

CAPÍTULO 6

TEORÍA DEL LAMINADO

6.1. LAMINADOS SIMÉTRICOS

6.1.1 INTRODUCCIÓN

Tal como se definió con anterioridad, un laminado es un conjunto de láminas apiladas unas sobre otras y que, su proceso de fabricación, garantiza la continuidad de la matriz en la dirección ortogonal al plano de las láminas. En otras palabras: cada lámina trabaja conjuntamente con las otras.

El laminado ofrece una ventaja importante al ingeniero para que éste pueda aprovechar lo máximo posible las características resistentes de los materiales que configuran el material compuesto, orientando las fibras en diferentes direcciones en cada lámina.

Un tipo de laminados que suelen utilizarse con mucha frecuencia en la práctica son los denominados *laminados simétricos*. Para definirlos, es necesario establecer el concepto de plano medio o plano de simetría. Este plano separa en dos mitades, del mismo espesor, el laminado. Convencionalmente, en este plano, se consideran dos ejes x e y , y un eje z , ortogonal a él y con origen en el plano. Cada una de las láminas se define por sus coordenadas z_i , de su cara inferior (más próxima al plano medio), y z_{i+1} , de su cara superior (más alejada de dicho plano) y por la orientación de las fibras en su interior respecto a una dirección de referencia que, usualmente, coincide con el eje x definido anteriormente. Un laminado es simétrico cuando la secuencia de apilamiento de las láminas, a uno y otro lado del plano medio son idénticas.

En la Figura 6.1 se representa un laminado simétrico, en el que se puede ver las secuencias de apilado a cada uno de los lados del plano medio, o de simetría en este caso. En el laminado de la Figura 6.1, el plano de simetría no corta a ninguna lámina; pero podría darse la circunstancia de que, entre los dos apilamientos de cada lado, existiera una lámina que sería "cortada" por el plano de simetría, considerándose el laminado, también en este último caso, como simétrico.

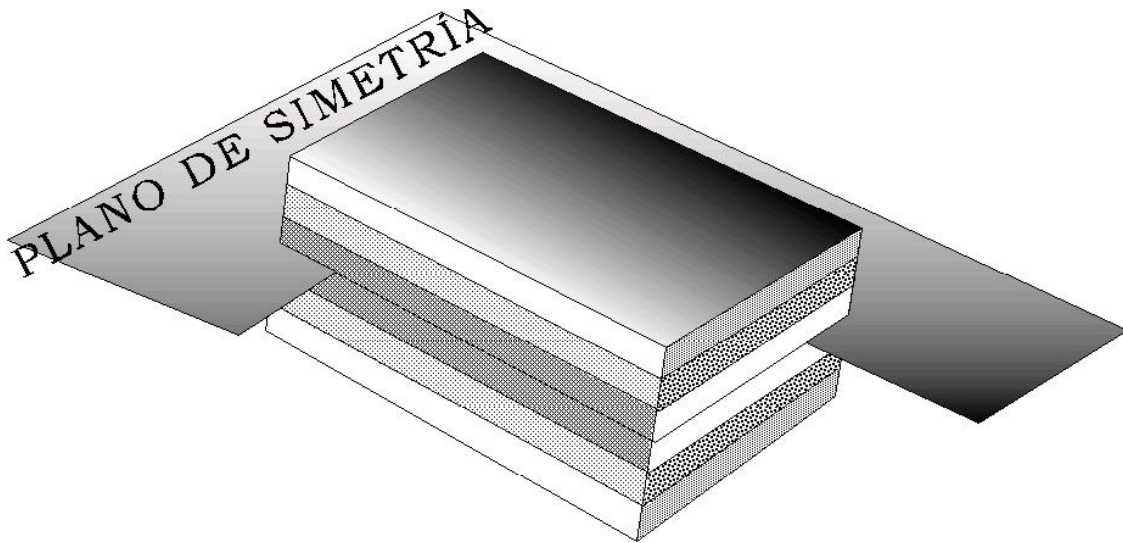


Figura 6.1. Concepto de laminado simétrico

Para definir el laminado se emplearán los siguientes criterios:

- Se definirán las láminas desde el exterior hacia el interior del laminado.
- Se indicará con un número el ángulo que forman las fibras con la dirección de referencia y, mediante un subíndice, el número de láminas seguidas que poseen esta orientación.
- Cuando se defina la secuencia de apilamiento de todas las láminas del laminado se empleará el subíndice T para indicar que, el laminado, ha sido definido en su totalidad. Cuando se trate de un laminado simétrico, sólo se expresará la secuencia de apilado de uno de los lados y utilizaremos el subíndice S para indicar que el laminado es simétrico.

Así, por ejemplo, un laminado simétrico compuesto por 3 láminas a 90° , 2 a 0° , 1 a -45° y otra a $+45^\circ$ puede nombrarse de las siguientes maneras alternativas:

- $[90_3, 0_2, -45, +45, +45, -45, 0_2, 90_3]_T$
- $[90_3, 0_2, -45, +45]_S$

- $[90_3, 0_2, -45, +45_2, -45, 0_2, 90_3]_T$

Si laminado anterior tuviera una lámina justo en el plano de simetría que, por ejemplo, presentara una orientación de sus fibras de 90° , su nomenclatura sería:

- $[90_3, 0_2, -45, +45, \overline{90}, +45, -45, 0_2, 90_3]_T$
- $[90_3, 0_2, -45, +45, \overline{90}]_S$

Un laminado puede, también, estar constituido por una secuencia de "sublaminados" que se repiten. Así, por ejemplo, un laminado realizado a base de sublaminados, podría ser:

- $[0_2, 60, +45_3]_{2S}$
- $[0_2, 60, +45_2]_S$
- $[0_2, 60, +45, 0_2, 60, +45, 0_2, 60, +45, 0_2, 60, +45]_T$

Al llegar a este punto cabe preguntarse la razón de que se haga un énfasis especial en los laminados simétricos. La razón del empleo de estos estriba en lo siguiente: para la fabricación del laminado, las láminas, impregnadas de resina, son colocadas una sobre otras, siguiendo una determinada secuencia de apilado, a temperatura ambiente. A continuación, el paquete así formado se coloca bajo la acción de una estufa para producir la polimerización de la resina (proceso de curado). En este proceso se genera calor, apareciendo fenómenos de dilatación térmica. Cuando el laminado no es simétrico (ver Figura 6.2), estas dilataciones, que son diferentes según la dirección de las fibras o según la dirección ortogonal a ellas, pueden producir la deformación del laminado y la aparición de tensiones internas de origen térmico.

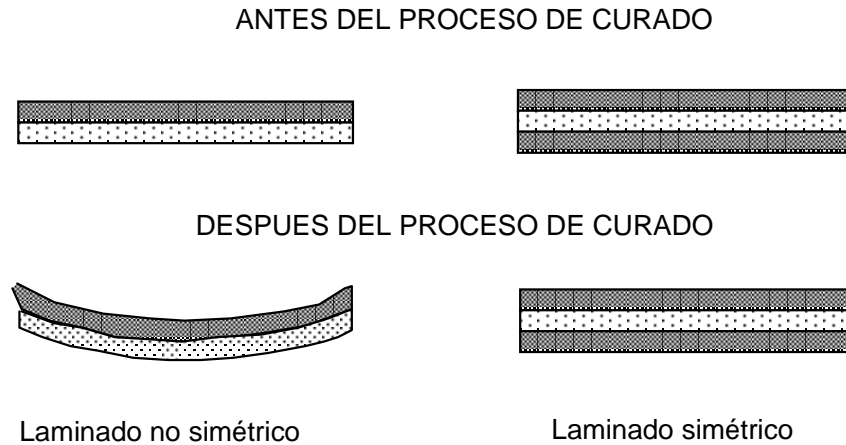


Figura 6.2. Efecto del proceso de curado en un laminado

Sin embargo, cuando el laminado es simétrico, se minimizan estas tensiones residuales de origen térmico, no apareciendo deformaciones de conjunto en el laminado, tal como se puede apreciar en la Figura 6.2.

6.1.2 RIGIDEZ PLANA DE LAMINADOS SIMETRICOS

Siguiendo con el desarrollo, y circunscribiéndose al caso de laminados simétricos, el estudio se centrará, ahora, en su comportamiento cuando se encuentran sometidos a estados de sollicitación planos: las cargas que actúan sobre el laminado están contenidas en su plano. Para los desarrollos posteriores se supondrá lo siguiente:

- El material compuesto presenta un comportamiento elástico-lineal hasta rotura
- El laminado presenta un espesor pequeño (laminado delgado)
- La deformación de cualquier lámina es igual a la del laminado (comportamiento solidario de todas las láminas)

En las condiciones anteriores, suele admitirse que, cada lámina, trabaja en tensión plana ($\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} \neq 0$) lo que implica desprestigiar las tensiones de interacción entre láminas consecutivas. Los estados deformacionales y tensionales, para un laminado trabajando en su plano, se representan en la Figura 6.3.

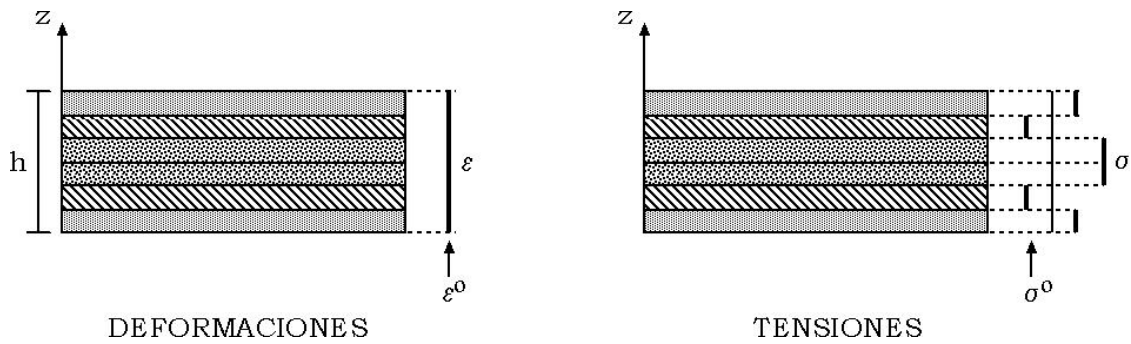


Figura 6.3. Distribución de tensiones y deformaciones en un laminado simétrico sometido a cargas en su plano

Como se observa en esta figura, la deformación en todas lámina es la misma, ε^0 , mientras que, las tensiones actuantes en cada lámina, son distintas si bien la distribución de tensiones es simétrica respecto al plano medio.

Llamando:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad [6.1]$$

al vector de tensiones,

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad [6.2]$$

al de deformaciones,

$$\{N\} = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} \quad [6.3]$$

al de cargas, en el que sus componentes están dadas por unidad de longitud del laminado y cuyo signo positivo está indicado en la Figura 6.4.

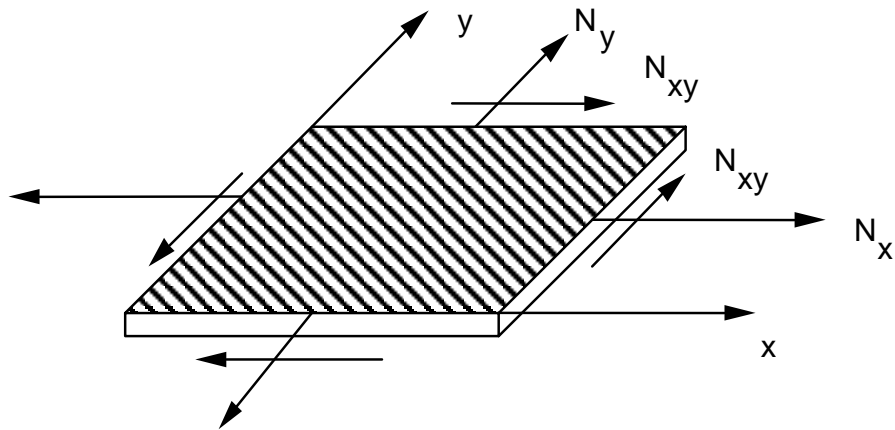


Figura 6.4. Definición de los esfuerzos que actúan sobre el laminado

Se puede establecer la relación entre esfuerzos aplicados sobre el laminado y deformaciones si integramos las tensiones en cada lámina a lo largo del espesor, expresadas en los mismos ejes.

$$\{N\} = \int_{-h/2}^{h/2} \{\sigma\} dz = \int_{-h/2}^{h/2} [Q]\{\varepsilon\} dz \quad [6.4]$$

donde $[Q]$ representa la matriz de rigidez de cada lámina, referidas a un mismo sistema de ejes, y $[A]$, es la matriz de rigidez del laminado. Teniendo en cuenta que, el estado de deformación en todas las láminas, $\{\varepsilon^0\}$ es el mismo, la ecuación 6.4 se puede expresar como:

$$\{N\} = \underbrace{\int_{-h/2}^{h/2} [Q] dz}_{[A]} \cdot \{\varepsilon\} \quad [6.5]$$

$$\{N\} = [A] \cdot \{\varepsilon^0\} \quad \text{en N/m}$$

ó

$$\{\varepsilon^0\} = [a]\{N\} \quad [a] = [A]^{-1} \quad [6.6]$$

Si se definiera un conjunto de variables normalizadas como el que se indica:

$$\text{Tensión media en el laminado:} \quad \{\sigma^0\} = \{N\}^* = \{N\}/h \quad (\text{en Pa})$$

- Matriz de rigidez normalizada: $[A^*] = [A]/h$
(en Pa)
- Matriz de flexibilidad normalizada: $[a^*] = h [a]$
(en Pa⁻¹)

donde h es el espesor del laminado, las ecuaciones 6.5 y 6.6 pueden transformarse en:

$$\begin{aligned} \{\sigma^0\} &= [A^*] \{\epsilon^0\} \\ \{\epsilon^0\} &= [a^*] \{\sigma^0\} \end{aligned} \quad [6.7]$$

A partir de los términos de la matriz de flexibilidad normalizada, $[a^*]$, se pueden definir un conjunto de parámetros que reciben el nombre de constantes planas ingenieriles del laminado y cuya definición es la siguiente:

$$\begin{aligned} E_1^0 &= 1/a_{11}^* & E_2^0 &= 1/a_{22}^* & E_6^0 &= 1/a_{66}^* \\ \nu_{21}^0 &= -a_{21}^*/a_{11}^* & \nu_{12}^0 &= -a_{12}^*/a_{22}^* \\ \nu_{61}^0 &= a_{61}^*/a_{11}^* & \nu_{16}^0 &= a_{16}^*/a_{66}^* \\ \nu_{62}^0 &= a_{62}^*/a_{22}^* & \nu_{26}^0 &= a_{26}^*/a_{66}^* \end{aligned} \quad [6.8]$$

Es importante hacer notar que, para el cálculo de la matriz de rigidez plana del laminado $[A]$, el orden de secuencia de la láminas no tiene ninguna influencia. Si éste tuviera m grupos de láminas (entendiendo que, en cada grupo, todas las láminas tienen la misma orientación de fibras respecto de los ejes del laminado), la matriz $[A]$ puede obtenerse como sigue:

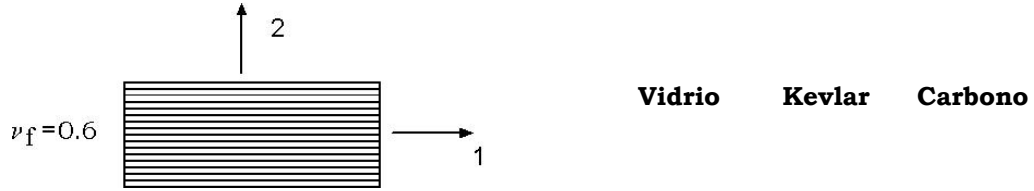
$$[A] = \sum_{i=1}^m [Q']_i h_i \quad [6.9]$$

donde:

- $[A]$ = matriz de rigidez del laminado
- $[Q]_i$ = matriz de rigidez de una lámina cuya orientación es θ_i respecto de los ejes del laminado.
- h_i = espesor total del grupo de láminas que se puede obtener multiplicando el número de láminas del grupo por el espesor de una sola de ellas.

Como uno puede imaginarse, el cálculo de la matriz $[A]$ puede llegar a ser muy pesado. Sin embargo, existen ábacos que simplifican los cálculos para algunos tipos de materiales compuestos. En la Tabla 6.1 se indican las propiedades fundamentales de este material compuesto junto con las correspondientes a otros tipos de fibras.

Tabla 6.1. Laminados de diferentes fibras / epoxi 60% en volumen



	Vidrio	Kevlar	Carbono
Densidad (kg/m ³)	2080	1350	1530
Tensión de rotura a tracción dirección 1 (MPa)	1250	1410	1270
Tensión de rotura a compresión dirección 1 (MPa)	600	280	1130
Tensión de rotura a tracción dirección 2 (MPa)	35	28	42
Tensión de rotura a compresión dirección 2 (MPa)	141	141	141
Tensión de rotura en cizalladura plano 1-2 (MPa)	63	45	63
Tensión de rotura en cizalladura interlaminar (MPa)	80	60	90
Módulo de elasticidad longitudinal E ₁ , (MPa)	45.000	85.000	134.000
Módulo de elasticidad longitudinal E ₂ , (MPa)	12.000	5.600	7.000
Módulo de cizalladura G ₁₂ , (MPa)	4.500	2.100	4.200
Coefficiente de Poisson ν ₂₁	0.3	0.34	0.25

6.1.3 RIGIDEZ A FLEXION DE LAMINADOS SIMETRICOS

Supóngase que el laminado es delgado entendiendo como tal aquel laminado en el que, tanto su ancho como su espesor, son despreciables frente a su largo. También se admitirá que se cumple la hipótesis de Navier-Bernouilli para placas: toda sección transversal plana sigue

siendo plana tras deformarse el laminado. Con estas hipótesis básicas, la teoría que va a desarrollarse, recibe el nombre de *Teoría clásica de laminados*. En esta teoría, las láminas se suponen con comportamiento ortótropo y trabajando en tensión plana y perfectamente unidas unas a otras; es decir, el campo de desplazamientos en el interior del laminado es continuo sin que, por lo tanto, puedan unas láminas deslizar sobre otras. Las otras hipótesis (delgadez del laminado e hipótesis de Navier-Bernouilli), se traducen a que, los puntos del laminado que definen una línea recta, y perpendicular al plano medio, siguen definiendo otra línea recta, también perpendicular al plano medio una vez que se ha deformado éste. Lo anterior se traduce, para el laminado de la figura 4.6, en la ausencia de las deformaciones por cortante γ_{xz} y γ_{yz} . Si, el espesor del laminado, permanece constante tras la deformación, también puede considerarse nula la deformación ϵ_z . Todo este conjunto de hipótesis coincide con las hipótesis de Kirchhoff para placas delgadas.

Llamando u, v y w a los movimientos de cualquier punto del laminado según los ejes x, y y z , para el punto B de la Figura 6.5. se puede plantear, en virtud de las hipótesis anteriores, lo siguiente:

$$\alpha = \frac{\partial w_A}{\partial x} \quad u_B = u_A - z_B \alpha = u_A - z_B \frac{\partial w_A}{\partial x} \quad [6.10]$$

De análoga manera podríamos también expresar el desplazamiento del punto B en la dirección del eje y como:

$$\beta = \frac{\partial w_A}{\partial y} \quad v_B = v_A - z_B \beta = v_A - z_B \frac{\partial w_A}{\partial y} \quad [6.11]$$

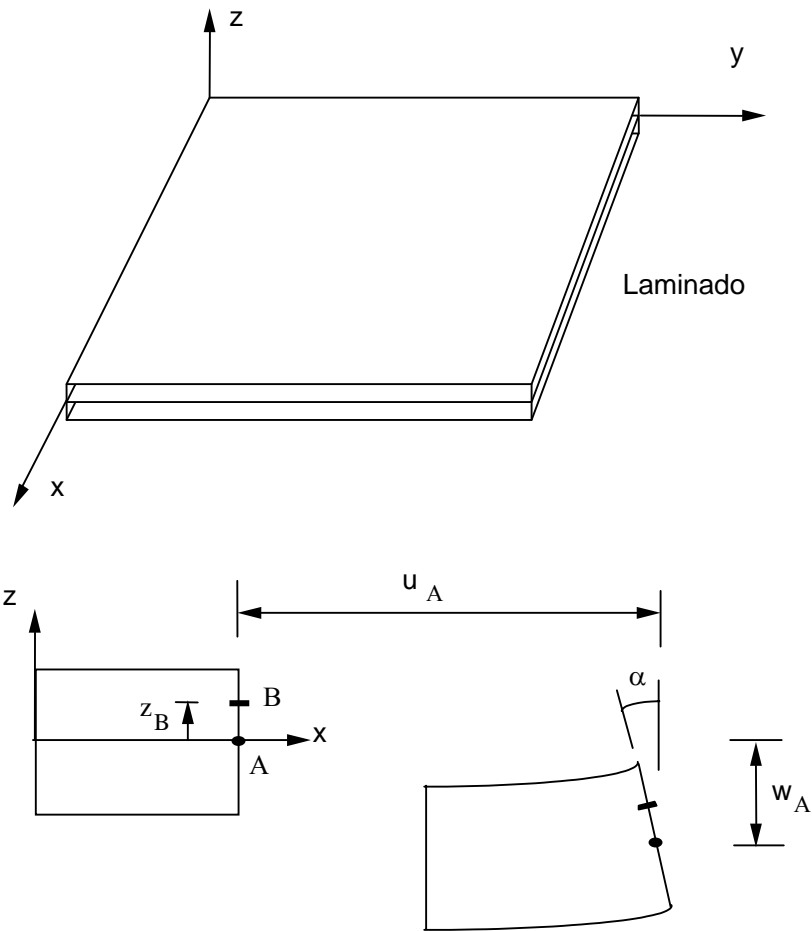


Figura 6.5.

Las deformaciones pueden calcularse a partir de los desplazamientos anteriores tal como se indica:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_B}{\partial x} = \frac{\partial u_A}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_A}{\partial x^2} \quad [6.12]$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v_B}{\partial y} = \frac{\partial v_A}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_A}{\partial y^2} \quad [6.13]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_B}{\partial y} + \frac{\partial v_B}{\partial x} = \frac{\partial u_A}{\partial y} + \frac{\partial v_A}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w_A}{\partial x \partial y} \quad [6.14]$$

junto con

$$\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \quad [6.15]$$

tal como se vio anteriormente.

Las ecuaciones anteriores pueden generalizarse para cualquier punto del laminado a una distancia z del plano medio y escribirse en forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad [6.16]$$

donde el superíndice o se refiere a las deformaciones en el plano medio del laminado y los vectores del miembro de la derecha son iguales a:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_A}{\partial x} \\ \frac{\partial v_A}{\partial y} \\ \frac{\partial u_A}{\partial y} + \frac{\partial v_A}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad [6.17]$$

y

$$\begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w_A}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_A}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w_A}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad [6.18]$$

Las deformaciones anteriores son aplicables, esencialmente, a placas; es decir, a laminados planos delgados. Si el laminado presentara una geometría, por ejemplo, cilíndrica, siendo el eje x paralelo al eje del cilindro, la deformación ε_y debería ser complementada con w_A/R , donde R es el radio del cilindro. Si el laminado tuviera otra geometría, el campo de deformaciones tendría expresiones más complejas.

Suponiendo que, el laminado, estuviera sometido a flexión pura ($\varepsilon_x^o = \varepsilon_y^o = \gamma_{xy}^o = 0$) el campo de deformaciones se reduce, pudiéndose expresar como:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = z \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad [6.19]$$

En la Figura 6.6 se representan los estados de deformación y tensión del laminado pudiéndose apreciar que las deformaciones varían linealmente con la altura respecto al plano medio mientras que, la variación de las tensiones en cada lámina, no corresponde a una ley prefijada.

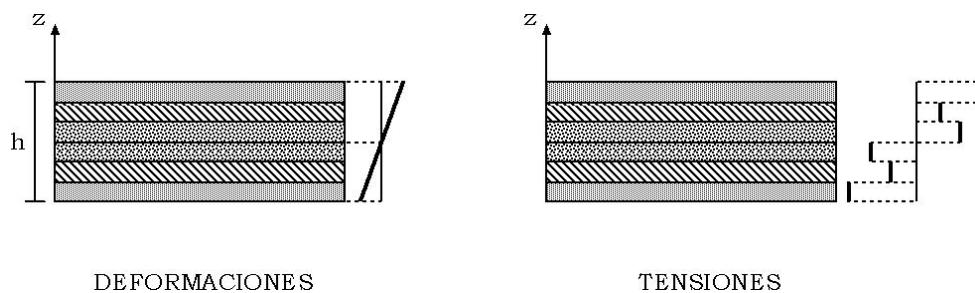


Figura 6.6. Distribución de tensiones y deformaciones en un laminado simétrico sometido a momentos

Si se supone que, sobre el laminado, actúan unos momentos por unidad de longitud que se representan en la Figura 6.7.

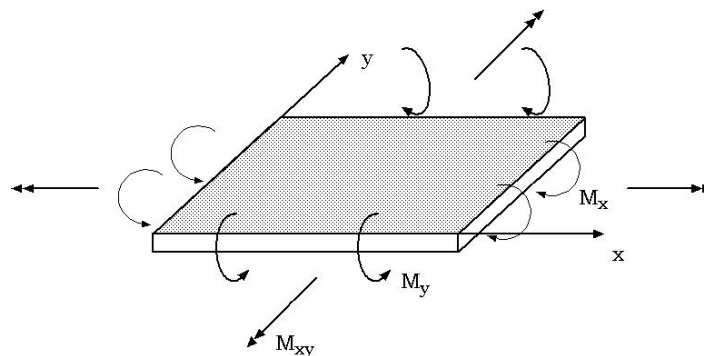


Figura 6.7. Definición de los esfuerzos que actúan sobre el laminado

Denominando $\{M\}$ al vector de los momentos aplicados:

$$\{\mathbf{M}\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} \quad [6.20]$$

se puede establecer el equilibrio entre los momentos aplicados y las tensiones producidas en el laminado, obteniéndose:

$$\{\mathbf{M}\} = \int_{-h/2}^{h/2} \{\boldsymbol{\sigma}\} z \, dz = \int_{-h/2}^{h/2} [\mathbf{Q}] \{\boldsymbol{\varepsilon}\} z \, dz \quad [6.21]$$

Introduciendo la expresión del vector de deformaciones indicada en la ecuación 6.19, se deduce que:

$$\{\mathbf{M}\} = \int_{-h/2}^{h/2} [\mathbf{Q}] z^2 \, dz \{\mathbf{k}\} = [\mathbf{D}] \{\mathbf{k}\} \quad [6.22]$$

donde la matriz $[\mathbf{D}]$ se puede obtener a partir de las matrices de rigidez de cada lámina, tal como se indica:

$$[\mathbf{D}] = \int_{-h/2}^{h/2} [\mathbf{Q}] z^2 \, dz \quad (\text{en N.m}) \quad [6.23]$$

La matriz $[\mathbf{D}]$ se conoce como la *matriz de rigidez a flexión pura del laminado* y se puede obtener de la forma siguiente:

$$[\mathbf{D}] = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^m [\mathbf{Q}']^{(i)} \left[(z^{(i)})^3 - (z^{(i-1)})^3 \right] \quad [6.24]$$

donde $[\mathbf{Q}']^{(i)}$ es la matriz de rigidez de la lámina de índice "i" cuyas fibras forman un ángulo θ dado con el eje principal del laminado y, el índice "i" empieza a contar desde la superficie más interior del laminado. Para el caso de laminados simétricos, la expresión anterior, puede reducirse a:

$$[\mathbf{D}] = \frac{2}{3} \sum_{j=1}^{m/2} [\mathbf{Q}]^{(j)} \left[(z^{(j)})^3 - (z^{(j-1)})^3 \right] \quad [6.25]$$

donde el índice "j" comienza a contar desde la cara inferior del laminado hasta su plano medio.

En los cálculos para diseño, se suelen emplear el conjunto de variables normalizadas y relaciones que se expresan a continuación:

- Tensión máxima (media) en el laminado (Pa): $\{\sigma^f\} = 6\{M\}/h^2$
- Deformación máxima en el laminado: $\{\varepsilon^f\} = h\{k\}/2$
- Matriz de rigidez a flexión normalizada (Pa): $[D^*] = 12[D]/h^3 = [D]/I^*$
- Matriz de flexibilidad a flexión normalizada (Pa⁻¹): $[d^*] = [d]h^3/12 = [d]I^*$

donde : $I^* = h^3/12$

Es posible expresar la ecuación 6.22 en función de estas nuevas variables:

$$\begin{aligned}\{\sigma^f\} &= [D^*]\{\varepsilon^f\} \\ \{\varepsilon^f\} &= [d^*]\{\sigma^f\}\end{aligned}\tag{6.26}$$

En las ecuaciones anteriores $\{\varepsilon^f\}$ es el vector de máximas deformaciones reales que aparecen en el laminado y $\{\sigma^f\}$ es el vector de máximas tensiones que aparecería si el laminado fuera sustituido por una placa del mismo espesor pero de material isótropo.

Al igual que en el caso de un laminado trabajando bajo cargas contenidas en su plano, se pueden definir las siguientes constantes ingenieriles:

$$\begin{aligned}E_1^f &= \frac{1}{d_{11}^*} & E_2^f &= \frac{1}{d_{22}^*} & E_6^f &= \frac{1}{d_{66}^*} \\ v_{21}^f &= -d_{21}/d_{11} & v_{12}^f &= -d_{12}/d_{22} \\ v_{61}^f &= d_{61}/d_{11} & v_{16}^f &= d_{16}/d_{66} \\ v_{62}^f &= d_{62}/d_{22} & v_{26}^f &= d_{26}/d_{66}\end{aligned}\tag{6.27}$$

donde el superíndice “f” significa que se trata de módulos y coeficientes en condiciones de flexión.

Un tipo muy común de materiales compuestos son los materiales *sandwich* que se estudiarán más adelante. Consisten, básicamente, en

una placa de material de bajos módulos, denominada *núcleo*, sobre la que se pegan unos laminados, denominados *pieles*, de pequeño espesor. Los esfuerzos en el plano y de flexión son absorbidos por las pieles mientras que, el núcleo absorbe los esfuerzos cortantes ortogonales al panel sandwich. La matriz de rigidez a flexión puede calcularse del siguiente modo:

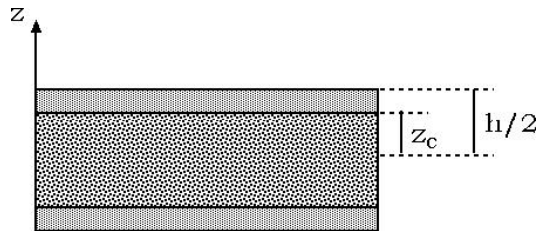


Figura 6.8

$$[D] = 2 \int_{z_c}^{h/2} [Q] z^2 dz \quad [6.28]$$

6.2. LAMINADOS NO SIMÉTRICOS

6.2.1 RIGIDEZ A FLEXION DE LAMINADOS NO SIMÉTRICOS

Cuando se trata de laminados no simétricos, la situación es algo más complicada. En este caso, la flexión del laminado viene acompañada con la aparición de deformaciones en su plano medio, tal como se recoge en la Figura 6.9.

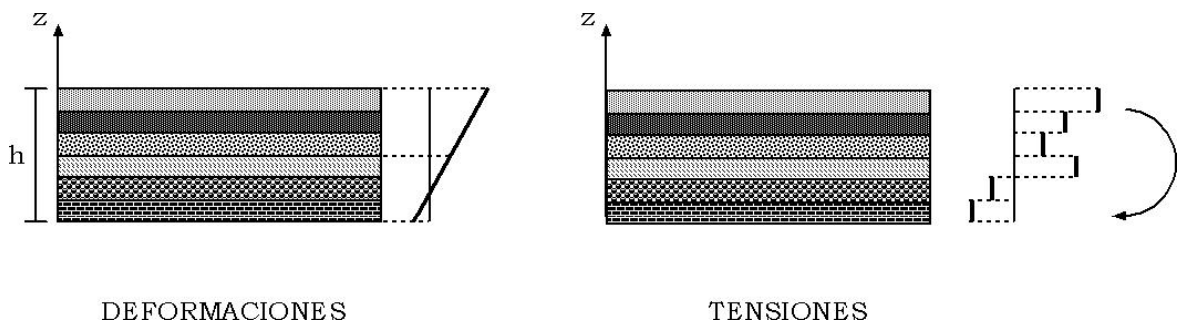


Figura 6.9. Distribución de tensiones y deformaciones en un laminado no simétrico sometido a flexión

Las deformaciones en un punto del laminado situado a una distancia z de su plano medio vendrán dadas por:

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon^o\} + z \{k\} \quad [6.29]$$

y estableciendo el equilibrio entre las acciones exteriores y las tensiones podemos escribir las siguientes ecuaciones:

$$\{N\} = \int_{-h/2}^{h/2} \{\sigma\} dz = \int_{-h/2}^{h/2} [Q]\{\varepsilon\} dz = \underbrace{\int_{-h/2}^{h/2} [Q]\{\varepsilon^o\} dz}_{[A]\{\varepsilon^o\}} + \underbrace{\int_{-h/2}^{h/2} [Q]\{k\} z dz}_{[B]\{k\}} \quad [6.30]$$

$$\{M\} = \int_{-h/2}^{h/2} \{\sigma\} z dz = \int_{-h/2}^{h/2} [Q]\{\varepsilon\} z dz = \underbrace{\int_{-h/2}^{h/2} [Q]\{\varepsilon^o\} z dz}_{[B]\{\varepsilon^o\}} + \underbrace{\int_{-h/2}^{h/2} [Q]\{k\} z^2 dz}_{[D]\{k\}} \quad [6.31]$$

que, de forma más compacta, pueden ponerse como:

$$\{N\} = [A]\{\varepsilon^o\} + [B]\{k\} \quad (\text{en N/m}) \quad [6.32]$$

$$\{M\} = [B]\{\varepsilon^o\} + [D]\{k\} \quad (\text{en N}) \quad [6.33]$$

donde las matrices que aparecen pueden determinarse como sigue:

$$[A] = \sum_{i=1}^m [Q]^{(i)} [z^{(i)} - z^{(i-1)}] \quad (\text{en N/m}) \quad [6.34]$$

$$[B] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m [Q]^{(i)} \left[(z^{(i)})^2 - (z^{(i-1)})^2 \right] \quad (\text{en N}) \quad [6.35]$$

$$[D] = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^m [Q]^{(i)} \left[(z^{(i)})^3 - (z^{(i-1)})^3 \right] \quad (\text{en N.m}) \quad [6.36]$$

donde:

- m = número total de láminas
- $[Q]^{(i)}$ = matriz de rigidez de la lámina i en ejes globales
- $[B]$ = matriz de acoplamiento, si el laminado es simétrico, esta matriz es nula

y, además, teniendo i su origen en la superficie inferior del laminado.

También se pueden establecer las relaciones inversas a las de las ecuaciones 6.32 y 6.33, que relacionen las deformaciones y giros con las cargas y momentos:

$$\begin{aligned}\{\epsilon^o\} &= [a] \cdot \{N\} + [b] \cdot \{M\} \\ \{k\} &= [b] \cdot \{N\} + [d] \cdot \{M\}\end{aligned}\tag{6.37}$$

donde:

- $[a]$ = Matriz de flexibilidad plana del laminado
- $[b]$ = Matriz de acoplamiento
- $[d]$ = Matriz de flexibilidad en flexión del laminado

En este caso las matrices $[a]$, $[b]$, y $[d]$ no son las inversas de las matrices $[A]$, $[B]$ y $[D]$, sus expresiones vienen dadas por las ecuaciones 6.38 a 6.39

$$[a] = [A]^{-1} - \{[B]^M \cdot [D]^{M-1}\} \cdot [C]^M\tag{6.38}$$

$$[b] = [B]^M \cdot [D]^{M-1}\tag{6.39}$$

$$[d] = [D]^{M-1}\tag{6.40}$$

siendo:

$$[B]^M = -[A]^{-1} \cdot [B]\tag{6.41}$$

$$\begin{aligned}[C]^M &= [B] \cdot [A]^{-1} \\ [D]^M &= [D] - \{[B] \cdot [A]^{-1}\} \cdot [B]\end{aligned}$$

Al igual que en el caso de los laminados simétricos es posible expresar las ecuaciones 6.32 y 6.33 en forma normalizada definiendo las siguientes variables:

- Tensión media en el laminado: $\{\sigma^0\} = \{N\}^* = \{N\}/h$
- Tensión máxima (media) en el laminado: $\{\sigma^f\} = 6 \cdot \{M\}/h^2$
- Deformación máxima en el laminado: $\{\varepsilon^f\} = h \cdot \{k\}/2$
- Matriz de rigidez normalizada: $[A^*] = [A]/h$
- Matriz de flexibilidad normalizada: $[a^*] = h \cdot [a]$
- Matriz de acoplamiento normalizada: $[B^*] = 2 \cdot [B]/h^2$
- Matriz de rigidez a flexión normalizada: $[D^*] = 12 \cdot [D]/h^3 = [D]/I^*$
- Matriz de flexibilidad a flexión normalizada: $[d^*] = [d] \cdot h^3 / 12 = [d] \cdot I^*$

En estas variables las ecuaciones quedan:

$$\begin{aligned} \{\sigma^0\} &= [A^*] \{\varepsilon^0\} + [B^*] \{\varepsilon^f\} \\ \{\sigma^f\} &= 3 \cdot [B^*] \{\varepsilon^0\} + [D^*] \{\varepsilon^f\} \end{aligned} \quad [6.42]$$

6.3. LAMINADOS CON SECUENCIAS DE APILAMIENTO ESPECIALES

6.3.1 INTRODUCCIÓN

Dentro de las todas las posibilidades que existen de apilar un conjunto de láminas unidireccionales idénticas, existen unos tipos particulares de secuencia de apilamiento que merecen la pena de ser estudiados más en detalle. Así, en particular, se consideraran tres tipos de laminados: los de láminas cruzadas ("cross-ply laminates"), los de láminas a $\pm\theta$ ("angle-ply laminates") y, finalmente, los cuasi-isótropos ("quasi-isotropic laminates"). En los primeros, la secuencia de apilado es, alternativamente, 0° y 90° , respecto de los ejes del laminado. Así, si se empezara la secuencia de apilamiento por una lámina a 0° , las fibras de todas las láminas impares estarían orientadas a 0° , mientras que, en las pares, lo estarían a 90° . En los segundos, el apilado se realiza,

alternativamente, colocando una lámina con las fibras orientadas a $+\theta$ seguida de otra en las que sus fibras se encuentran orientadas a $-\theta$. En los últimos se pretende conseguir, mediante una apropiada secuencia de apilamiento, que su rigidez longitudinal sea la misma en todas las direcciones. Como se puede comprender fácilmente, para conseguir un laminado de igual rigidez en cualquier dirección, se necesitaría un elevado número de láminas y que, la orientación de las fibras de cada una de ellas variase muy poco respecto de las de su inmediatamente anterior. Así, por ejemplo, un laminado de tres láminas cuasi-isótropo tendría la siguiente secuencia de apilamiento: $-60^\circ/0^\circ/+60^\circ$; otro de cuatro láminas tendría la secuencia: $0^\circ/+45^\circ/-45^\circ/90^\circ$ ó, lo que es lo mismo, $0^\circ/\pm 45^\circ/90^\circ$. Aunque estos laminados se denominen cuasi-isótropos, no se comportan como los materiales homogéneos e isótropos. Conviene remarcar que, un laminado de sólo dos láminas del mismo espesor en las que sus fibras estuvieran orientadas a 0° y 90° , no es un laminado cuasi-isótropo.

6.3.2 LAMINADOS DE LAMINAS CRUZADAS

Considérese el caso de un laminado de N láminas y espesor total h , en el que todas ellas son del mismo espesor pero, por ejemplo, el número de láminas a 0° (n_0) es distinto al número de láminas a 90° (n_{90}). Se puede definir *el coeficiente de cruzamiento* como el cociente entre n_0 y n_{90} ($c = \frac{n_0}{n_{90}}$). Lógicamente, si el número de láminas a 0° coincidiera con el de láminas a 90° , el coeficiente de cruzamiento tomaría el valor unidad. Las rigideces del laminado se podrían calcular empleando las ecuaciones 6.34 a 6.36.

Si se denomina f al cociente entre las rigideces de una lámina según los ejes materiales 2 y 1 ($f = Q_{22}/Q_{11} = E_2/E_1$), las rigideces anteriores pueden expresarse en función de las rigideces de una lámina y de los coeficientes anteriores, resultando:

a) Número de láminas impar (laminado simétrico):

- Componentes de la matriz de rigidez plana

$$\begin{aligned}A_{11} &= \frac{1}{1+c} \cdot (c+f) \cdot h \cdot Q_{11} \\A_{12} &= tQ_{12} \\A_{22} &= \frac{1}{1+c} \cdot (1+cf) \cdot h \cdot Q_{11} = \frac{1+c \cdot f}{c+f} \cdot A_{11} \\A_{13} &= A_{23} = 0 \\A_{33} &= h \cdot Q_{33}\end{aligned} \tag{6.43}$$

- Componentes de la matriz de acoplamiento

Esta matriz es nula por ser el laminado simétrico

- Componentes de la matriz de rigidez a flexión

$$\begin{aligned}D_{11} &= [(f-1) \cdot g + 1] \cdot \frac{1+c}{c+f} \cdot \frac{A_{11} \cdot h^2}{12} \\D_{12} &= \frac{Q_{12} \cdot h^3}{12} \\D_{22} &= [(1-f) \cdot g + f] \cdot \frac{1+c}{c+f} \cdot \frac{A_{11} \cdot h^2}{12} \\D_{13} &= D_{23} = 0 \\D_{33} &= \frac{Q_{33} \cdot h^3}{12}\end{aligned} \tag{6.44}$$

donde:

$$g = \frac{1}{(1+c)^3} + \frac{c \cdot (N-3) \cdot [c \cdot (N-1) + 2 \cdot (N+1)]}{(N^2-1) \cdot (1+c)^3} \tag{6.45}$$

b) Número de láminas par (laminado antimétrico):

Matriz de rigidez plana

Los términos A_{ij} son idénticos a los valores de la ecuación 6.43

Matriz de acoplamiento

$$\begin{aligned}
 B_{11} &= \frac{c \cdot (f - 1)}{N \cdot (1 + c) \cdot (c + f)} \cdot A_{11} \cdot h \\
 B_{22} &= -B_{11} \\
 B_{12} &= B_{13} = B_{23} = B_{33} = 0
 \end{aligned}
 \tag{6.46}$$

Matriz de rigidez a flexión

Los términos de la matriz D tienen la misma expresión que para el caso de laminado simétrico, ecuación 6.44, si bien el valor de la constante g debe tomarse ahora como:

$$g = \frac{1}{1 + c} + \frac{8 \cdot c \cdot (c - 1)}{N^2 \cdot (1 + c)^3}
 \tag{6.47}$$

6.3.3 LAMINADOS CON LAMINAS A $\pm\theta$

Como se dijo anteriormente, este es un laminado de N láminas del mismo espesor, reforzadas unidireccionalmente y cuyos ejes materiales se encuentran orientados, alternativamente, a $+\theta$ y a $-\theta$ grados respecto a los ejes globales del laminado. Consideraremos en lo que sigue que, las láminas de numeración impar, se encuentran orientadas a $-\theta$, mientras que las de numeración par lo están a $+\theta$.

Las rigideces del laminado pueden ser expresadas empleando las ecuaciones 6.34 a 6.36. Los valores numéricos dependerán de \mathbf{N} , \bar{Q}_{ij} (donde se contabiliza, implícitamente, θ), y de h . En este tipo de laminados se los componentes de la matriz de rigidez en ejes globales de las láminas presentan la siguiente propiedad:

$$\begin{aligned}
 \bar{Q}_{11+\alpha} &= \bar{Q}_{11-\alpha} & \bar{Q}_{16+\alpha} &= -\bar{Q}_{16-\alpha} \\
 \bar{Q}_{12+\alpha} &= \bar{Q}_{12-\alpha} & \bar{Q}_{26+\alpha} &= -\bar{Q}_{26-\alpha} \\
 \bar{Q}_{22+\alpha} &= \bar{Q}_{22-\alpha} & & \\
 \bar{Q}_{66+\alpha} &= \bar{Q}_{66-\alpha} & &
 \end{aligned}
 \tag{6.48}$$

lo que simplifica, bastante, los cálculos.

a) laminados con un número impar de láminas (laminado simétrico):

Matriz de rigidez plana

$$\begin{aligned}(A_{11}, A_{12}, A_{22}, A_{66}) &= h \cdot (\bar{Q}_{11}, \bar{Q}_{12}, \bar{Q}_{22}, \bar{Q}_{66}) \\ (A_{16}, A_{26}) &= \frac{h}{N} \cdot (\bar{Q}_{16}, \bar{Q}_{26})\end{aligned}\quad [6.49]$$

Matriz de acoplamiento

Dado que el laminado es simétrico esta matriz es nula

Matriz de rigidez a flexión

$$\begin{aligned}(D_{11}, D_{12}, D_{22}, D_{66}) &= \frac{h^3}{12} \cdot (\bar{Q}_{11}, \bar{Q}_{12}, \bar{Q}_{22}, \bar{Q}_{66}) \\ (D_{16}, D_{26}) &= \frac{h^3}{12} \cdot \left(\frac{3 \cdot N^2 - 2}{N^3} \right) \cdot (\bar{Q}_{16}, \bar{Q}_{26})\end{aligned}\quad [6.50]$$

b) laminados con un número par de láminas (laminado antimétrico):

Matriz de rigidez plana

$$\begin{aligned}(A_{11}, A_{12}, A_{22}, A_{66}) &= h \cdot (\bar{Q}_{11}, \bar{Q}_{12}, \bar{Q}_{22}, \bar{Q}_{66}) \\ A_{16}, A_{26} &= 0\end{aligned}\quad [6.51]$$

Matriz de acoplamiento

$$\begin{aligned}B_{11}, B_{12}, B_{22}, B_{66} &= 0 \\ B_{16}, B_{26} &= -\frac{h^2}{2N} \cdot (\bar{Q}_{16}, \bar{Q}_{26})\end{aligned}\quad [6.52]$$

Matriz de rigidez a flexión

$$\begin{aligned}(D_{11}, D_{12}, D_{22}, D_{66}) &= \frac{h^3}{12} \cdot (\bar{Q}_{11}, \bar{Q}_{12}, \bar{Q}_{22}, \bar{Q}_{66}) \\ D_{16}, D_{26} &= 0\end{aligned}\quad [6.53]$$

6.3.4 LAMINADOS CUASI-ISOTROPOS

Para entender correctamente la fundamentación de estos laminados es conveniente recordar los conceptos de invarianza ya tratados. Supóngase ahora que el laminado tiene N láminas ($N > 2$) y que la orientación de las fibras de cada lámina difiere en π/N grados respecto a la correspondiente a la lámina anterior. El parámetro I_{1_A} tomaría el siguiente valor:

$$I_{1_A} = \left(\cos \frac{2\pi}{N} + \cos \frac{4\pi}{N} + \dots + \cos 2\pi \right) \cdot \frac{h}{N} = \left(\frac{\text{sen} \left(N + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{2\pi}{N}}{2 \text{sen} \left(\frac{\pi}{N} \right)} - \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{h}{N} = 0 \quad [6.54]$$

De manera análoga se podría demostrar que también toman valores nulos los parámetros $I_{2_A}, I_{3_A}, I_{4_A}$, lo que implica que, los términos de la matriz A , puedan ponerse como:

$$\begin{aligned} A_{11} &= A_{22} = U_1 \cdot h \\ A_{12} &= U_4 \cdot h \\ A_{66} &= U_5 \cdot h \\ A_{16} &= A_{26} = 0 \end{aligned} \quad [6.55]$$

Los valores de los términos de la matriz D se pueden poner como:

$$D_{ij} = \frac{A_{ij} \cdot h^2}{12} \quad [6.56]$$

pero los términos de la matriz B no son nulos: existe un acoplamiento entre las deformaciones longitudinales y las curvaturas del laminado. Esto no sucedería en un material perfectamente isótropo, por lo que, a este tipo de laminados, se les conoce con el nombre de cuasi-isótropos.

6.4. LOS LAMINADOS $\pm\alpha$ EN VASIJAS A PRESION

Este tipo de laminados suele emplearse muy frecuentemente para la fabricación ("filament winding") de vasijas que trabajan a presión. Un esquema de este tipo de recipiente puede verse en la figura siguiente.

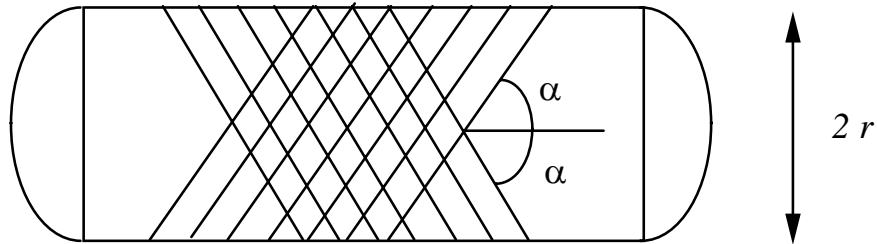


Figura 6.10

Esta disposición del laminado permite que, para un determinado valor del ángulo α , precisamente $\alpha = 54,74^\circ$, sólo aparecerían tensiones normales ($\sigma_1 \neq 0$) en las direcciones de las fibras en cada una de las láminas sin que, por tanto, aparezcan tensiones normales perpendiculares a ellas ($\sigma_2 = 0$) ni, tampoco, tensiones tangenciales ($\tau_{12} = 0$). Para estudiar este tipo de vasija supóngase que p es su presión interna (mucho más grande que la presión atmosférica, y que su espesor es h). Este es un problema estáticamente determinado; es decir, utilizando las ecuaciones de la estática pueden obtenerse las tensiones que actúan sobre un punto elástico de la superficie de la vasija. Así, planteando el equilibrio de una rebanada de vasija, correspondiente a una longitud (perpendicular al plano del papel) unidad, figura Figura 6.11 a), se tiene:

$$2 \cdot \sigma_c \cdot h = p \cdot 2 \cdot r$$

$$\sigma_c = \frac{p \cdot r}{h} \quad [6.57]$$

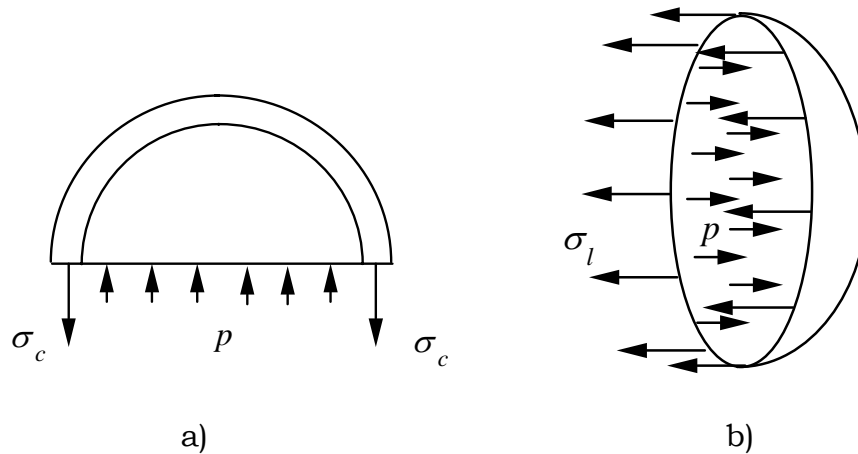


Figura 6.11. a) Equilibrio circunferencial, b) equilibrio longitudinal

Planteando, ahora, el equilibrio en dirección longitudinal sobre una de las tapas de la vasija se obtiene, figura Figura 6.11 b):

$$\sigma_l \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot p$$

$$\sigma_l = \frac{p \cdot r}{2 \cdot h} \quad [6.58]$$

El estado tensional de un punto elástico de la superficie de la vasija será el representado en la Figura 6.12, donde σ_c y σ_l vienen dado por las ecuaciones 6.57 y 6.58.

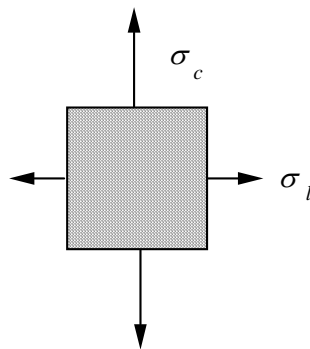


Figura 6.12. Estado tensional de un punto de la superficie de la vasija

El estado tensional en las láminas que componen el laminado, puede esquematizarse del modo representado en la Figura 6.13, donde, lógicamente, las tensiones actuando sobre las láminas a $+\alpha$ y $-\alpha$ tienen que ser iguales por simetría.

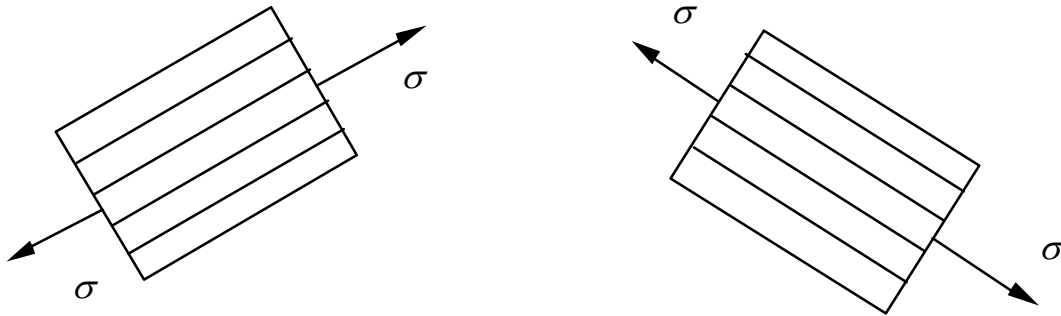


Figura 6.13. Estados tensionales en las láminas $\pm\alpha$

Si expresamos los estados tensionales, en cada tipo de lámina, según las direcciones longitudinal y circunferencial de la vasija, serían los representados en la Figura 6.14, donde las diferentes tensiones que aparecen toman los siguientes valores:

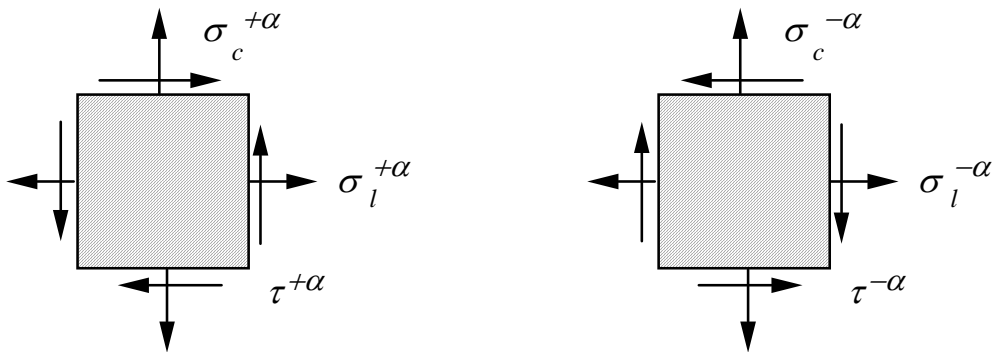


Figura 6.14

$$\sigma_l^{+\alpha} = \frac{\sigma}{2}(1 + \cos 2\alpha)$$

$$\sigma_c^{+\alpha} = \frac{\sigma}{2}(1 - \cos 2\alpha)$$

$$\tau^{+\alpha} = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha$$

$$\sigma_l^{+\alpha} = \frac{\sigma}{2}(1 + \cos 2\alpha)$$

$$\sigma_c^{+\alpha} = \frac{\sigma}{2}(1 - \cos 2\alpha)$$

$$\tau^{+\alpha} = -\frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha$$

[6.59]

Estableciendo la equivalencia entre estas tensiones, y las que aparecen sobre un punto elástico de la superficie de la vasija, se tiene que:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma}{2}(1 + \cos 2\alpha) \cdot N &= \frac{p \cdot r}{2 \cdot h} \\ \frac{\sigma}{2}(1 - \cos 2\alpha) \cdot N &= \frac{p \cdot r}{h} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{1 + \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 54,74^\circ \quad [6.60]$$

(nótese que, las tensiones tangenciales, se equilibran entre sí).