CAPÍTULO 4

ESTUDIO MACROMECANICO DE UNA LÁMINA. TENSIONES Y DEFORMACIONES

4.1. INTRODUCCIÓN

Una lámina de material compuesto es esencialmente, un material anisótropo al que se le pueden aplicar las ecuaciones de la elasticidad considerando esa circunstancia.

Antes de proseguir conviene aclarar un poco la notación que se empleará. Las componentes del tensor de tensiones se han dibujado en la Figura 4.1 actuando sobre una porción cúbica del material. Respecto a la nomenclatura, muchos autores utilizan el símbolo σ cuando se refieren a tensiones normales (tensiones actuando ortogonalmente a la cara considerada) y τ cuando se trata de las tensiones tangenciales (tensiones actuando tangencialmente a la cara considerada). Otros, sin embargo, utilizan siempre la letra griega sigma cuando se refieren a cualquier tipo de tensión; en este caso la distinción entre tensiones normales y tangenciales se puede deducir de los subíndices que aparecen: un subíndice repetido indica tensión normal mientras que, cuando aparecen dos subíndices distintos, se refieren a tensiones tangenciales. También otros autores que utilizan la primera nomenclatura, en lugar de escribir las tensiones normales repitiendo el subíndice sólo lo ponen una vez; es decir, en vez de σ_{xx} escriben σ_x. Otros autores utilizan la notación σ_{ij}, donde i y j son subíndices que varían entre 1 y 3. Sea cual sea la notación inicialmente utilizada aquí se empleará una notación contractada que se indicará posteriormente.

El tensor de tensiones se podrá expresar como sigue:

$$[T] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ & \sigma_y & \tau_{yz} \\ sim. & & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ sim. & & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \underset{\approx}{\sigma} = [\sigma_{ij}] \qquad [4.1]$$

Sus componentes se pueden expresar de formas distintas, tal como se ha dicho, recogiéndose a continuación las expresiones más usuales:

Subíndices normales representados por letras	σ_{xx} σ_{yy} σ_{zz} σ_{yz} σ_{zx} σ_{xy}
Subíndices normales representados por letras	σ_{x} σ_y σ_z τ_{yz} τ_{zx} τ_{xy}
Subíndices normales numéricos	σ_{11} σ_{22} σ_{33} σ_{23} σ_{31} σ_{12}
Subíndices contractados numéricos	σ_1 σ_2 σ_3 σ_4 σ_5 σ_6
Subíndices contractados representados por letras	σ_x σ_y σ_z σ_q σ_r σ_s

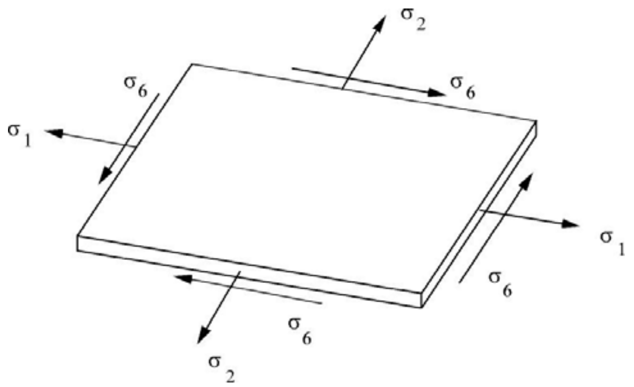


Figura 4.1.

La notación más usual que se empleará a lo largo de este texto es la de subíndices contractados numéricos.

Cuando se analice el problema de una lámina cargada en su plano, las componentes del tensor de tensiones σ_3, σ_4 y σ_5 tomarán valores nulos. σ_1 representará la tensión en la dirección 1 (no equivocar, en este caso, con la dirección de las fibras), σ_2 en una dirección ortogonal a la anterior contenida en el plano de la lámina y σ_6 representará la tensión de cizalladura. Para una mayor claridad se incluye la Figura 4.1 en la que estas componentes tensionales aparecen dibujadas.

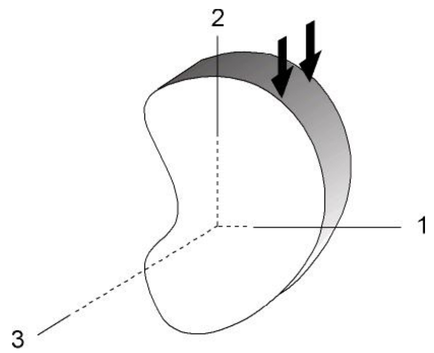


Figura 4.2.

Para finalizar, en todo lo que se refiere a estados tensionales, son válidas las construcciones gráficas de Mohr; en especial el círculo de Mohr para estados tensionales bidimensionales que se describe en el Anexo A de estos apuntes.

En lo referente al tensor de deformaciones, la nomenclatura es similar a la empleada para las tensiones. Una primera distinción que conviene dejar clara es la diferencia entre las componentes del tensor de deformaciones, relativas a cortadura, y las deformaciones angulares ingenieriles, definiéndose ambas a continuación:

Deformación angular tensorial	Deformación angular ingenieril
$\varepsilon_{xy} = \dfrac{\gamma_{xy}}{2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right)$	$\gamma_{xy} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}$

[4.2]

donde u y v son las componentes de desplazamiento según las direcciones x e y respectivamente. El tensor de deformaciones puede, entonces, expresarse como:

$$[D] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 & \gamma_{xz}/2 \\ & \varepsilon_y & \gamma_{yz}/2 \\ sim. & & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ sim. & & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \underset{\approx}{\varepsilon} = [\varepsilon_{ij}] \qquad [4.3]$$

Subíndices normales representados por letras	ε_{xx}	ε_{yy}	ε_{zz}	ε_{yz}	ε_{zx}	ε_{xy}
Subíndices normales representados por letras	ε_x	ε_y	ε_z	$\gamma_{yz}/2$	$\gamma_{zx}/2$	$\gamma_{xy}/2$
Subíndices normales numéricos	ε_{11}	ε_{22}	ε_{33}	ε_{23}	ε_{31}	ε_{12}
Subíndices contractados numéricos	ε_1	ε_2	ε_3	$\varepsilon_4/2$	$\varepsilon_5/2$	$\varepsilon_6/2$
Subíndices contractados representados por letras	ε_x	ε_y	ε_z	$\varepsilon_t/2$	$\varepsilon_u/2$	$\varepsilon_s/2$

La notación que más se utilizará en estos apuntes es la de subíndices contractados numéricos. Nótese que ε_4, ε_5 y ε_6 representan las deformaciones angulares ingenieriles γ_{yz}, γ_{zx} y γ_{xy}, respectivamente. Esto ofrece una serie de ventajas, como posteriormente se verá, al establecer las ecuaciones constitutivas de la lámina.

4.2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA ELASTICO ANISOTROPO

Al igual que en cualquier otro problema elástico, el planteamiento de un problema con un material anisótropo puede enunciarse como sigue: determinar el tensor de tensiones [*T*], el tensor de deformaciones [*D*] y los desplazamientos ($\vec{\delta} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$) en todos los puntos del sólido conociendo las solicitaciones actuantes (fuerzas de masa, de superficie, puntuales, desplazamientos impuestos, variación de temperatura, etc.).

Para resolver este problema se dispone de los siguientes sistemas de ecuaciones:

- Relativas a las componentes del tensor de tensiones.

Ecuaciones de equilibrio interno:

$$X + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0$$

$$Y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \qquad [4.4]$$

$$Z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0$$

donde *X*, *Y* y *Z* representan las componentes de la fuerza internas por unidad de volumen que actúa dentro del sólido.

Ecuaciones de equilibrio en el contorno:

$$\overline{X} = \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n$$

$$\overline{Y} = \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n \qquad [4.5]$$

$$\overline{Z} = \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n$$

donde $\bar{X}$, $\bar{Y}$ y $\bar{Z}$ representan las tensiones actuando sobre el contorno del cuerpo según las direcciones *x*, *y* y *z*, y (*l*,*m*,*n*) son las componentes del vector normal a la superficie.

- Relativas a las componentes del tensor de deformación.

  Ecuaciones de compatibilidad:

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right\}$$

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right\} \qquad [4.6]$$

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right\}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} \qquad [4.7]$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2}$$

- De la relación entre componentes de los tensores de tensiones y de deformación.

  Ecuaciones constitutivas:

  c.1) Si el material presentara un comportamiento elástico e isótropo, son aplicables las Leyes de Hooke Generalizadas:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_z)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \qquad [4.8]$$

$$\gamma_{xy} = \tau_{xy} / G$$

$$\gamma_{zx} = \tau_{zx} / G$$

$$\gamma_{yz} = \tau_{yz} / G$$

ó las Ecuaciones de Lamé:

$$\sigma_x = \lambda e_v + 2G\varepsilon_x$$

$$\sigma_y = \lambda e_v + 2G\varepsilon_y$$

$$\sigma_z = \lambda e_v + 2G\varepsilon_z \qquad [4.9]$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$

$$\tau_{zx} = G\gamma_{zx}$$

$$\tau_{zy} = G\gamma_{zy}$$

c.2) Si el material presentara un comportamiento elástico pero anisótropo, las ecuaciones constitutivas cambian volviéndose algo más complicadas. Para un material anisótropo, la ecuación constitutiva será de la forma:

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} \quad ó \qquad \sigma_{ij} = c_{ijkm}\, \varepsilon_{km} \qquad i, j, k, m = 1,2,3 \qquad [4.10]$$

donde el tensor [C] es de cuarto orden. Si se desarrollara la ecuación anterior, por ejemplo, para expresar τ_{12} en función de las componentes del tensor de deformación, se obtendría:

$$\tau_{12} = c_{1211}\,\varepsilon_{11} + c_{1222}\,\varepsilon_{22} + c_{1233}\,\varepsilon_{33} +$$

$$+\,\overline{c_{1212}\,\varepsilon_{12}} + \overline{c_{1213}\,\varepsilon_{13}} + \overline{c_{1223}\,\varepsilon_{23}} +$$

$$+\,\underline{c_{1221}\varepsilon_{21}} + \underline{c_{1231}\,\varepsilon_{31}} + \underline{c_{1232}\,\varepsilon_{32}} +$$

$$\Downarrow$$

$$\Downarrow \qquad (c_{1223} + c_{1232})\underline{\overline{\varepsilon_{23}}}$$

$$\Downarrow \qquad (c_{1213} + c_{1231})\underline{\overline{\varepsilon_{31}}} \qquad \downarrow$$

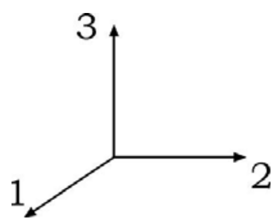
$$(c_{1212} + c_{1221})\underline{\overline{\varepsilon_{12}}} \qquad \downarrow \qquad \varepsilon_1 / 2$$

$$\downarrow \qquad \varepsilon_5 / 2$$

$$\varepsilon_6 / 2$$

$$\sigma_6 = c_{61}\varepsilon_1 + c_{62}\varepsilon_2 + c_{63}\varepsilon_3 + c_{64}\varepsilon_4 + c_{65}\varepsilon_5 + c_{66}\varepsilon_6 \qquad [4.11]$$

Como se observa en la última expresión, si se empleara para las deformaciones la notación contractada numérica, se podría obtener la siguiente relación constitutiva:



$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix}$$

Figura 4.3. Ecuación constitutiva empleando la notación contractada numérica.

Nótese que, utilizando la notación contractada, la ecuación constitutiva adquiere una forma mucho más manejable: el tensor de cuarto orden [*C*] ha quedado reducido a uno de segundo orden y, los tensores de tensión y deformación, que eran tensores de segundo orden, han quedado reducidos a tensores de orden 1 o, más simplemente, vectores. Esta nueva matriz contractada [*C*] se denomina matriz de rigidez.

Operando de manera análoga, se podrían expresar las deformaciones en función de las tensiones de la forma siguiente:

$$\{\varepsilon\} = [S]\{\sigma\} \quad ó \quad \varepsilon_{ij} = s_{ijkm}\sigma_{km} \qquad i, j, k, m, = 1,2,3 \tag{4.12}$$

expresión que, desarrollada, proporciona las siguientes ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l}
\varepsilon_{11} = s_{1111}\sigma_{11} + s_{1122}\sigma_{22} + s_{1133}\sigma_{33} + s_{1123}\sigma_{23} + s_{1132}\sigma_{32} + \\
\qquad + s_{1131}\sigma_{31} + s_{1113}\sigma_{13} + s_{1112}\sigma_{12} + s_{1121}\sigma_{21} \\
\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\\
\varepsilon_{12} = s_{1211}\sigma_{11} + s_{1222}\sigma_{22} + s_{1233}\sigma_{33} + s_{1223}\sigma_{23} + s_{1232}\sigma_{32} + \\
\qquad + s_{1231}\sigma_{31} + s_{1213}\sigma_{13} + s_{1212}\sigma_{12} + s_{1221}\sigma_{21}
\end{array}\right\} \tag{4.13}$$

Utilizando la notación contractada, las ecuaciones anteriores podrían escribirse:

$$\left.\begin{array}{l}
\varepsilon_1 = s_{11}\sigma_1 + s_{12}\sigma_2 + s_{13}\sigma_3 + s_{14}\sigma_4 \\
\qquad + s_{15}\sigma_5 + s_{16}\sigma_6 \\
\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\\
\varepsilon_6 = s_{61}\sigma_1 + s_{62}\sigma_2 + s_{63}\sigma_3 + s_{64}\sigma_4 \\
\qquad + s_{65}\sigma_5 + s_{66}\sigma_6
\end{array}\right\} \qquad [4.14]$$

Identificando [3.13] con (3.14) se comprueba que:

$$\begin{array}{lll}
s_{11} = s_{1111}\ , \ s_{12} = s_{1122}\ , \ \ldots\ldots & & \\
s_{14} = 2s_{1123}\ , & s_{15} = 2s_{1131}\ , & \ldots\ldots s_{61} = 2s_{1211} \\
s_{44} = 4s_{2223}, & s_{45} = 4s_{2331}, & \ldots\ldots
\end{array} \qquad [4.15]$$

La matriz *[S]* cuyas componentes son s_{ij} recibe el nombre de matriz de flexibilidad.

Así pues, la relación constitutiva general para un material anisótropo puede ponerse como:

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} \quad ó \quad \sigma_i = c_{ij}\varepsilon_j \qquad i,j = 1,2,..6 \qquad [4.16]$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \qquad [4.17]$$

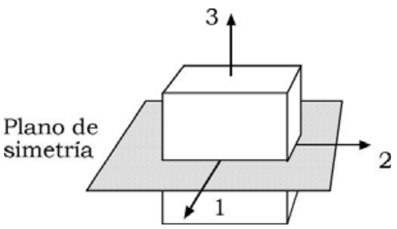
siendo la matriz *[C]* simétrica, lo que conduce a que el material tendría 21 constantes elásticas independientes entre sí.

4.3. ECUACIONES CONSTITUTIVAS PARA DIFERENTES TIPOS DE MATERIALES

Si se analizase las posibles simetrías materiales, el número de constantes independientes del material comienza a reducirse a medida que aumenta la simetría del material.

4.3.1 SIMETRÍA MONOCLÍNICA

Supóngase que el plano 1-2 (*x,y*) es de simetría en lo relativo a las propiedades del material: todas las constantes asociadas con el eje 3 (*z*>0) deben ser las mismas que las asociadas con el eje 3 (sentido negativo) (*z*<0). En estas condiciones ε_4 y ε_5 estarían relacionadas con σ_4 y σ_5, y ε_{yz} y ε_{xz} lo estarían con σ_{yz} y y σ_{xz}. La ecuación constitutiva de un material con simetría monoclínica sería:



$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\\ \sigma_4\\ \sigma_5\\ \sigma_6\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & c_{16}\\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & c_{26}\\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 & 0 & c_{36}\\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & c_{45} & 0\\ 0 & 0 & 0 & c_{54} & c_{55} & 0\\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & 0 & 0 & c_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\\ \varepsilon_4\\ \varepsilon_5\\ \varepsilon_6\end{Bmatrix} \quad [4.18]$$

El número de constantes de la matriz *[C]* distintas de cero resultaría ser de 20, de las cuales sólo 13 serían independientes entre sí. La matriz *[S]* sería en este caso:

$$[S]=\begin{bmatrix}S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & S_{16}\\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & S_{26}\\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 & S_{36}\\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & S_{45} & 0\\ 0 & 0 & 0 & S_{54} & S_{55} & 0\\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & 0 & 0 & S_{66}\end{bmatrix} \quad [4.19]$$

Expresando las componentes de la matriz de flexibilidad en función de las constantes elásticas del material:

$$[S]=\begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_2} & -\frac{\nu_{13}}{E_3} & 0 & 0 & \frac{\nu_{16}}{E_6} \\ -\frac{\nu_{21}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_3} & 0 & 0 & \frac{\nu_{26}}{E_6} \\ -\frac{\nu_{31}}{E_1} & -\frac{\nu_{32}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & \frac{\nu_{36}}{E_6} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{E_4} & \frac{\nu_{45}}{E_5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\nu_{54}}{E_4} & \frac{1}{E_5} & 0 \\ \frac{\nu_{61}}{E_1} & \frac{\nu_{62}}{E_2} & \frac{\nu_{63}}{E_3} & 0 & 0 & \frac{1}{E_6} \end{bmatrix} \qquad [4.20]$$

4.3.2 SIMETRÍA ORTÓTROPA

Si se aumenta el grado de simetría del material, se llega a lo que se conoce como simetría ortótropa, en la que el material presenta los planos 1-2, 2-3 y 3-1, como planos de simetría. En estas condiciones, la ecuación constitutiva sería:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \qquad [4.21]$$

que presenta 12 constantes distintas no nulas de las cuales sólo existen 9 independientes entre sí. La matriz de flexibilidad en este caso sería:

$$[S]=\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \quad [4.22]$$

Expresando la matriz [S] en función de las constantes elásticas del material:

$$[S]=\begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_2} & -\frac{\nu_{13}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{31}}{E_1} & -\frac{\nu_{32}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{E_4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{E_5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{E_6} \end{bmatrix} \quad [4.23]$$

Las componentes de la matriz de rigidez también se puede expresar en función de las constantes elásticas:

$$
\begin{aligned}
c_{11} &= (1-\nu_{23}\nu_{32})\ \upsilon E_1 \\
c_{22} &= (1-\nu_{31}\nu_{13})\ \upsilon E_2 \\
c_{33} &= (1-\nu_{21}\nu_{12})\ \upsilon E_3 \\
c_{12} &= (\nu_{12}+\nu_{13}\nu_{32})\ \upsilon E_1 = (\nu_{21}+\nu_{23}\nu_{31})\ \upsilon E_2 \\
c_{13} &= (\nu_{13}+\nu_{12}\nu_{23})\ \upsilon E_1 = (\nu_{31}+\nu_{32}\nu_{21})\ \upsilon E_3 \\
c_{23} &= (\nu_{23}+\nu_{21}\nu_{13})\ \upsilon E_2 = (\nu_{32}+\nu_{31}\nu_{12})\ \upsilon E_3 \\
c_{44} &= G_{23} = E_4 \\
c_{55} &= G_{31} = E_5 \\
c_{66} &= G_{12} = E_6
\end{aligned}
\qquad [4.24]
$$

donde

$$\upsilon = 1/(1-\nu_{12}\nu_{21}-\nu_{32}\nu_{23}-\nu_{13}\nu_{31}-2\nu_{21}\nu_{13}\nu_{32})$$

4.3.3 SIMETRÍA TRANSVERSALMENTE ISÓTROPA

Si el plano 2-3 fuera isótropo la ecuación constitutiva correspondiente podría expresarse como:

$$
\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} =
\begin{bmatrix}
c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\
c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\
c_{21} & c_{32} & c_{22} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{(c_{22}-c_{23})}{2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix}
\qquad [4.25]
$$

o bien como:

$$
\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} =
\begin{bmatrix}
S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\
S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\
S_{21} & S_{32} & S_{22} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2\cdot(S_{22}-S_{23}) & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}
\qquad [4.26]
$$

en la que, el número de constantes distintas de cero es igual a 12. De éstas sólo hay 5 independientes entre sí. En este caso las componentes de la matriz de rigidez son:

$$
\begin{aligned}
c_{11} &= \left(1-\nu_{23}^2\right)\ \upsilon E_1 \\
c_{22} &= c_{33} = \left(1-\nu_{21}\nu_{12}\right)\ \upsilon E_2 \\
c_{12} &= c_{13} = \nu_{21}\left(1+\nu_{23}\right)\ \upsilon E_2 = \nu_{12}\left(1+\nu_{23}\right)\ \upsilon E_1 \\
c_{23} &= \left(\nu_{23}+\nu_{21}\nu_{12}\right)\ \upsilon E_2 \\
c_{44} &= \left(1-\nu_{23}-2\nu_{21}\nu_{12}\right)\ \upsilon E_2/2 \\
c_{55} &= c_{66} = G_{12} = E_6
\end{aligned}
\qquad [4.27]
$$

donde

$$\upsilon = 1/\left(1+\nu_{23}\right)\left(1-\nu_{23}-2\nu_{21}\nu_{12}\right)$$

4.3.4 SIMETRÍA ISÓTROPA

Si el material presentara un comportamiento isótropo, su ecuación constitutiva sería:

$$
\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\
c_{21} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\
c_{21} & c_{21} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dfrac{(c_{11}-c_{12})}{2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{(c_{11}-c_{12})}{2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{(c_{11}-c_{12})}{2}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix}
\qquad [4.28]
$$

siendo el número de constantes independientes igual a dos.

$$
\begin{aligned}
c_{11} &= c_{22} = c_{33} = (1-\nu)VE \\
c_{12} &= c_{13} = c_{23} = \nu VE \\
c_{44} &= c_{55} = c_{66} = G = E/2(1+\nu)
\end{aligned}
\qquad [4.29]
$$

donde

$$V = 1/(1+\nu)(1-2\nu)$$

En este caso la matriz de flexibilidad se reduce a:

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{11} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{21} & S_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\cdot(S_{11}-S_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\cdot(S_{11}-S_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\cdot(S_{11}-S_{12}) \end{bmatrix} \quad [4.30]$$

que coincide con la ecuación [4.8], considerando que:

$$S_{11} = \frac{1}{E}$$

$$S_{12} = -\frac{\nu}{E} \quad [4.31]$$

$$2\cdot(S_{11}-S_{12}) = \frac{2\cdot(1+\nu)}{E} = \frac{1}{G}$$

4.4. RELACION TENSION DEFORMACION PARA UNA LÁMINA

4.4.1 PRIMER EJE EN DIRECCIÓN DE LAS FIBRAS

Un sólido como el representado en la Figura 4.4, en el que sus bases son paralelas al plano 1-2, cuya altura (dimensión según la dirección 3) toma un valor muy pequeño en comparación con sus dimensiones características de sus bases, y sometido a un sistemas de fuerzas, todas ellas también paralelas al plano 1-2, se encuentra en un estado tensional denominado estado de tensión plana.

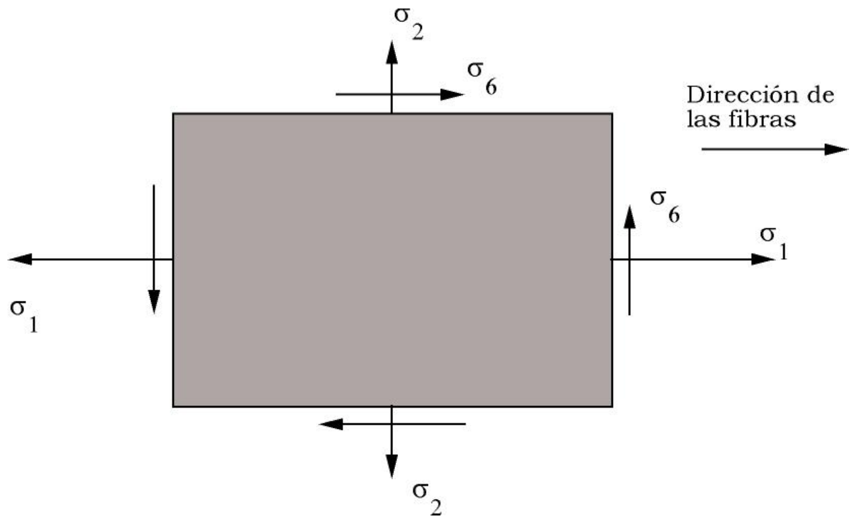


Figura 4.4.

El estado tensional en cualquier punto del interior del sólido se puede expresar del siguiente modo:

$$\sigma_1 \ \ \sigma_2 \ \ \sigma_6 \neq 0 \qquad\qquad \varepsilon_1 \ \ \varepsilon_2 \ \ \varepsilon_3 \ \ \varepsilon_6 \neq 0$$
$$\sigma_3 \ \ \sigma_4 \ \ \sigma_5 = 0 \qquad\qquad \varepsilon_4 \ \ \varepsilon_5 \ = 0 \tag{4.32}$$

La ecuación constitutiva puede escribirse como:

$$\{\varepsilon\} = [S]\{\sigma\} \qquad ó \qquad \varepsilon_i = s_{ij}\sigma_j \qquad i, j = 1,2,\ldots,6 \tag{4.33}$$

La deformación ε_3, a su vez, puede obtenerse como:

$$\varepsilon_3 = s_{31}\sigma_1 + s_{32}\sigma_2 + s_{36}\sigma_6 \tag{4.34}$$

y la ecuación que liga tensiones con deformaciones puede establecerse como:

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} \qquad ó \qquad \sigma_i = c_{ij}\varepsilon_j \qquad i, j = 1,2,..,6 \tag{4.35}$$

que, una vez desarrollada, proporciona el siguiente sistema de ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
&\sigma_1 = c_{11}\varepsilon_1 + c_{12}\varepsilon_2 + c_{13}\varepsilon_3 + c_{16}\varepsilon_6 \\
&\sigma_2 = c_{21}\varepsilon_1 + c_{22}\varepsilon_2 + c_{23}\varepsilon_3 + c_{26}\varepsilon_6 \\
&\sigma_3 = c_{31}\varepsilon_1 + c_{32}\varepsilon_2 + c_{33}\varepsilon_3 + c_{36}\varepsilon_6 = 0 \\
&\sigma_4 = \sigma_5 = 0 \\
&\sigma_6 = c_{61}\varepsilon_1 + c_{62}\varepsilon_2 + c_{63}\varepsilon_3 + c_{66}\varepsilon_6
\end{aligned}
\qquad [4.36]
$$

Eliminando σ_3 de todas las ecuaciones anteriores se obtiene la relación:

$$
\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \qquad [4.37]
$$

en la que la matriz $Q_{ij} = c_{ij} - c_{i3}c_{j3} / c_{33}$ recibe el nombre de *matriz de rigidez en tensión plana*.

Si el material presentara un comportamiento ortótropo, con ejes de simetría en las direcciones 1 y 2, la matriz de rigidez anterior se reduciría a:

$$
\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \qquad [4.38]
$$

donde las componentes son:

$$
\begin{aligned}
&Q_{11} = E_1 / (1 - \nu_{12}\nu_{21}) \\
&Q_{12} = \nu_{21}E_2 / (1 - \nu_{12}\nu_{21}) = \nu_{12}E_1 / (1 - \nu_{12}\nu_{21}) \\
&Q_{22} = E_2 / (1 - \nu_{12}\nu_{21}) \\
&Q_{66} = G_{12} = E_6
\end{aligned}
\qquad [4.39]
$$

Sí E_1=E_2 se dice que existe simetría cuadrada y, en este caso:

$$
\begin{aligned}
&Q_{11} = Q_{22} = E / (1 - \nu^2) \\
&Q_{12} = \nu Q_{11} \\
&Q_{66} = E_6 \neq E / 2(1 + \nu)
\end{aligned}
\qquad [4.40]
$$

Utilizando la equivalencia:

$$\mathrm{E}_{\mathrm{x}}^{0^\circ} = E_1 \qquad \mathrm{E}_{\mathrm{y}}^{0^\circ} = E_2 \qquad \nu_x^{0^\circ} = \nu_{21} \qquad \nu_y^{0^\circ} = \nu_{12}$$

[4.41]

las expresiones anteriores pueden ponerse como:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & 0 \\ Q_{xy} & Q_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma \end{Bmatrix}$$

$$\{\sigma\} = [Q] \cdot \{\varepsilon\}$$ [4.42]

$$Q_{xx} = E_x^{0^\circ} / \left(1 - \nu_x^{0^\circ} \cdot \nu_y^{0^\circ}\right) \qquad Q_{yy} = E_y^{0^\circ} / \left(1 - \nu_x^{0^\circ} \cdot \nu_y^{0^\circ}\right)$$

$$Q_{xy} = \nu_x^{0^\circ} \cdot Q_{yy} = \nu_y^{0^\circ} \cdot Q_{xx}$$ [4.43]

Si el material fuera isótropo:

$$Q_{xx} = Q_{yy} = E / \left(1 - \nu^2\right) \qquad Q_{xy} = \nu \cdot E / \left(1 - \nu^2\right)$$

$$Q_{ss} = G = E / 2 \cdot (1 + \nu)$$ [4.44]

4.4.2 EN EJES GENERALES

Hasta ahora, se ha encontrado la relación entre deformaciones y tensiones o, lo que es equivalente, entre tensiones y deformaciones, suponiendo que la tensión σ_1 actuaba en la dirección de las fibras. En otras palabras, se ha estudiado en profundidad el caso representado en la figura 4.4. Pero ¿qué sucede cuando se tiene una situación como la representada en la Figura 4.5? ¿Cómo se pueden expresar las tensiones $\sigma_1', \sigma_2', \sigma_6'$ en función de las correspondientes deformaciones $\varepsilon_1', \varepsilon_2', \varepsilon_6'$ o viceversa?

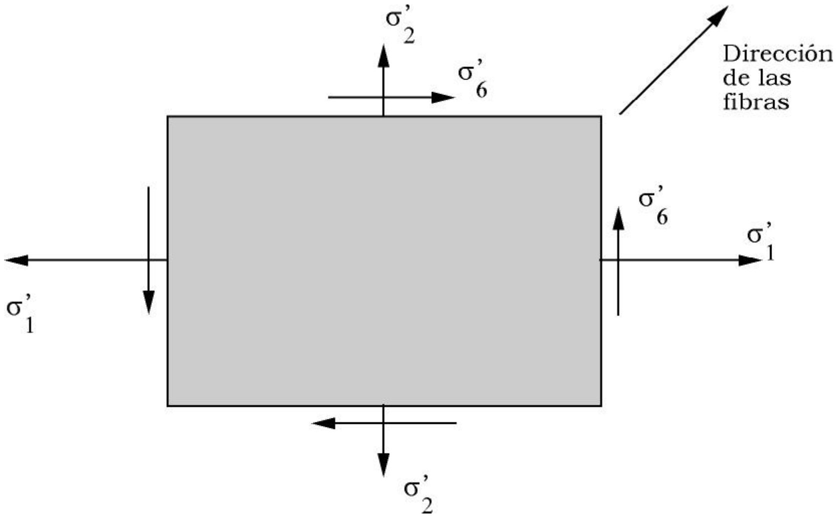


Figura 4.5.

Este problema puede resolverse de la siguiente manera utilizando la matriz de cambio de coordenadas [*T*] que se definirá más adelante. Supóngase que las dirección 1 es la dirección de las fibras y que se desea establecer la relación entre las tensiones y deformaciones según otras direcciones (representadas con primas en el dibujo) que forman una ángulo θ con las anteriores, tal como se representa en la Figura 4.6.

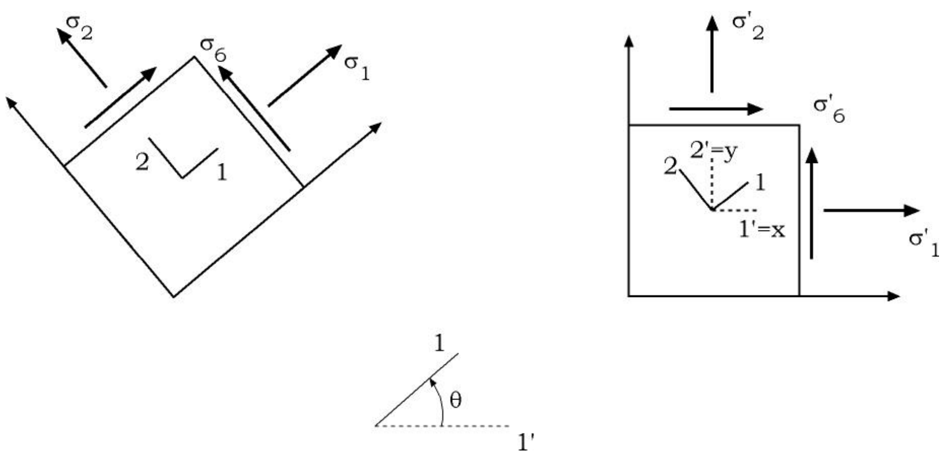


Figura 4.6.

Las nuevas relaciones tensión-deformación ó deformación-tensión pueden escribirse por medio de la matriz de transformación [T].

Para la tensión

$$\{\sigma'\} = [T]\{\sigma\}$$

$$\{\sigma\} = [T]^{-1}\,\{\sigma'\} \qquad [4.45]$$

Donde:

$\{\sigma\}$ es la tensión expresada en los ejes 12 (ejes materiales)

$\{\sigma^{'}\}$ es la tensión expresada en los ejes 1'2' (o más comúnmente ejes xy) (ejes globales)

y para la deformación:

$$\{\varepsilon\} = \left[T^{T}\right]\{\varepsilon'\}$$

$$\{\varepsilon'\} = \left[T^{T}\right]^{-1}\,\{\varepsilon\} \qquad [4.46]$$

En este caso:

$\{\varepsilon\}$ es la tensión expresada en los ejes 12 (ejes materiales)

$\{\varepsilon^{'}\}$ es la tensión expresada en los ejes 1'2' (o más comúnmente ejes x-y) (ejes globales)

Las diferencias entre la ecuación [4.45] y la [4.46] responde a que la matriz de transformación se debe aplicar sobre el tensor de deformaciones, tal como muestran las ecuaciones [4.47] y [4.48].

$$\left\{\varepsilon_1^{'}, \varepsilon_2^{'}, \frac{\varepsilon_6^{'}}{2}\right\} = [T]\left\{\begin{matrix}\varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \dfrac{\varepsilon_6}{2}\end{matrix}\right\} \qquad [4.47]$$

$$\{\varepsilon_1', \varepsilon_2', \varepsilon_6'\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot [T] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix}$$

$$\{\varepsilon_1', \varepsilon_2', \varepsilon_6'\} = \left[\mathrm{T}^{\mathrm{T}}\right]^{-1} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \qquad [4.48]$$

$$\{\varepsilon'\} = \left[T^T\right]^{-1} \{\varepsilon\}$$

La matriz de transformación se puede expresar como:

$$[T] = \begin{bmatrix} \mathrm{m}^2 & \mathrm{n}^2 & -2\mathrm{mn} \\ \mathrm{n}^2 & \mathrm{m}^2 & +2\mathrm{mn} \\ +\mathrm{mn} & -\mathrm{mn} & \mathrm{m}^2 - \mathrm{n}^2 \end{bmatrix} \qquad [4.49]$$

$$[T]^{-1} = \begin{bmatrix} \mathrm{m}^2 & \mathrm{n}^2 & +2\mathrm{mn} \\ \mathrm{n}^2 & \mathrm{m}^2 & -2\mathrm{mn} \\ -\mathrm{mn} & +\mathrm{mn} & \mathrm{m}^2 - \mathrm{n}^2 \end{bmatrix} \qquad [4.50]$$

$$\left[T^T\right] = \begin{bmatrix} \mathrm{m}^2 & \mathrm{n}^2 & +\mathrm{mn} \\ \mathrm{n}^2 & \mathrm{m}^2 & -\mathrm{mn} \\ -2\mathrm{mn} & +2\mathrm{mn} & \mathrm{m}^2 - \mathrm{n}^2 \end{bmatrix} \qquad [4.51]$$

$$\left[T^T\right]^{-1} = \begin{bmatrix} \mathrm{m}^2 & \mathrm{n}^2 & -\mathrm{mn} \\ \mathrm{n}^2 & \mathrm{m}^2 & +\mathrm{mn} \\ +2\mathrm{mn} & -2\mathrm{mn} & \mathrm{m}^2 - \mathrm{n}^2 \end{bmatrix} \qquad [4.52]$$

A continuación se particularizan las matrices [*T*] para diferentes ángulos:

$\theta = 0°$

$$[T]^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad [T^T]^{-1(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\theta = 90°$

$$[T]^{(90)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad [T^T]^{-1(90)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$\theta = 45°$

$$[T]^{(45)} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & -1 \\ 0.5 & 0.5 & +1 \\ +0.5 & -0.5 & 0 \end{bmatrix} \qquad [T^T]^{-1(45)} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & +0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ +1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\theta = -45°$

$$[T]^{(-45)} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & +1 \\ 0.5 & 0.5 & -1 \\ -0.5 & +0.5 & 0 \end{bmatrix} \qquad [T^T]^{-1(-45)} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & +0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ -1 & +1 & 0 \end{bmatrix}$$

La ecuación constitutiva en los ejes 12 será:

$$\{\sigma\} = [Q]\{\varepsilon\}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{SS} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \qquad [4.53]$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{SS} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma \end{Bmatrix}$$

A partir de las ecuaciones [4.45], [4.46], [4.53], la ecuación constitutiva se puede expresar como:

$$\{\sigma'\} = [T]^{-1}[\mathrm{Q}][T^T]^{-1}\{\varepsilon'\}$$

$$\{\sigma'\} = \left[\bar{\mathrm{Q}}\right]\{\varepsilon'\} \qquad [4.54]$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma'_1\\ \sigma'_2\\ \sigma'_6\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\overline{Q}_{xx} & \overline{Q}_{xy} & \overline{Q}_{xs}\\ \overline{Q}_{yx} & \overline{Q}_{yy} & \overline{Q}_{ys}\\ \overline{Q}_{sx} & \overline{Q}_{sy} & \overline{Q}_{ss}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon'_1\\ \varepsilon'_2\\ \varepsilon'_6\end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\overline{Q}_{xx} & \overline{Q}_{xy} & \overline{Q}_{xs}\\ \overline{Q}_{yx} & \overline{Q}_{yy} & \overline{Q}_{ys}\\ \overline{Q}_{sx} & \overline{Q}_{sy} & \overline{Q}_{ss}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma\end{Bmatrix}$$

En forma desarrollada la matriz constitutiva de la lámina en unos ejes que forman un ángulo θ con la dirección de las fibras es:

$$\begin{aligned}
\overline{Q}_{xx} &= Q_{xx}\cos^4\theta + 2(Q_{xy}+2Q_{ss})\,sen^2\theta\cos^2\theta + Q_{yy}\,sen^4\theta\\
\overline{Q}_{yx} &= (Q_{xx}+Q_{yy}-4Q_{ss})\,sen^2\theta\cos^2\theta + Q_{xy}(sen^4\theta+\cos^4\theta)\\
\overline{Q}_{yy} &= Q_{xx}\,sen^4\theta + 2(Q_{xy}+2Q_{ss})\,sen^2\theta\cos^2\theta + Q_{yy}\cos^4\theta\\
\overline{Q}_{xs} &= (Q_{xx}-Q_{xy}-2Q_{ss})\,sen\theta\cos^3\theta + (Q_{xy}-Q_{yy}+2Q_{ss})\,sen^3\theta\cos\theta\\
\overline{Q}_{ys} &= (Q_{xx}-Q_{xy}-2Q_{ss})\,sen^3\theta\cos\theta + (Q_{xy}-Q_{yy}+2Q_{ss})\,sen\theta\cos^3\theta\\
\overline{Q}_{ss} &= (Q_{xx}+Q_{yy}-2Q_{xy}-2Q_{ss})\,sen^2\theta\cos^2\theta + Q_{ss}(sen^4\theta+\cos^4\theta)
\end{aligned} \qquad [4.55]$$

De manera análoga se puede definir la matriz de flexibilidad que relacionará las deformaciones con la tensiones. En unos ejes que coincidan con la dirección de las fibras su expresión será:

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_6\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}S_{11} & S_{12} & 0\\ S_{12} & S_{22} & 0\\ 0 & 0 & S_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_6\end{Bmatrix} \qquad [4.56]$$

donde las componentes son:

$$S_{11} = \frac{1}{E_1}$$

$$S_{22} = \frac{1}{E_2}$$

$$S_{66} = \frac{1}{G_{12}} \qquad [4.57]$$

$$S_{12} = -\frac{\nu_{12}}{E_2} = -\frac{\nu_{21}}{E_1}$$

La matriz de flexibilidad en unos ejes que forman un ángulo θ con la dirección de las fibras se puede estimar también con la matriz de transformación [T], en este caso su valor es:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{S}_{xx} & \overline{S}_{xy} & \overline{S}_{xs} \\ \overline{S}_{yx} & \overline{S}_{yy} & \overline{S}_{ys} \\ \overline{S}_{sx} & \overline{S}_{sy} & \overline{S}_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau \end{Bmatrix} \qquad [4.58]$$

Y en forma desarrollada:

$$\overline{S}_{xx} = S_{xx} \cos^4\theta + (2 \cdot S_{xy} + S_{ss})\, sen^2\theta \cos^2\theta + S_{yy}\, sen^4\theta$$

$$\overline{S}_{yx} = (S_{xx} + S_{yy} - S_{ss})\, sen^2\theta \cos^2\theta + S_{xy}(sen^4\theta + \cos^4\theta)$$

$$\overline{S}_{yy} = S_{xx}\, sen^4\theta + (2S_{xy} + S_{ss})\, sen^2\theta \cos^2\theta + S_{yy} \cos^4\theta$$

$$\overline{S}_{xs} = (2S_{xx} - 2S_{xy} - S_{ss})\, sen\,\theta \cos^3\theta - (2S_{yy} - 2S_{xy} - S_{ss})\, sen^3\theta \cos\theta \qquad [4.59]$$

$$\overline{S}_{ys} = (2S_{xx} - 2S_{xy} - Q_{ss})\, sen^3\theta \cos\theta - (-2S_{xy} + 2S_{yy} - 2S_{ss})\, sen\,\theta \cos^3\theta$$

$$\overline{S}_{ss} = 2(2S_{xx} + 2S_{yy} - 4S_{xy} - S_{ss})\, sen^2\theta \cos^2\theta + S_{ss}(sen^4\theta + \cos^4\theta)$$

Por analogía entre la ecuación [4.57] y la [4.59] se pueden definir unas constantes elásticas aparentes de la lámina.

$$E_x = \frac{1}{\bar{S}_{xx}}$$

$$E_y = \frac{1}{\bar{S}_{yy}}$$

$$G_{xy} = \frac{1}{\bar{S}_{ss}}$$ [4.60]

$$\nu_{yx} = -\frac{-\bar{S}_{xy}}{\bar{S}_{xx}}$$

$$\nu_{xy} = -\frac{-\bar{S}_{xy}}{\bar{S}_{yy}}$$

cuyos valores son

$$\frac{1}{E_x} = \frac{1}{E_1} \cdot cos^4\,\theta + \left(\frac{1}{G_{12}} - \frac{2 \cdot \nu_{21}}{E_1}\right) \cdot sen^2\,\theta \cdot cos^2\,\theta + \frac{1}{E_2} \cdot sen^4\,\theta \qquad [4.61]$$

$$\frac{1}{E_y} = \frac{1}{E_1} \cdot sen^4\,\theta + \left(\frac{1}{G_{12}} - \frac{2 \cdot \nu_{21}}{E_1}\right) \cdot sen^2\,\theta \cdot cos^2\,\theta + \frac{1}{E_2} \cdot cos^4\,\theta \qquad [4.62]$$

$$\frac{1}{G_{xy}} = 2 \cdot \left(\frac{2}{E_1} + \frac{2}{E_2} - \frac{1}{G_{12}} + \frac{4 \cdot \nu_{21}}{E_1}\right) \cdot sen^2\,\theta \cdot cos^2\,\theta + \frac{1}{G_{12}} \cdot \left(sen^4\,\theta + cos^4\,\theta\right) \qquad [4.63]$$

$$\nu_{yx} = E_x \cdot \left[\frac{\nu_{21}}{E_1} \cdot \left(sen^4\,\theta + cos^4\,\theta\right) - \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} - \frac{1}{G_{12}}\right) \cdot sen^2\,\theta \cdot cos^2\,\theta\right] \qquad [4.64]$$

$$\nu_{xy} = E_y \cdot \left[\frac{\nu_{21}}{E_1} \cdot \left(sen^4\,\theta + cos^4\,\theta\right) - \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} - \frac{1}{G_{12}}\right) \cdot sen^2\,\theta \cdot cos^2\,\theta\right] \qquad [4.65]$$

4.5. INVARIANTES DE UNA LÁMINA ORTOTROPA

La matriz de rigidez en ejes globales de una lámina ortótropa se ha mostrado en las ecuaciones [4.55] y [4.56]. Se podría demostrar, con más o menos trabajo analítico, que, las ecuaciones anteriores se pueden rescribir de la manera siguiente:

$$
\begin{aligned}
\overline{Q}_{11} &= U_1 + U_2 \cos 2\theta + U_3 \cos 4\theta \\
\overline{Q}_{12} &= U_4 - U_3 \cos 4\theta \\
\overline{Q}_{22} &= U_1 - U_2 \cos 2\theta + U_3 \cos 4\theta \\
\overline{Q}_{16} &= -\frac{1}{2} U_2 \, sen\, 2\theta - U_3 \, sen\, 4\theta \\
\overline{Q}_{26} &= -\frac{1}{2} U_2 \, sen\, 2\theta + U_3 \, sen\, 4\theta \\
\overline{Q}_{66} &= U_5 - U_3 \cos 4\theta
\end{aligned}
\qquad [4.66]
$$

donde:

$$
\begin{aligned}
U_1 &= \frac{3Q_{11} + 3Q_{22} + 2Q_{12} + 4Q_{66}}{8} \\
U_2 &= \frac{Q_{11} - Q_{22}}{2} \\
U_3 &= \frac{Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 4Q_{66}}{8} \\
U_4 &= \frac{Q_{11} + Q_{22} + 6Q_{12} - 4Q_{66}}{8} \\
U_5 &= \frac{Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} + 4Q_{66}}{8}
\end{aligned}
\qquad [4.67]
$$

Así, los nuevos elementos ($\overline{Q}_{ij}$) de la matriz de rigidez se pueden expresar en función de unos invariantes (U_i), que son independientes de la orientación de la lámina, afectados, o no, por funciones trigonométricas del ángulo θ de orientación de la lámina. Por ejemplo, el término $\overline{Q}_{11}$ de la nueva matriz de rigidez puede ponerse como:

$$\overline{Q}_{11} = U_1 + U_2 \cos 2\theta + U_3 \cos 4\theta \qquad [4.68]$$

Es decir, dicho término se puede expresar como suma de una cantidad constante, e independiente de la orientación de la lámina (U_1), más otros sumandos que dependen de θ y que pueden ser negativos pero que, en valor absoluto, su contribución al valor de $\overline{Q}_{11}$ es inferior a la del sumando U_1. Lo anterior se representa, esquemáticamente, en el croquis siguiente:

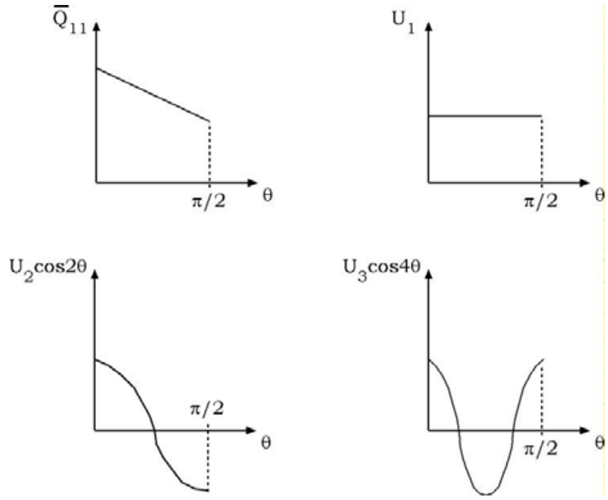


Figura 4.7.

A partir de los invariantes anteriores se pueden definir, para el material ortótropo, unas constantes cuasi-isótropas que corresponden a un límite inferior de las rigideces del material y que se utilizan, en la práctica, para tener la certeza de que, sea cual sea el ángulo de orientación de las tensiones, el comportamiento de la lámina es, como mínimo, igual al de la lámina cuasi-isótropa.

Llamando $D = U_1^2 - U_4^2$, se pueden definir las siguientes constantes cuasi-isótropas:

$$\begin{cases} \mathrm{E}^{\mathrm{iso}} = D / U_1 = (U_1{}^2 - U_4{}^2) / U_1 = U_1\left(1 - \left(\nu^{iso}\right)^2\right) \\ \nu^{iso} = U_4 / U_1 \\ G^{iso} = U_5 \end{cases} \qquad [4.69]$$

4.6. RESUMEN

En este apartado se resumen las principales relaciones mostradas en este capítulo. En ejes locales:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_y}{E_y} & 0 \\ -\frac{\nu_x}{E_x} & \frac{1}{E_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau \end{Bmatrix}$$

$$\{\varepsilon\} = [S]\{\sigma\}$$

Relación deformación-tensión: $\{\varepsilon\} = [S]\{\sigma\}$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{SS} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma \end{Bmatrix}$$

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \qquad Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$$

$$Q_{12} = \nu_{12} Q_{21} = \nu_{21} Q_{11} \qquad Q_{SS} = G_{12}$$

En ejes globales:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{xx} & \overline{Q}_{xy} & \overline{Q}_{xs} \\ \overline{Q}_{yx} & \overline{Q}_{yy} & \overline{Q}_{ys} \\ \overline{Q}_{sx} & \overline{Q}_{sy} & \overline{Q}_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{S}_{xx} & \overline{S}_{xy} & \overline{S}_{xs} \\ \overline{S}_{yx} & \overline{S}_{yy} & \overline{S}_{ys} \\ \overline{S}_{sx} & \overline{S}_{sy} & \overline{S}_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau \end{Bmatrix}$$

$$\overline{Q}_{xx} = Q_{xx} cos^4 \theta + 2(Q_{xy} + 2Q_{ss}) sen^2 \theta cos^2 \theta + Q_{yy} sen^4 \theta$$

$$\overline{Q}_{yx} = (Q_{xx} + Q_{yy} - 4Q_{ss}) sen^2 \theta cos^2 \theta + Q_{xy}(sen^4 \theta + cos^4 \theta)$$

$$\overline{Q}_{yy} = Q_{xx} sen^4 \theta + 2(Q_{xy} + 2Q_{ss}) sen^2 \theta cos^2 \theta + Q_{yy} cos^4 \theta$$

$$\overline{Q}_{xs} = (Q_{xx} - Q_{xy} - 2Q_{ss}) sen \theta cos^3 \theta + (Q_{xy} - Q_{yy} + 2Q_{ss}) sen^3 \theta cos \theta$$

$$\overline{Q}_{ys} = (Q_{xx} - Q_{xy} - 2Q_{ss}) sen^3 \theta cos \theta + (Q_{xy} - Q_{yy} + 2Q_{ss}) sen \theta cos^3 \theta$$

$$\overline{Q}_{ss} = (Q_{xx} + Q_{yy} - 2Q_{xy} - 2Q_{ss}) sen^2 \theta cos^2 \theta + Q_{ss}(sen^4 \theta + cos^4 \theta)$$

$$\overline{S}_{xx} = S_{xx} cos^4 \theta + (2 \cdot S_{xy} + S_{ss}) sen^2 \theta cos^2 \theta + S_{yy} sen^4 \theta$$

$$\overline{S}_{yx} = (S_{xx} + S_{yy} - S_{ss}) sen^2 \theta cos^2 \theta + S_{xy}(sen^4 \theta + cos^4 \theta)$$

$$\overline{S}_{yy} = S_{xx} sen^4 \theta + (2S_{xy} + S_{ss}) sen^2 \theta cos^2 \theta + S_{yy} cos^4 \theta$$

$$\overline{S}_{xs} = (2S_{xx} - 2S_{xy} - S_{ss}) sen \theta cos^3 \theta - (2S_{yy} - 2S_{xy} - S_{ss}) sen^3 \theta cos \theta$$

$$\overline{S}_{ys} = (2S_{xx} - 2S_{xy} - Q_{ss}) sen^3 \theta cos \theta - (-2S_{xy} + 2S_{yy} - 2S_{ss}) sen \theta cos^3 \theta$$

$$\overline{S}_{ss} = 2(2S_{xx} + 2S_{yy} - 4S_{xy} - S_{ss}) sen^2 \theta cos^2 \theta + S_{ss}(sen^4 \theta + cos^4 \theta)$$