CAPÍTULO 5

TEORÍAS SOBRE LA RESISTENCIA A ROTURA DE UNA LÁMINA

5.1. INTRODUCCIÓN

Existen diversos criterios de rotura relativos a una lámina ortótropa. La bondad de cada uno de ellos sólo puede ser establecida comparando los resultados teóricos con los experimentales. En este capítulo se describen los criterios más utilizados.

Normalmente, las tensiones o deformaciones de rotura de una lámina se determinan mediante ensayos unidireccionales en la dirección de las fibras o en dirección perpendicular a las mismas. Sin embargo, hay que tener siempre presente que, en general, una lámina dentro de un laminado se encuentra sometida a un estado de tensión biaxial y de corte (σ_1, σ_2 y σ_6 distintas de cero). En lo que sigue se utilizará la siguiente nomenclatura, entendiendo que, la dirección longitudinal es la de las fibras y la transversal la ortogonal a ella en el plano de la lámina.

X_t = resistencia a tracción longitudinal

X_c = resistencia a compresión longitudinal

Y_t = resistencia a tracción transversal

Y_c = resistencia a compresión transversal

S = resistencia al corte

En la tabla 3.1 se recogen algunos resultados de estos parámetros para diferentes tipos de refuerzos dentro de una matrix epoxi suponiendo un volumen de fibra del 60%. También se incluyen los módulos de elasticidad y los coeficientes de dilatación térmica en dirección de las fibras (dirección 1) y en dirección transversal a ellas (dirección 2).

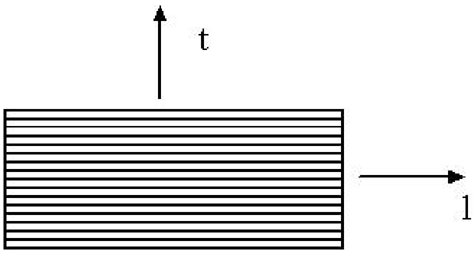

Figura 5.1.

	VIDRIO	ARAMIDA	CARBONO
Densidad (kg/m^3)	2080	1350	1530
X_t (MPa)	**1250**	**1410**	**1270**
X_c (MPa)	600	280	1130
Y_t (MPa)	**35**	**28**	**42**
Y_c (MPa)	141	141	141
E_1 (GPa)	**45**	**85**	**134**
E_2 (GPa)	**12**	**56**	**7**
α_1 $(^oC)^{-1}$	0.4÷0.7x10^{-5}	-0.4x10^{-5}	-0.12x10^{-5}
α_2 $(^oC)^{-1}$	1.6÷2.0x10^{-5}	5.8x10^{-5}	3.4x10^{-5}

Tabla 5.1

5.2. CRITERIO DE TENSIÓN MÁXIMA

Este criterio se basa en suponer que la lámina no rompe si las tensiones dentro de la lámina, expresadas en unos ejes que coincidan con la dirección de las fibras, son menores que las resistencias respectivas obtenidas de un ensayos de carga uniaxiales y de cizalladura pura. Para fijar ideas supóngase el estado tensional representado en la figura 5.2 en el que, además, se han dibujado las fibras. Si σ_1 y σ_2 fueran tensiones de tracción,

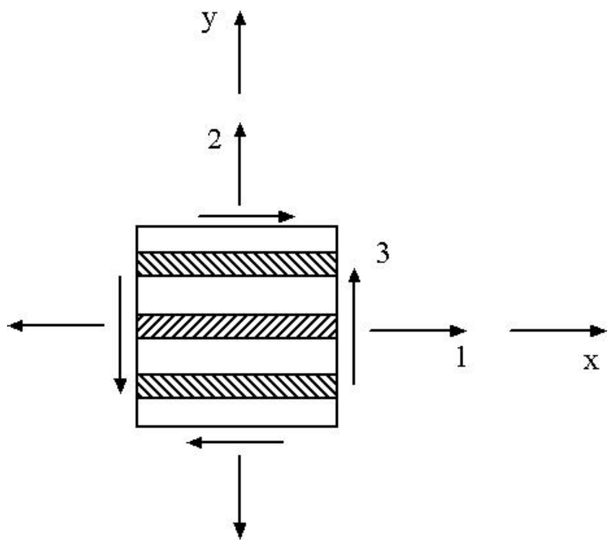

Figura 5.2

la lámina no rompería mientras se verificase:

$$\begin{aligned} &\sigma_1 < X_t \\ &\sigma_2 < Y_t \\ &|\tau_{máx}| < S \end{aligned} \qquad (5.1)$$

y si las tensiones actuantes fueran de compresión (negativas) la condición sería:

$$\begin{aligned} &\sigma_1 > X_c \\ &\sigma_2 > Y_c \end{aligned} \qquad (5.2)$$

Podemos combinar las dos ecuaciones anteriores en una sola:

$$\begin{aligned} &-X_c < \sigma_1 < X_t \\ &-Y_c < \sigma_2 < Y_t \end{aligned} \qquad (5.3)$$

manteniéndose la relación existente para la tensión tangencial.

Si no se verificase alguna de las inecuaciones anteriores la lámina rompería. Como se observa no existe ninguna interacción entre los posibles modos de fallo; es decir, si σ_1 superara el valor X_t la lámina rompe independientemente de los valores alcanzados por las otras tensiones siempre que éstas, a su vez, no superen sus respectivos valores de rotura.

Si la lámina se encontrara cargada en una dirección que no coincidiese con la dirección de las fibras en la lámina es necesario expresar el estado tensional en ejes locales. Para el caso de un estado de tracción uniaxial el criterio de rotura anterior podría expresarse del siguiente modo:

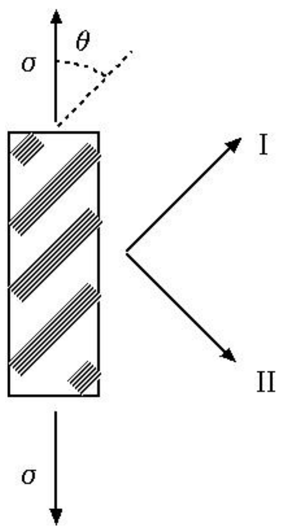

Figura 5.3

$$
\left.
\begin{array}{lcl}
\sigma_1 = \sigma \cdot \cos^2 \theta & & \sigma < \dfrac{X_t}{\cos^2 \theta} \\[2ex]
\sigma_2 = \sigma \cdot \mathrm{sen}^2 \theta & \Rightarrow & \sigma < \dfrac{Y_t}{\mathrm{sen}^2 \theta} \\[2ex]
\tau_{12} = -\sigma \cdot \mathrm{sen}\theta \cdot \cos\theta & & \sigma < \dfrac{S}{\mathrm{sen}\theta \cdot \cos\theta}
\end{array}
\right. \qquad (5.4)
$$

5.3. CRITERIO DE DEFORMACIÓN MÁXIMA

Según este criterio, las deformaciones longitudinales y de corte en el interior de la lámina no deben superar unos determinados valores. Si llamamos:

$$X_{\varepsilon_t}\left(X_{\varepsilon_c}\right) = \text{deformación longitudinal a tracción (o compresión) máxima en la dirección 1.}$$

$$Y_{\varepsilon_t}\left(Y_{\varepsilon_c}\right) = \text{deformación longitudinal a tracción (o compresión) máxima en la dirección 2.}$$

$$S_{\varepsilon} = \text{deformación de corte máxima en el plano 1 - 2.}$$

Las condiciones para que la lámina no rompa son:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_1 < X_{\varepsilon_t} \\ &\varepsilon_2 < Y_{\varepsilon_t} \\ &\left|\gamma_{\text{máx}}\right| < S_{\varepsilon} \end{aligned} \tag{5.5}$$

siempre que las deformaciones ε_1 y ε_2 fueran de tracción (positivas). Si estas deformaciones fueran de compresión (negativas) el criterio sería:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_1 > X_{\varepsilon_c} \\ &\varepsilon_2 > Y_{\varepsilon_c} \end{aligned} \tag{5.6}$$

manteniéndose el correspondiente a la deformación angular. Para determinar la tensión de rotura, aplicando este criterio, pueden presentarse dos casos: en el primero, la tensión actuante sobre la lámina lo hace en la dirección de las fibras,

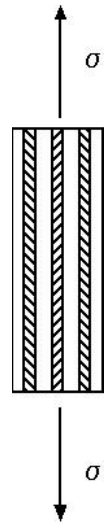

Figura 5.4

En este primer caso el estado de deformaciones es:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma}{E_1}$$
$$\varepsilon_2 = -\nu_{21} \cdot \frac{\sigma}{E_1} \qquad (5.7)$$
$$\gamma = 0$$

Por tanto:

$$\frac{\sigma}{E_1} < X_{\varepsilon_t}$$
$$-Y_{\varepsilon_C} < -\nu_{21} \cdot \frac{\sigma}{E_1} \qquad (5.8)$$

La tensión deberá ser menor que:

$$\sigma < E_1 X_{\varepsilon_T}$$
$$\sigma < \cdot \frac{E_1 \cdot Y_{\varepsilon_C}}{\nu_{21}} \qquad (5.9)$$

y, en el segundo, lo hace oblicuamente a la dirección de aquellas, resultando:

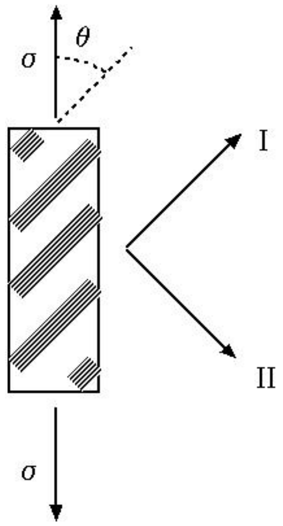

Figura 5.5

$$\sigma_1 = \sigma\cos^2\theta \quad \sigma_2 = \sigma \mathrm{sen}^2\theta \quad \tau_{\text{máx}} = -\sigma \mathrm{sen}\theta\cos\theta$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E_1}\left(\sigma_1 - \nu_{12}\cdot\sigma_2\right) = \frac{1}{E_1}\left(\cos^2\theta - \nu_{12}\mathrm{sen}^2\theta\right)\cdot\sigma$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E_2}\left(\sigma_2 - \nu_{21}\cdot\sigma_1\right) = \frac{1}{E_2}\left(\mathrm{sen}^2\theta - \nu_{21}\cos^2\theta\right)\cdot\sigma \qquad (5.10)$$

$$\gamma_{\text{máx}} = \frac{\tau_{\text{máx}}}{G_{12}} = -\frac{1}{G_{12}}\left(\mathrm{sen}\theta\cdot\cos\theta\right)\cdot\sigma$$

Estas últimas expresiones proporcionan el valor de las deformaciones longitudinales y de corte en función de la tensión aplicada lo que permitiría su comparación con los valores máximos que aquéllas pueden alcanzar.

Por otra parte, si se admitiera un comportamiento elástico-lineal hasta rotura de la lámina, se tendría, aplicando la ley de Hooke:

$$X_{\varepsilon t} = \frac{X_t}{E_1} \qquad Y_{\varepsilon t} = \frac{Y_t}{E_2} \qquad S_\varepsilon = \frac{S}{G_{12}}$$

$$X_{\varepsilon c} = \frac{X_c}{E_1} \qquad Y_{\varepsilon c} = \frac{Y_c}{E_2} \qquad (5.3)$$

por lo que el criterio de rotura equivalente expresado en tensiones pasaría a ser:

$$\sigma < \frac{X}{\cos^2\theta - \nu_{12}\text{sen}^2\theta}$$

$$\sigma < \frac{Y}{\text{sen}^2\theta - \nu_{21}\cos^2\theta} \tag{5.4}$$

$$\sigma < \frac{S}{\cos\theta\,\text{sen}\theta}$$

En este criterio, a diferencia de lo que sucede con el de tensión máxima, se observa que se debe tener en cuenta el efecto Poisson.

5.4. CRITERIO DE TSAI-HILL (1968)

Para materiales anisótropos, Hill estableció un criterio de plastificación basado en el de Von Mises cuya validez comprobó para algunos materiales metálicos. Este criterio hace intervenir una serie de parámetros de plastificación F,G,H,L,M y N. Su expresión general es:

$$(G+H)\sigma_x^2 + (F+H)\sigma_y^2 + (F+G)\sigma_z^2 - 2H\sigma_x\sigma_y - 2G\sigma_x\sigma_z - 2F\sigma_y\sigma_z + \\ + 2L\tau_{yz}^2 + 2M\tau_{xz}^2 + 2N\tau_{xy}^2 = 1 \tag{5.5}$$

Si se particularizara este criterio para el caso de materiales isótropos se comprobaría que es enteramente equivalente al de Von Mises. Si se admitiera un comportamiento del material elástico-lineal hasta rotura, el criterio anterior podría ser considerado como un criterio de rotura en el caso de los materiales compuestos. Tsai relacionó los parámetros F, G, H, L, M y N con las resistencias mecánicas en dirección de las fibras, X, en dirección transversal a ellas, Y, de la resistencia de la lámina en dirección perpendicular a la misma, Z y de la resistencia a cortadura plana, S, e interlaminar S_{xz} y S_{yz}. Tsai supuso que sobre la lámina actuaban estados de carga simples.

Si sólo actuara una tracción en dirección de las fibras la rotura se produciría cuando la tensión se hiciera igual a la resistencia X.

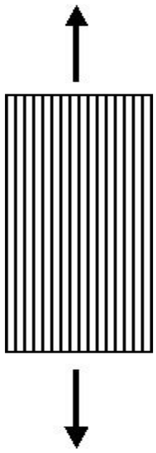

Figura 5.6.

$$\sigma_x = X \tag{5.6}$$

Por otro lado aplicando el criterio de rotura particularizado para este estado de carga en concreto:

$$(G + H)\sigma_x^2 = 1 \tag{5.7}$$

Por tanto:

$$(G + H) = \frac{1}{X^2} \tag{5.8}$$

De igual modo si sólo actuara una tracción en dirección perpendicular a las fibras la rotura se produciría cuando la tensión se hiciera igual a la resistencia Y.

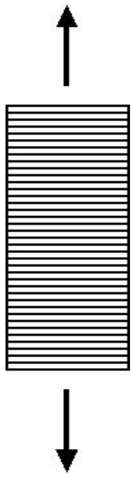

Figura 5.7.

$$\sigma_y = Y \tag{5.9}$$

Por otro lado aplicando el criterio de rotura particularizado para este estado de carga en concreto:

$$(F + H)\sigma_y^2 = 1 \tag{5.10}$$

Por tanto:

$$(F + H) = \frac{1}{Y^2} \tag{5.11}$$

Análogamente sucedería para una carga de tracción actuando en dirección Z:

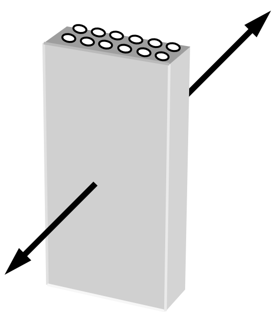

Figura 5.8.

$$\sigma_z = Z$$

$$(F+G)\sigma_Z^2 = 1$$

$$(F+G) = \frac{1}{Z^2} \tag{5.12}$$

Las ecuaciones (3.16), (3.19) y (3.20) forman un sistema de ecuaciones con tres incógnitas F,G y H, resolviéndolo nos queda:

$$2\mathrm{H} = \frac{1}{\mathrm{X}^2} + \frac{1}{\mathrm{Y}^2} - \frac{1}{\mathrm{Z}^2}$$

$$2\mathrm{G} = \frac{1}{\mathrm{X}^2} + \frac{1}{\mathrm{Z}^2} - \frac{1}{\mathrm{Y}^2} \tag{5.13}$$

$$2\mathrm{F} = \frac{1}{\mathrm{Y}^2} + \frac{1}{\mathrm{Z}^2} - \frac{1}{\mathrm{X}^2}$$

Considerando ahora únicamente una tensión de cortadura plana τ_{12}, la rotura se producirá cuando:

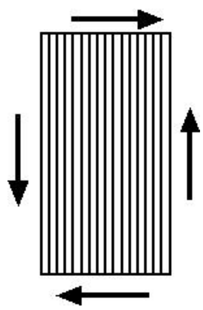

Figura 5.9.

$$\tau_{xy} = \mathrm{S} \tag{5.14}$$

Aplicando el criterio de rotura:

$$2 \cdot \mathrm{N} \cdot \tau_{xy}^2 = 1 \tag{5.15}$$

Por tanto:

$$2N = \frac{1}{S^2} \tag{5.16}$$

Análogamente ocurre para las otras tensiones de cortadura:

$$2L = \frac{1}{S_{yz}^2} \tag{5.17}$$

$$2M = \frac{1}{S_{xz}^2} \tag{5.18}$$

El criterio de Tsai-Hill queda finalmente expresado mediante la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{X^2}\sigma_x^2 + \frac{1}{Y^2}\sigma_y^2 + \frac{1}{Z^2}\sigma_z^2 - \left(\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Z^2}\right)\sigma_x\sigma_y - \left(\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Z^2} - \frac{1}{Y^2}\right)\sigma_x\sigma_z - \\ &-\left(\frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2} - \frac{1}{X^2}\right)\sigma_y\sigma_z + \frac{1}{S_{yz}^2}\tau_{yz}^2 + \frac{1}{S_{xz}^2}\tau_{xz}^2 + \frac{1}{S^2}\tau_{xy}^2 = 1 \end{aligned} \tag{5.19}$$

Si, como es usual, el problema se limitara al caso de una lámina unidireccional trabajando en tensión plana según el plano 1-2 (las fibras en la dirección 1) y admitiendo que Z=Y, tendríamos la siguiente expresión del criterio de Tsai-Hill:

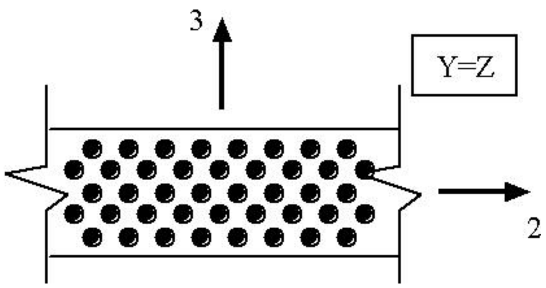

Figura 5.10.

$$\frac{\sigma_1^2}{X^2} - \frac{\sigma_1\sigma_2}{X^2} + \frac{\sigma_2^2}{Y^2} + \frac{\tau_{12}^2}{S^2} = 1 \tag{5.20}$$

que es la expresión más utilizada para resolver problemas.

Si tuviéramos una solicitación sobre la lámina como la representada en el croquis siguiente,

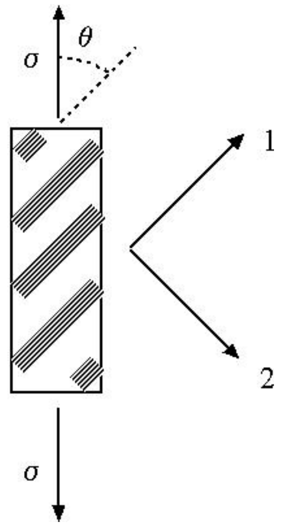

Figura 5.11.

$$\sigma_1 = \sigma \cos^2 \theta \quad \sigma_2 = \sigma \mathrm{sen}^2 \theta \quad \tau_{12} = -\sigma \cos\theta \mathrm{sen}\theta \tag{5.21}$$

el citerio de Tsai-Hill se expresaría:

$$\frac{\cos^4 \theta}{X^2} + \left(\frac{1}{S^2} - \frac{1}{X^2}\right)\cos^2\theta \mathrm{sen}^2\theta + \frac{\mathrm{sen}^4\theta}{Y^2} = \frac{1}{\sigma^2} \tag{5.22}$$

5.5. CRITERIO DE TSAI-WU (1971)

Como se observa a lo largo de esta exposición, la complejidad de los criterios de rotura va en ascenso debido a que hubo que adecuarlos con los resultados experimentales que se iban obteniendo. El criterio de Tsai-Wu es algo más complicado que el de Tsai-Hill y, empleando una notación tensorial, puede ponerse de la forma siguiente:

$$F_i \ \sigma_i + F_{ij}\sigma_i \sigma_j = 1 \qquad i, j = 1, 2, \ldots\ldots\ldots 6 \tag{5.23}$$

siendo F_i y F_{ij} dos tensores de orden 2 y 4 respectivamente.

Para el caso de una lámina ortótropa trabajando en tensión plana, la expresión anterior quedaría como:

$$F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 + F_6\sigma_6 + F_{11}\sigma_1^2 + F_{22}\sigma_2^2 + F_{66}\sigma_6^2 + 2F_{12}\sigma_1\sigma_2 = 1 \tag{5.24}$$

(σ_i = componentes contractadas del tensor de tensiones)

Para determinar los coeficientes que aparecen en el criterio se puede proceder del siguiente modo:

Si realizamos un ensayo de tracción en la dirección de las fibras la rotura de la lámina se producirá cuando:

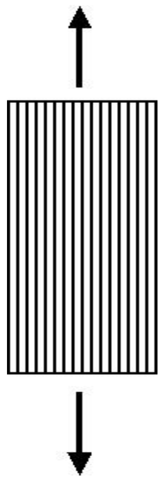

Figura 5.12.

$$\sigma_1 = X \tag{5.25}$$

Aplicando el criterio de Tsai-Wu la rotura se producirá cuando:

$$F_1\sigma_1 + F_{11}\sigma_1^2 = 1 \tag{5.26}$$

Combinando ambas ecuaciones nos queda:

$$F_1 X + F_{11} X^2 = 1 \tag{5.27}$$

Haciendo un ensayo de compresión la rotura se producirá cuando:

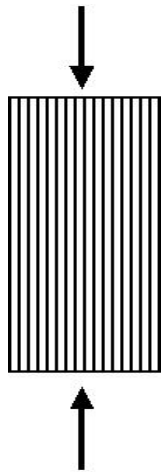

Figura 5.13.

$$\sigma_1 = -X' \tag{5.28}$$

Aplicando el criterio de Tsai-Wu:

$$F_1\sigma_1 + F_{11}\sigma_1^2 = 1 \tag{5.29}$$

y por tanto:

$$-F_1X' + F_{11}X'^2 = 1 \tag{5.30}$$

Combinando las ecuaciones (3.35) y (3.38) es posible determinar el valor de los coeficientes F_1 y F_{11}

$$F_1 = \frac{1}{X_t} + \frac{1}{X_c}$$

$$F_{11} = -\frac{1}{X_t X_c} \tag{5.31}$$

De manera análoga, realizando los ensayos en dirección 2, se podría demostrar que:

$$F_2 = \frac{1}{Y_t} + \frac{1}{Y_c} \qquad F_{22} = -\frac{1}{Y_t Y_c} \tag{5.32}$$

Realizando ahora un ensayo de cortadura la rotura se produciría cuando:

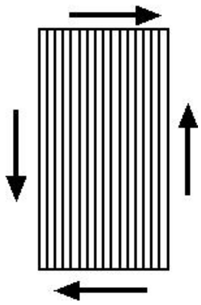

Figura 5.14.

$$\tau_{xy} = S \tag{5.33}$$

independientemente del signo de dicha tensión. Aplicando el criterio de rotura si la tensión es positiva:

$$F_6\sigma_6 + F_{66}\sigma_6^2 = 1 \tag{5.34}$$

y si es negativa:

$$-F_6\sigma_6 + F_{66}\sigma_6^2 = 1 \tag{5.35}$$

De donde se puede deducir que:

$$F_6 = 0 \qquad F_{66} = \frac{1}{S^2} \tag{5.36}$$

El problema surge con la determinación de la componente F_{12} ya que no puede ser obtenida de los resultados de un ensayo uniaxial en alguna de las direcciones principales de la lámina ya que es justo el coeficiente que multiplica al producto de las tensiones σ_1 y σ_2.

Para su determinación supongamos que, a la lámina, se la impone un estado biaxial de tensión:

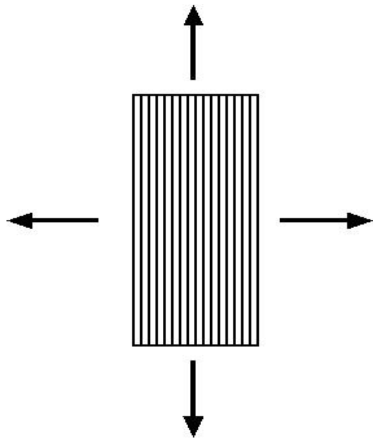

Figura 5.15.

En la rotura:

$$\sigma_1 = \sigma_1^R$$
$$\sigma_2 = \sigma_2^R \qquad (5.37)$$

Aplicando el criterio de rotura:

$$F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 + F_{11}\sigma_1^2 + F_{22}\sigma_2^2 + 2F_{12}\sigma_1\sigma_2 = 1 \qquad (5.38)$$

Imponiendo que las dos tensiones aplicadas sean iguales: $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$

$$(F_1 + F_2)\sigma + (F_{11} + F_{22} + 2F_{12})\sigma^2 = 1 \qquad (5.39)$$

Despejando F_{12} de la ecuación anterior y sustituyendo las expresiones ya obtenidas para las otras componentes de este tensor, se obtiene que:

$$F_{12} = \frac{1}{2\sigma^2}\left[1 - \left(\frac{1}{X_t} + \frac{1}{X_c} + \frac{1}{Y_t} + \frac{1}{Y_t}\right)\sigma + \left(\frac{1}{X_t X_c} + \frac{1}{Y_t Y_c}\right)\sigma^2\right] \qquad (5.40)$$

Se deduce, pues, que la componente F_{12} depende de las resistencias mecánicas de la lámina así como también del valor de la tensión biaxial de rotura, σ, aplicada. No es, por tanto, una propiedad de la lámina sino que es función de las tensiones aplicadas. Es decir:

$$F_{12} = f\left(X_t \;\; X_c \;\; Y_t \;\; Y_c \;\; \sigma_{\text{rotura biaxial}}\right) \qquad (5.41)$$

Para conocer este parámetro es necesario, por tanto realizar un ensayo de tracción biaxial que es muy complejo. Una manera alternativa de calcular F_{12} es por equivalencia con el criterio de Von Mises. Si aplicamos el criterio de Tsai-Wu como criterio de plastificación de un material metálico isótropo en ejes principales:

$$X = X' = \sigma_y$$
$$Y = Y' = \sigma_y \tag{5.42}$$

Donde σ_y es el límite elástico del material:

$$F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 + F_{11}\sigma_1^2 + F_{22}\sigma_2^2 + 2F_{12}\sigma_1\sigma_2 = 1$$

$$F_{11} = F_{22} = \frac{1}{\sigma_y^2} \tag{5.43}$$

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_y}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_y}\right)^2 + 2F_{12}\sigma_1\sigma_2 = 1$$

Por otro lado aplicando el criterio de Von Mises:

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_y}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_y}\right)^2 - \frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma_y^2} = 1 \tag{5.44}$$

Identificando términos:

$$2 \cdot F_{12} = -\frac{1}{\sigma_y^2} \tag{5.45}$$

Generalizando a un material anisótropo:

$$2 \cdot F_{12} = -\sqrt{F_{11} \cdot F_{22}} \tag{5.46}$$

En ausencia de otra información se suele estimar el parámetro F_{12} mediante la siguiente ecuación:

$$F_{12} = F_{12}^* \cdot \sqrt{F_{11} \cdot F_{22}} \qquad -0.5 < F_{12}^* < 0 \tag{5.47}$$