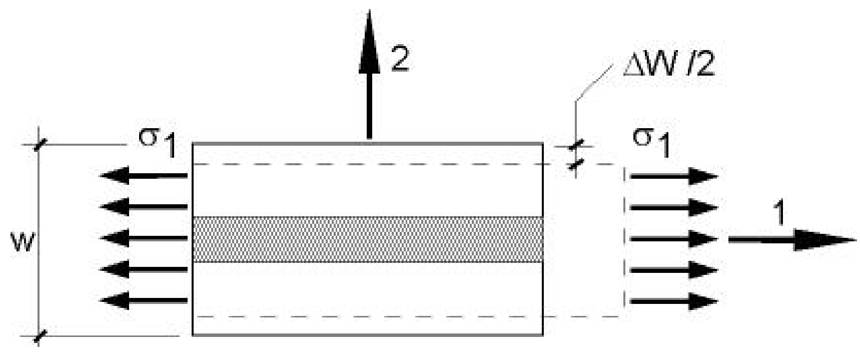


Figura 2.7.

La variación de espesor de la lámina (ΔW) como consecuencia de la acción de las tensiones σ_1 se podrá poner como el producto, cambiado de signo, de W por ε_2 o en función de ε_1 utilizando el concepto de coeficiente de Poisson:

$$\Delta W = -W \cdot \varepsilon_2 = W \cdot \nu_{21} \cdot \varepsilon_1 \tag{2.26}$$

Como ΔW es igual a la suma de las variaciones de espesor que experimentan la fibra y la matriz (ΔW_f y ΔW_m, respectivamente) se puede plantear que:

$$\Delta W = \Delta W_f + \Delta W_m \tag{2.27}$$

y, expresando éstas en función de ε_1 a través de los coeficientes de Poisson de la fibra ν_f y de la matriz ν_m:

$$\Delta W_m = W \cdot V_m \cdot \nu_m \cdot \varepsilon_1 \tag{2.28}$$

$$\Delta W_f = W \cdot V_f \cdot \nu_f \cdot \varepsilon_1 \tag{2.29}$$

Se puede obtener la expresión de ν_{21} en función de estos últimos coeficientes, volviendo a aparecer nuevamente la regla de las mezclas.

$$\nu_{21} = \nu_f \cdot V_f + \nu_m \cdot (1 - V_f) \tag{2.30}$$

Al llegar a este punto, es conveniente decir que la regla de las mezclas no es siempre válida para calcular todo tipo de propiedades de un material compuesto, tal como se ha visto, por ejemplo, en la determinación de E_2, por lo que hay que tener un especial cuidado en su aplicación.

El cálculo de ν_{12} se podría hacer de manera similar pero se puede obtener directamente, utilizando el teorema de reciprocidad, de los valores de E_1, E_2 y ν_{21} previamente calculados. Para ello (ver Figura 2.8) considérese una lámina de material compuesto de forma cuadrada de lado L sometida a dos estados de carga diferentes identificados por los superíndices (1) y (2); el primero corresponde a un estado de tracción motivado por la aplicación de una tensión σ actuando según la dirección 1 y, el segundo, a otro estado de tracción causado por un estado tensional σ actuando ahora según la dirección 2.

Estado (1). Carga dirección 1

$$^{(1)}\varepsilon_1 = \frac{\sigma}{E_1} \qquad ^{(1)}\Delta_1 = \frac{\sigma}{E_1} \cdot L$$

$$^{(1)}\varepsilon_2 = -\nu_{21} \cdot {}^{(1)}\varepsilon_1 = -\nu_{21} \cdot \frac{\sigma}{E_1} \qquad ^{(1)}\Delta_2 = \nu_{21} \cdot \frac{\sigma}{E_1} \cdot L$$

Estado (2). Carga dirección 2

$$^{(2)}\varepsilon_1 = -\nu_{12} \cdot {}^{(2)}\varepsilon_2 = -\nu_{12} \cdot \frac{\sigma}{E_2} \qquad ^{(2)}\Delta_1 = \nu_{12} \cdot \frac{\sigma}{E_2} \cdot L$$

$$^{(2)}\varepsilon_2 = \frac{\sigma}{E_2} \qquad ^{(2)}\Delta_2 = \frac{\sigma}{E_2} \cdot L$$

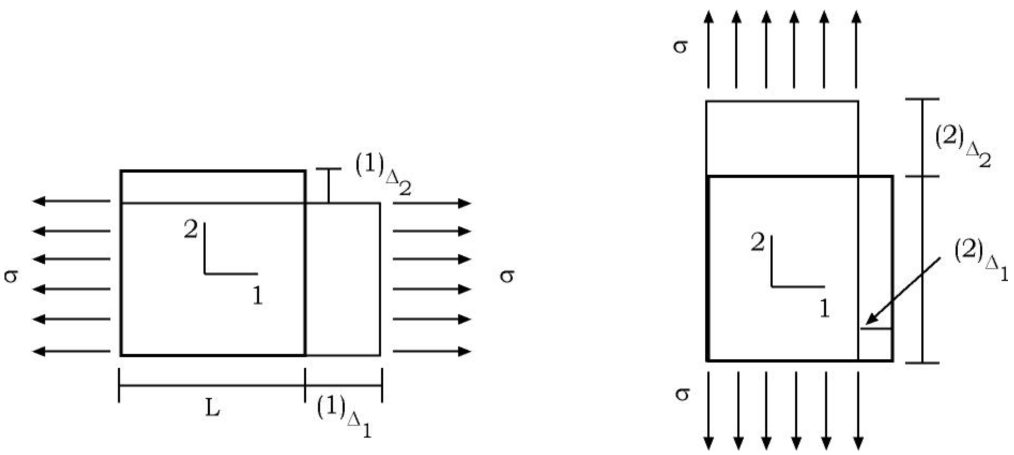


Figura 2.8.

Llamando $^{(1)}\Delta_1$ al aumento de longitud del lado L en la dirección 1 y $^{(1)}\Delta_2$ a la disminución del lado L en la dirección 2 correspondientes al estado (1) y $^{(2)}\Delta_1$ al aumento de longitud del lado L en la dirección 2 y $^{(2)}\Delta_2$ a la disminución del lado L en la dirección 2 correspondientes al estado (2), se puede aplicar el teorema de reciprocidad:

$$-\sigma \cdot L \cdot {}^{(2)}\Delta_1 = -\sigma \cdot L \cdot {}^{(1)}\Delta_2 \qquad [2.31]$$

$${}^{(2)}\Delta_1 = {}^{(1)}\Delta_2 \qquad [2.32]$$

Concluyéndose que los coeficientes de Poisson ν_{12} y ν_{21} no son independientes entre sí, sino que están relacionados a través de los módulos de elasticidad E_1, E_2 de la lámina a través de la ecuación siguiente:

$$\frac{\nu_{12}}{E_2} = \frac{\nu_{21}}{E_1} \qquad [2.33]$$

La determinación del módulo de rigidez transversal G_{12} (ó G_{xy}) puede hacerse de la siguiente forma, cuando sobre un trozo de lámina actúa un estado tensional de cizalladura pura, como el que se representa en la figura 2.9., se producen deformaciones angulares en la matriz γ_m y en la fibra γ_f que serán distintas y dependientes del módulo de rigidez de cada uno de estos componentes.

$$\gamma_m = \frac{\tau}{G_m} \qquad \gamma_f = \frac{\tau}{G_f} \qquad \gamma = \frac{\tau}{G_{12}}$$

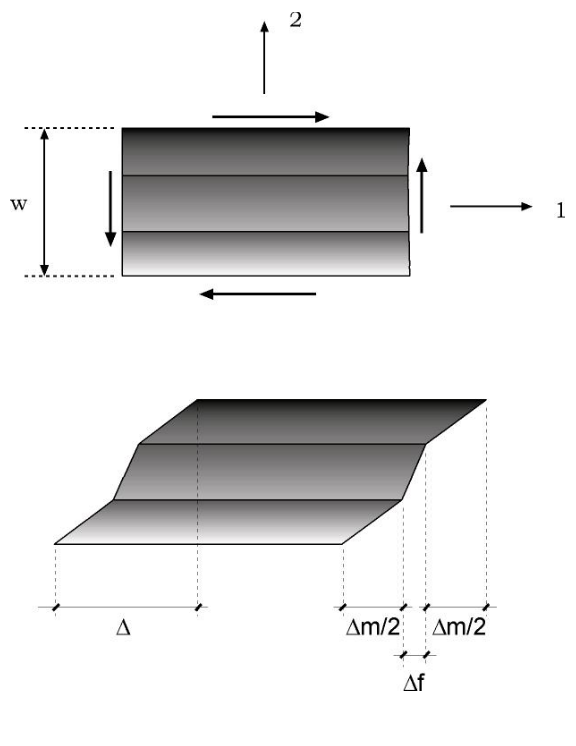


Figura 2.10.

La deformación angular total de la lámina γ_{12} se definirá como el cociente entre el movimiento relativo Δ entre las dos caras de la lámina y su espesor W. Si llamamos Δ_m y Δ_f a los movimientos relativos entre las dos caras de la matriz y de la fibra, respectivamente, se podrán expresar como el producto de sus deformaciones angulares por sus espesores, los cuales, a su vez, serán iguales al producto de la fracción volumétrica correspondiente y del espesor total de la lámina.

$$\Delta = \gamma \cdot W \tag{2.34}$$

$$\Delta_m = \gamma_m \cdot V_m \cdot W \tag{2.35}$$

$$\Delta_f = \gamma_f \cdot V_f \cdot W \tag{2.36}$$

$$\Delta = \Delta_m + \Delta_f \tag{2.37}$$

Y por tanto:

$$\gamma = \gamma_m \cdot V_m + \gamma_f \cdot V_f \tag{2.38}$$

De esta manera se puede obtener G_{12} en función de G_f, G_m, V_f y V_m. En todas las aplicaciones posteriores supondremos que G_{12}=G_{21}.

$$G_{12} = G_m \cdot \left(\frac{1}{V_m + V_f \cdot \frac{G_m}{G_f}} \right) \tag{2.39}$$

Usualmente, el coeficiente de dilatación térmica de la matriz, es varias decenas de veces superior al de la fibra, por lo que, caso de aplicar una carga térmica a una lámina, las fibras tratan de impedir la dilatación térmica de la matriz mientras que ésta trata, a su vez, de que las fibras se alarguen. Como resultado de la diferencia entre coeficientes de dilatación de la matriz y de la fibra se generan tensiones en el interior de las mismas aunque la lámina de material compuesto se dilate libremente (ausencia de tensiones externas). Por tanto, se generarán tensiones de tracción en las fibras y de compresión en la matriz.

Al igual a como se ha procedido con anterioridad, se denominará α_1 y α_2 a los coeficientes de dilatación térmica de la lámina en la dirección de las fibras y en la dirección perpendicular a las mismas, respectivamente, y α_f y α_m a los coeficientes de dilatación de la fibra y de la matriz. Sea la lámina representada en la Figura 2.11 que sufre una variación de temperatura ΔT:

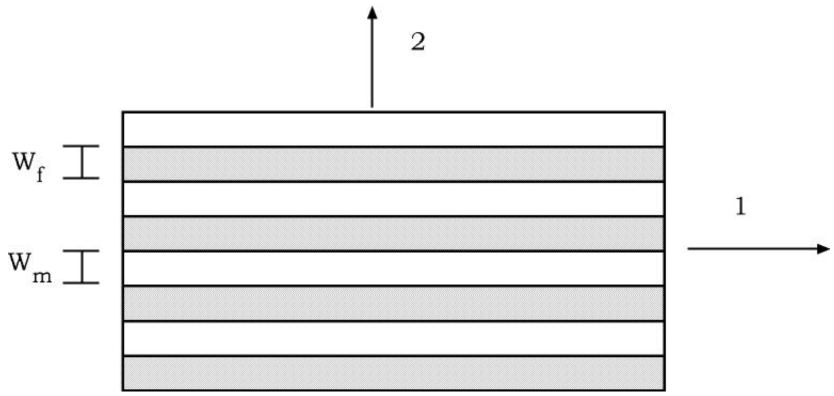


Figura 2.11.

Si σ_f y σ_m representan las tensiones internas que se generan en los materiales intervinientes y F la resultante de la fuerza total que fibra y matriz se ejercen (Figura 2.12), se tendrá, para la dilatación en la dirección de las fibras, lo siguiente:

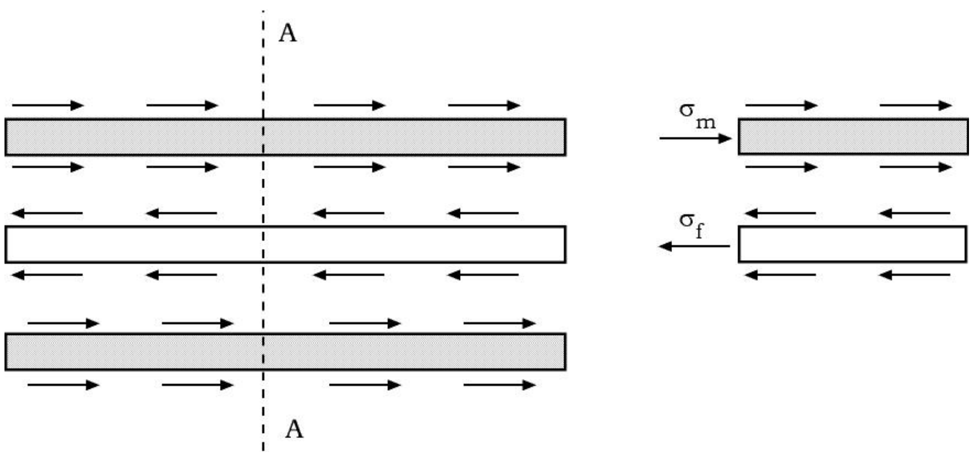


Figura 2.12.

$$\sigma_m = -\frac{F}{W_m} \quad y \quad \sigma_f = \frac{F}{W_f} \qquad [2.40]$$

donde el signo menos indica que se trata de una tensión de compresión.

Las ecuaciones anteriores pueden ponerse como:

$$\sigma_m W_m + \sigma_f W_f = 0 \qquad [2.41]$$

Por otra parte, la deformación en la dirección del eje 1, que será la misma para la matriz y la fibra, puede ponerse como:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_f}{E_f} + \alpha_f \Delta T = \frac{\sigma_m}{E_m} + \alpha_m \Delta T \qquad [2.42]$$

De las ecuaciones anteriores puede deducirse fácilmente que:

$$\sigma_m = \frac{(\alpha_f - \alpha_m)\Delta T}{\frac{1}{E_m} + \frac{V_m}{V_f}\frac{1}{E_f}} \qquad [2.43]$$

donde V_f y V_m representan, respectivamente, los volúmenes específicos de fibra y matriz. Sustituyendo σ_m en la expresión de ε_1 y teniendo en cuenta que, dicha deformación, puede ponerse como:

$$\varepsilon_1 = \alpha_1 \Delta T \qquad [2.44]$$

puede obtenerse α_1, resultando:

$$\alpha_1 = \frac{\alpha_f E_f V_f + \alpha_m E_m V_m}{E_f V_f + E_m V_m} \qquad [2.45]$$

Para la determinación del coeficiente de dilatación en la dirección ortogonal a las fibras (α_2) se puede proceder de manera similar a como se ha hecho anteriormente. Para ello, la deformación ε_2 puede ponerse como:

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta(W_m + W_f)}{W_m + W_f} = \varepsilon_m^t \frac{W_m}{W_m + W_f} + \varepsilon_f^t \frac{W_f}{W_m + W_f} \qquad [2.46]$$

donde el superíndice t de las deformaciones indica que son obtenidas en dirección transversal a las fibras. La ecuación anterior puede también escribirse como:

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_m^t V_m + \varepsilon_f^t V_f \qquad [2.47]$$

y, utilizando la ley de Hooke modificada para tener en cuenta las deformaciones de origen térmico, se obtiene:

$$\varepsilon_2 = \left(-\frac{\nu_m}{E_m}\sigma_m + \alpha_m \Delta T \right) V_m + \left(-\frac{\nu_f}{E_f}\sigma_f + \alpha_f \Delta T \right) V_f \qquad [2.48]$$

donde las tensiones σ_f y σ_m son las calculadas previamente cuando se dedujo el valor de ε_1. Sustituyendo en esta última expresión los valores de las tensiones y teniendo en cuenta que:

$$\varepsilon_2 = \alpha_2 \Delta T \qquad [2.49]$$

se obtiene:

$$\alpha_2 = \alpha_m V_m + \alpha_f V_f + \frac{\left(\nu_f E_m - \nu_m E_f \right)}{\frac{E_m}{V_f} + \frac{E_f}{V_m}} \times \left(\alpha_f - \alpha_m \right) \qquad [2.50]$$

2.3. MICROMECÁNICA DE MATERIALES DE FIBRA CORTA

2.3.1 MATERIALES REFORZADOS POR FIBRAS CORTAS ALINEADAS

En este tipo de materiales se emplea una formula similar a la regla de las mezclas pero introduciendo un parámetro que depende de la geometría de las fibras y que tiene en cuenta que la eficiencia del refuerzo de fibra corta es menor que el de las fibras largas.

Para el módulo de elasticidad en dirección de las fibras

$$E_1 = \eta_L \cdot E_f \cdot V_f + E_m \cdot \left(1 - V_f \right) \qquad [2.51]$$

El parámetro η_L viene dado por (Cox, 1952)

$$\eta_L = 1 - \frac{tanh\left(\frac{1}{2} \cdot \beta \cdot L \right)}{\frac{1}{2} \cdot \beta \cdot L} \qquad [2.52]$$

Siendo L ahora la longitud de las fibras y β un parámetro que se calcula a partir de la ecuación:

$$\beta = \left(\frac{2 \cdot G_m}{E_f \cdot r^2 \cdot ln\left(\frac{R}{r}\right)} \right)^{1/2} \qquad [2.53]$$

Donde G_m es el módulo de elasticidad de la matriz a cortadura, $2R$ es el espaciado entre fibras y r el radio de las fibras.

Cuando el módulo de elasticidad de las fibras es mucho mayor que el de la matriz se puede realizar la aproximación:

$$E_{fibras\ cortas} = \eta_L \cdot E_{fibras\ l\,arg\,as} \qquad [2.54]$$

Otro modelo empleado para predecir las propiedades elásticas de un material compuesto reforzado por fibras cortas alineadas es el modelo de Halpin-Tsai. Para el módulo de elasticidad en dirección de las fibras la ecuación que propone es:

$$E_1 = \frac{1 + \left(\frac{L}{r}\right) \cdot \eta_L \cdot V_f}{1 - \eta_L \cdot V_f} \cdot E_m \qquad [2.55]$$

Al igual que en el modelo anterior, L es la longitud de la fibra, y r es su diámetro. El parámetro η_L se calcula mediante la expresión:

$$\eta_L = \frac{\frac{E_f}{E_m} - 1}{\frac{E_f}{E_m} + \frac{L}{r}} \qquad [2.56]$$

El módulo de elasticidad en dirección transversal no depende de la longitud de la fibra y se calcula mediante la ecuación:

$$\mathrm{E}_2 = \frac{1 + 2 \cdot \eta_T \cdot \mathrm{V}_f}{1 - \eta_T \cdot \mathrm{V}_f} \cdot \mathrm{E}_m \qquad [2.57]$$

donde:

$$\eta_T = \frac{\frac{E_f}{E_m} - 1}{\frac{E_f}{E_m} + 2} \qquad [2.58]$$

2.3.2 MATERIALES REFORZADOS POR FIBRAS CORTAS CON ORIENTACIÓN ALEATORIA

En este caso se introduce un parámetro adicional al modelo del apartado anterior denominado factor de rendimiento de la orientación. El material se puede considerar que tiene un comportamiento isótropo.

$$E = \eta_o \cdot \eta_L \cdot E_f \cdot V_f + E_m \cdot (1 - V_f) \qquad [2.59]$$

El factor de rendimiento depende del tipo de orientación de las fibras, Krenchel (1964) propuso:

- η_o=1 (lámina unidireccional, fibras a 0º)
- η_o=0 (lámina unidireccional, fibras a 90º)
- η_o=3/8 (distribución aleatoria de fibras en 2D)
- η_o=1/5 (distribución aleatoria de fibras en 3D)

Se observa como una distribución aleatoria tridimensional de las fibras disminuye la contribución de las fibras al módulo de elasticidad.

2.4. MICROMECÁNICA DE MATERIALES REFORZADOS POR PARTÍCULAS

En el caso de materiales reforzados por partículas para la elaboración del modelo micromecánico se realizan las siguientes hipótesis:

- El material se compone únicamente de dos fases: matriz y refuerzo.

- Cada fase se puede describir mediante la mecánica de los medios continuos.

- Se asume comportamiento isótropo, lineal y elástico para ambas fases.

- La unión matriz-refuerzo es perfecta.

- Se supone que el refuerzo está formado por partículas esféricas del mismo tamaño distribuidas uniformemente en la matriz con una geometría esférica.

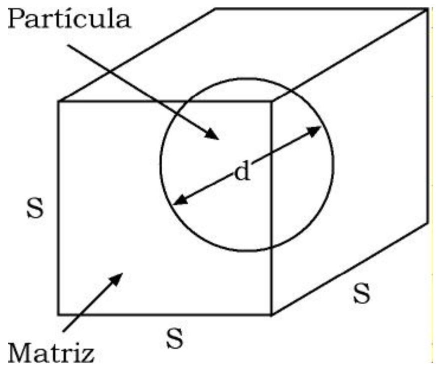


Figura 2.13.

El modelo planteado no es matemáticamente riguroso ya que no asegura la continuidad de tensiones y desplazamientos y no cumple las ecuaciones de compatibilidad

Se define una celdilla unidad de forma que el volumen que encierra sea representativo del material e incluya al menos a una partícula, figura 2.13.

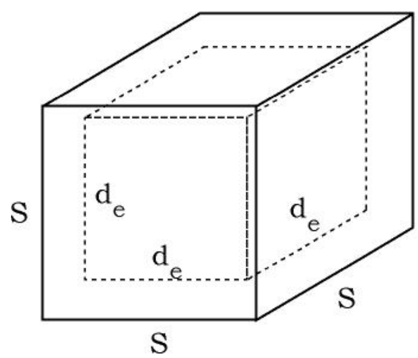


Figura 2.14.

Volumen celdilla: S^3

Volumen partícula: $\pi \dfrac{d^3}{6}$

La geometría de la celdilla se define de forma que el volumen de refuerzo y de matriz en la misma sea el correspondiente al material completo:

$$V_f = \frac{V_{partícula}}{V_{celdilla}} = \frac{\pi \cdot \frac{d^3}{6}}{S^3} \qquad [2.60]$$

De donde es posible estimar las dimensiones de la celdilla, *S*.

En este estudio se emplea un modelo de celdilla equivalente en la que la partícula esférica se sustituye por una partícula cuadrada de lado d_e, de tal forma que su volumen sea el mismo, figura 2.14.

$$d_e{}^3 = \pi \cdot \frac{d^3}{6} \qquad [2.61]$$

La celdilla equivalente se divide en dos celdillas, denominas respectivamente, celdilla matriz (figura 2.15) y celdilla partícula (figura 2.16).

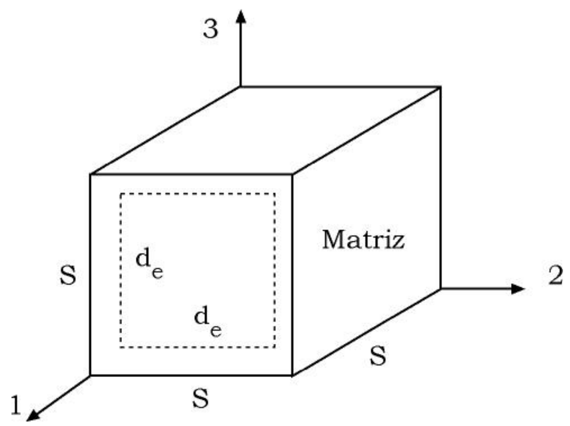


Figura 2.15. Celdilla Matriz

En la primera se considera exclusivamente la matriz, quedando un hueco central de sección d_e^2. La segunda se compone de dos partes, una formada por matriz y otra por partícula, tal como se observa en la figura 2.16.

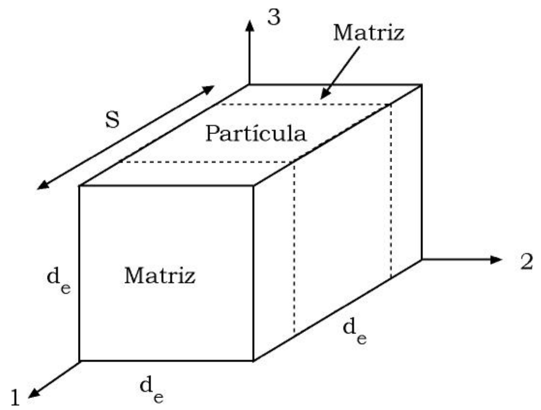


Figura 2.16. Celdilla partícula

Considerando que sobre la celdilla equivalente actúa una fuerza en dirección 1 de valor F_{MC}, se cumple que:

$$F_{MC} = F_M + F_P \tag{2.62}$$

Siendo:

F_{MC} Fuerza en dirección 1 sobre la celdilla unidad

F_M Fuerza en dirección 1 sobre la celdilla matriz

F_p Fuerza en dirección 1 sobre la celdilla partícula

Expresando esta ecuación en términos de tensiones:

$$\sigma_{MC} \cdot A_{CELDA} = \tilde{\sigma}_p \cdot A_p + \sigma_M \cdot A_M \tag{2.63}$$

$$\sigma_{MC} \cdot S^2 = \tilde{\sigma}_p \cdot d_e^2 + \sigma_M \cdot \left(S^2 - d_e^2\right)$$

$$\sigma_{MC} = \tilde{\sigma}_p \cdot \left(\frac{d_e}{S}\right)^2 + \sigma_M \cdot \left(1 - \left(\frac{d_e}{S}\right)^2\right) \tag{2.64}$$

Considerando que el porcentaje en volumen del refuerzo es:

$$V_f = \left(\frac{d_e}{S}\right)^3 \tag{2.65}$$

se puede rescribir la anterior ecuación de la siguiente forma:

$$\sigma_{MC} = \tilde{\sigma}_p \cdot V_f^{2/3} + \sigma_M \cdot \left(1 - V_f^{2/3}\right) \tag{2.66}$$

Dado que se ha asumido la hipótesis de comportamiento lineal elástico

$$\varepsilon_{MC} = \frac{\sigma_{MC}}{E_{MC}} \tag{2.67}$$

$$\tilde{\varepsilon}_p = \frac{\tilde{\sigma}_p}{\tilde{E}_p} \tag{2.68}$$

$$\varepsilon_M = \frac{\sigma_M}{E_M} \tag{2.69}$$

$$\varepsilon_p = \frac{\sigma_p}{E_p} \tag{2.70}$$

Con lo que la ecuación 2.44 puede plantearse en términos de deformaciones:

$$E_{MC} \cdot \varepsilon_{MC} = \tilde{E}_p \cdot \tilde{\varepsilon}_p \cdot V_f^{2/3} + E_M \cdot \varepsilon_M \cdot \left(1 - V_f^{2/3}\right) \tag{2.71}$$

La compatibilidad de desplazamientos longitudinales requiere que la deformación en el material compuesto y en cada constituyente sea la misma, de donde nos queda:

$$\mathrm{E_{MC}} = \tilde{\mathrm{E}}_\mathrm{p} \cdot \mathrm{V_f^{2/3}} + \mathrm{E_M} \cdot \left(1 - \mathrm{V_f^{2/3}}\right) \tag{2.72}$$

Donde:

$\mathrm{E_{MC}}$: es el módulo de elasticidad del material compuesto

$\mathrm{E_M}$: es el módulo de elasticidad de la matriz

$\tilde{\mathrm{E}}_\mathrm{p}$: es el módulo de elasticidad de la <u>celdilla partícula</u>

V_f : Porcentaje en volumen de fibra

En esta ecuación $\tilde{E}_p$ es desconocido dado que la celdilla partícula tiene dos constituyentes, matriz y refuerzo, “en serie”. Para determinar este módulo de elasticidad analizamos en detalle la celdilla partícula, figura 2.17.

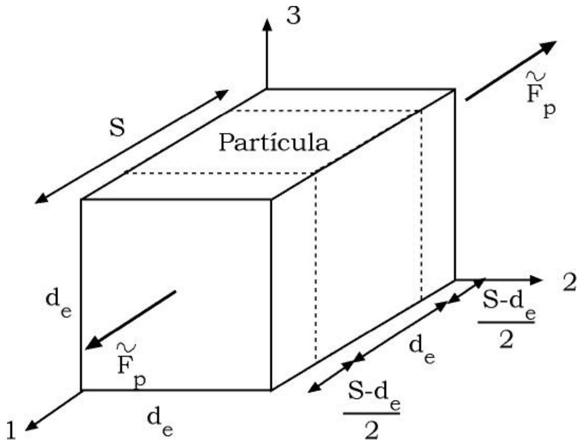


Figura 2.17.

Si sometemos a la celdilla a una fuerza $\tilde{F}_p$ en dirección 1, el alargamiento que sufre la celdilla se puede expresar en función de los alargamientos que sufren el refuerzo y la matriz.

$$S = d_e + (S - d_e) \tag{2.73}$$

$$\Delta S = \Delta d_e + \Delta(S - d_e) \tag{2.74}$$

O en términos de deformaciones:

$$\tilde{\varepsilon}_p \cdot S = \varepsilon_p \cdot d_e + \varepsilon_M \cdot (S - d_e) \tag{2.75}$$

Empleando las ecuaciones 2.46 a 2.48 podemos expresar la anterior expresión en función de las tensiones:

$$\frac{\tilde{\sigma}_p \cdot S}{\tilde{E}_p} = \frac{\sigma_p \cdot d_e}{E_p} + \frac{\sigma_M \cdot (S - d_e)}{E_M} \tag{2.76}$$

Por otro lado al existir equilibrio la fuerza que actúa sobre la celdilla partícula es la misma que la que actúa sobre el refuerzo y la matriz:

$$\tilde{F}_p = F_p = F_M \tag{2.77}$$

O en forma de tensiones:

$$\tilde{\sigma}_p = \sigma_p = \sigma_M \qquad [2.78]$$

Considerando las ecuaciones anteriores podemos conocer el módulo de elasticidad de la celdilla partícula:

$$\frac{1}{\tilde{E}_p} = \frac{1}{E_p} \cdot V_f^{1/3} + \frac{1}{E_M} \cdot \left(1 - V_f^{1/3}\right) \qquad [2.79]$$

Donde se ha tenido en cuenta la relación 2.43

Por tanto el módulo de elasticidad de un material compuesto reforzado por partículas se puede expresar como:

$$E = \frac{V_f^{2/3} \cdot E_m}{1 - V_f^{1/3} \cdot \left(1 - \frac{E_m}{E_p}\right)} + \left(1 - V_f^{2/3}\right) \cdot E_m \qquad [2.80]$$

De forma análoga es posible estimar el módulo de elasticidad a cortadura:

$$G = \frac{V_f^{2/3} \cdot G_m}{1 - V_f^{1/3} \cdot \left(1 - \frac{G_m}{G_p}\right)} + \left(1 - V_f^{2/3}\right) \cdot G_m \qquad [2.81]$$

Dado que se ha asumido que el material es isótropo sólo son necesarias estas dos constantes elásticas para definir el comportamiento elástico del material.

2.5. RESUMEN DEL CAPÍTULO

A modo de resumen final, a continuación se incluyen las principales expresiones que se han deducido para el caso de material reforzado por fibras largas. Para el caso de que la lámina estuviera solicitada según una dirección genérica, también se ha incluido el valor del módulo de elasticidad aparente de la lámina.

$$V_f = \text{contenido volumétrico de fibra} = \frac{\text{Volumen fibra}}{\text{Volumen total}}$$

$$V_m = \text{contenido volumétrico de resina} = \frac{\text{Volumen resina}}{\text{Volumen total}}$$

$$\boxed{V_f + V_m = 1}$$

• Densidad del material compuesto

$$\boxed{\rho = \rho_f V_f + \rho_m V_m}$$

• Módulo de elasticidad en la dirección de las fibras

$$E_1 = E_f V_f + E_m V_m = E_f V_f + E_m (1 - V_f)$$

• Módulo de elasticidad en dirección transversal a las fibras

$$E_2 = E_m \left(\frac{1}{(1 - V_f) + \frac{E_m}{E_f} V_f} \right)$$

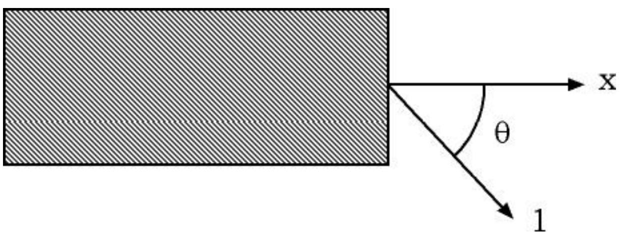
• Módulo de rigidez

$$G_{12} = G_m \left(\frac{1}{(1 - V_f) + \frac{G_m}{G_f} V_f} \right)$$

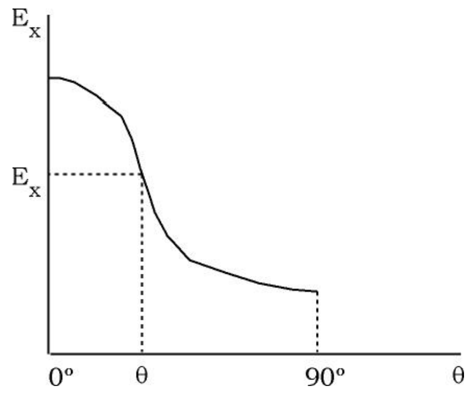
• Coeficiente de Poisson (dirección fibras)

$$\nu_{21} = \nu_f V_f + \nu_m V_m$$

• Módulo de elasticidad en una dirección cualquiera



$$E_x = \frac{1}{\frac{\cos^4\theta}{E_1} + \frac{sen^4\theta}{E_2} + 2\cos^2\theta \, sen^2\theta \left(\frac{1}{2G_{12}} - \frac{\nu_{21}}{E_1} \right)}$$



Los valores de todas las propiedades anteriores -conocidas como constantes ingenieriles de la lámina- se obtienen mediante ensayos de tracción uniaxiales y de cizalladura pura. En la mayoría de estos ensayos lo que se conoce es la fuerza aplicada y, por tanto, la tensión, midiéndose el desplazamiento, del cual puede deducirse el valor de la deformación.

Se denominará, en general, flexibilidad al cociente entre la deformación longitudinal, en el caso de ensayos de tracción uniaxiales, o angular, en el caso de los ensayos de cizalladura, y la tensión aplicada. Si, por ejemplo, ε_{11} fuera la deformación longitudinal en la dirección 1 de la lámina cuando actúa sobre ella la tensión σ_1, se denomina coeficiente de flexibilidad s_{11} al cociente entre ε_{11} y σ_1 obteniéndose E_1 como el valor inverso de s_{11}.

Considerando como eje 1 el de la dirección en la que están orientadas las fibras, el 2 uno ortogonal al anterior pero contenido en el plano de la lámina, y el eje 3 como el ortogonal al plano de la lámina, se pueden definir los módulos de Young para una lámina de material anisótropo de la manera siguiente:

$$E_1 = \frac{1}{s_{11}} \qquad E_2 = \frac{1}{s_{22}} \qquad E_3 = \frac{1}{s_{33}}$$

Los módulos de corte se definen como:

$$G_{23} = \frac{1}{s_{44}} = E_4 \quad G_{31} = \frac{1}{s_{55}} = E_5 \quad G_{12} = \frac{1}{s_{66}} = E_6$$

y los coeficientes de Poisson como:

$$\nu_{ji} = -\frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_i}$$

i = dirección de carga

j = dirección perpendicular a la de carga

Como ya se dijo, los coeficientes de Poisson ν_{ji} y ν_{ij} no son independientes entre sí, debiéndose verificar la relación:

$$\frac{\nu_{ji}}{E_i} = \frac{\nu_{ij}}{E_j} \qquad i, j = 1, 2, 3$$