Departamento de Informática
Universidad Carlos III de Madrid

# Ingeniería en Informática

## Inteligencia Artificial

Prueba de autoevaluación

**Normas generales del examen**

- La solución del examen se entregará en una sola hoja doble.
- La hoja de enunciado también deberá entregarse junto a la hoja de solución.
- Recordad incluir vuestro nombre, apellidos, y el grupo en ambas hojas, la del enunciado, y la de la solución.
- El tiempo para realizar el examen es de **30 minutos**
- No se responderá a ninguna pregunta sobre el examen
- Si se sale del aula, no se podrá volver a entrar durante el examen
- No se puede presentar el examen escrito a lápiz
- No se puede utilizar ningún tipo de documentación ni herramienta de cómputo automático

**Apellidos** ......................................................... **Nombre(s)** ............................. **Grupo:** ...

## Problema 1. (1 punto)

Un puente tendido sobre un río, en malas condiciones, soporta como máximo el peso de dos personas al mismo tiempo. En un extremo hay cuatro personas que desean cruzarlo de noche, usando para ello un único farol de aceite. Puesto que sólo disponen de uno, cada vez que una pareja llega al extremo final del puente, alguien deberá volver al extremo inicial para que otros puedan usarlo.

Además, cada uno de ellos tarda un tiempo diferente en recorrerlo: el más rápido puede hacerlo en un minuto; el siguiente tarda dos minutos; el tercero, cinco minutos y el más lento de todos consume hasta diez minutos. Por supuesto, dos personas juntas tardan en cruzar el puente, el tiempo que tarde el más lento de éllos.

El farol tiene una cantidad de aceite limitada, de modo que se desea encontrar la combinación óptima de movimientos que minimiza el tiempo total para dejar a las cuatro personas en el extremo final.

Se pide:

① **(0,5 puntos)** Representar el *espacio de problemas.*

② **(0,5 puntos)** ¿Qué funciones *heurísticas admisibles* se te ocurren para guiar un algoritmo de búsqueda que encuentre la solución óptima a este problema?

# Solución

① Para caracterizar el *espacio de problemas*, será preciso distinguir el *espacio de estados*, representando los *estados inicial* y *final* y, por último, los *operadores* para transitar de un estado a otro.

Puesto que las personas sólo pueden estar, o bien en el extremo inicial (que representaremos con la letra $i$), o en el extremo final (con la letra $f$) y, además, las personas se distinguen por el tiempo que tarda cada uno en cruzar el puente, una representación válida sería: $(p_1, p_2, p_5, p_{10})$ esto es: posición del que tarda 1 minuto, seguida de las posiciones que ocupan las personas que tardan 2, 5 y 10 minutos.

Sin embargo, además de las personas, también falta el farol que, en cada paso, habrá sido llevado hasta el extremo inicial o final por alguna de las personas que han pasado sobre el puente. Para tener en cuenta la posición del farol, basta con extender nuestra representación con un quinto elemento para indicar su situación: $(p_1, p_2, p_5, p_{10}, farol)$

Así, por ejemplo, el estado inicial se representaría como $(i, i, i, i, i)$ y el estado final $(f, f, f, f, f)$. Podría argumentarse que en la descripción del estado final la posición del farol es irrelevante (y, de hecho, así es) pero, al mismo tiempo, es obvio que necesariamente deberá haber llegado hasta el extremo final.

Sin embargo, las representaciones no son únicas y existen otras alternativas. Por ejemplo:

*a*) Usando **lógica de predicados**: una alternativa consiste en definir el predicado *posición (u,v)* que es cierto si la posición de $u$ es $v$. Así, si representamos con $p_1$, $p_2$, $p_5$ y $p_{10}$ a las personas que tardan ese tiempo en desplazarse de un lado a otro y con *farol* al farol que emplean para guiarse, una representación del estado inicial sería:

*posición* $(p_1, i)$
*posición* $(p_2, i)$
*posición* $(p_5, i)$
*posición* $(p_{10}, i)$
*posición (farol, i)*

donde $i$ representa el extremo inicial como antes y $f$ el final. De la misma manera, el estado final sería:

*posición* $(p_1, f)$
*posición* $(p_2, f)$
*posición* $(p_5, f)$
*posición* $(p_{10}, f)$
*posición (farol, f)*

*b*) Otra alternativa, equivalente a la primera $(p_1, p_2, p_5, p_{10}, farol)$, consiste en utilizar la representación de **variable–valor** que asigna, en este caso, a la variable *posición (u)* el valor que toma.
Empleando la misma definición de términos que en los casos anteriores, el estado inicial podría definirse inequívocamente de la manera:

*posición* $(p_1) = i$
*posición* $(p_2) = i$
*posición* $(p_5) = i$
*posición* $(p_{10}) = i$
*posición* $(farol) = i$

y el estado final sería:

*posición* $(p_1) = f$
*posición* $(p_2) = f$
*posición* $(p_5) = f$
*posición* $(p_{10}) = f$
*posición* $(farol) = f$

A propósito de los operadores, obviamente, hay una única acción, *Mover*, cuya tarea consiste en desplazar personas de un lado a otro. Del enunciado se desprende el hecho de que, en unos casos, es posible desplazar hasta dos personas simultaneamente pero también, si se deseara, sólo a una. Esta distinción se traducirá en la definición de dos operadores claramente diferenciados: *Mover1 (x)*, que desplazará al individuo $x$ al extremo opuesto al que ocupa actualmente y *Mover2 (x,y)*, que llevará a ambos al otro extremo del puente al mismo tiempo.

En cualquier caso, las condiciones que restringen la aplicación de cualquiera de los dos operadores serán:

*a*) El farol debe estar en el mismo extremo desde el que se quiere desplazar a alguien.

*b*) En el caso de *Mover2 (x,y)*, ambas personas deben estar en el mismo lado del puente.

y los efectos consistirán simplemente en actualizar la posición, de los individuos escogidos, así como la posición del farol, que siempre se entenderá que acompaña a quien o quienes cruzan el puente.

Empleando, por ejemplo, la tercera representación de los estados discutida en la sección anterior, es posible formalizar los operadores como sigue:

**Mover1(x):**

SI *posicion (x) = posicion (farol)*
$x \in \{p_1, p_2, p_5, p_{10}\}$
ENTONCES *posicion (farol) = 1 - posicion (farol)*
*posicion (x) = posicion (farol)*

donde "*1-posicion (x)*" es una forma cualquiera de decir que *posicion (x)* toma su valor complementario.

El segundo operador sería, simplemente:

**Mover2(x,y):**

SI *posicion (x) = posicion (farol)* $\wedge$
*posicion (y) = posicion (farol)*
$x, y \in \{p_1, p_2, p_5, p_{10}\}$
ENTONCES *posicion (farol) = 1 - posicion (farol)*
*posicion (x) = posicion (farol)*
*posicion (y) = posicion (farol)*

② A partir de las consideraciones del apartado anterior, resulta claro que ahora podemos relajar una cualquiera, o ambas, de las siguientes restricciones:

❶ No pueden pasar más de dos personas por el puente, definida implícitamente en la distinción de operadores.

❷ Es preciso disponer del farol para poder cruzar, definida explícitamente en la parte izquierda de las reglas de los operadores.

Si relajamos ambas restricciones, obtendremos un problema relajado en el que un número cualquiera de personas pueden cruzar al otro lado sin necesidad de usar el farol[1]. En este caso, el coste óptimo es simplemente el tiempo que tardaría el individuo más lento en el extremo inicial, y que podríamos representar esquemáticamente como sigue:

$$h_1(n) = \text{máx}\{t_j\}, p_j \in i$$

esto es, el tiempo máximo del individuo $j$-ésimo, $t_j$, dado que ese individuo, $p_j$, esté en el extremo inicial.

[1] Imagínese que ahora estamos resolviendo el mismo problema de día (esto es, no hace falta un farol) usando un puente robusto —y que, por lo tanto, aguanta cualquier peso.

Otra heurística plausible se obtiene relajando simplemente la restricción ❶. Si consideramos ahora que un número arbitrario de individuos pueden pasar al otro lado, pero dado por hecho que necesitan el farol para hacerlo[2], el coste óptimo será la misma expresión de antes, $h_1(n)$, si el farol está en el extremo inicial, o esa misma expresión más el tiempo que tarde el individuo más rápido en llevar el farol desde el extremo final al inicial, si el farol está al otro lado. Esquemáticamente:

$$h_2(n) = \left\{ \begin{array}{ll} \text{máx}\{t_j\} & , \quad \textit{posicion(farol)} = i, p_j \in i \\ \text{mín}\{t_k\} + \text{máx}\{t_j, t_k\}, & \quad \textit{posicion(farol)} = f, p_j \in i, p_k \in f \end{array} \right.$$

Por último, relajando ahora únicamente la restricción ❷, pero observando la primera[3], el coste óptimo dependerá de los individuos más lentos que aún queden en el extremo inicial.

Si hay una o dos personas en el extremo inicial, el coste óptimo de esta versión relajada será el tiempo del más lento; si hay tres o cuatro individuos pendientes de cruzar, entonces el coste óptimo será el tiempo del individuo más lento (que cruzará acompañado del segundo más lento) más el tiempo del tercero más lento —que estará acompañado, si lo hubiera, por el cuarto individuo. Esta función heurística puede representarse, formalmente, como sigue:

$$h_3(n) = \left\{ \begin{array}{ll} \text{máx}\{t_j\} & , \quad \textit{hay una o dos personas en } i, p_j \in i \\ \text{máx}\{t_j\} + \text{mín}\{t_j\}, & \quad \textit{hay tres personas en } i, p_j \in i \\ 12 & , \quad \textit{hay cuatro personas en } i \end{array} \right.$$

puesto que si hay cuatro personas en el extremo inicial ($i$), sus tiempos son 1, 2, 5 y 10, de modo que las parejas más rápidas serán 1–2 y 5–10, que si pasan una después de la otra, tardarán un tiempo total igual a: $\text{máx}\{1, 2\} + \text{máx}\{5, 10\} = 12$.

Basta con observar la definición de $h_1(\cdot)$ y $h_2(\cdot)$ para darse cuenta de inmediato que $h_2 \geq h_1$ para cualquier estado $n$, de modo que se dice que $h_2$ está más informada que $h_1$ y será preferible por lo tanto. Sin embargo, nada puede decirse *a priori* de la relación entre $h_2$ y $h_3$ de modo que una y otra son igualmente buenas y, con toda seguridad, *admisibles*, tal y como se pedía en el enunciado.

Una vez definido el espacio de problemas e implementando una cualquiera de las funciones heurísticas $h_2(\cdot)$ o $h_3(\cdot)$, un algoritmo de búsqueda admisible como el A* o el IDA* encontrarían la solución óptima a este problema.

A propósito de la solución al problema, Zbigniew Michalewicz y David B. Fogel advierten lo siguiente[4]:

> Your first thought might be to send the quickest traveler, Mr. A, across the bridge with each man in turn. Mr. A could carry the lamp. So Mr. A and Mr. B could go across together —this would take two minutes— then Mr. A would return with the lamp which would take an additional minute. Then Mr. A could go across with Mr. C and then come back to do the same thing again with Mr. D. In all, this would require 19 minutes. But actually, there is a better way for them to accomplish their task. Can you find the solution?
> Once you solve this puzzle, it should be easy to solve similar puzzles. For example, six travelers approach the same bridge and their respective times for crossing the bridge are 1,3,4,6, 8 and 9 minutes. Again, what's the best way to schedule them to get to the other side in the shortest time? Suppose instead that there are seven travellers, with crossing times of 1, 2, 6, 7, 8, 9 and 10 minutes, but in this instance the bridge is more modern and can handle three travelers on the bridge at any time, ...
>
> Zbigniew Michalewicz, David B. Fogel
> *How to Solve It: Modern Heuristics*
> 2nd Edition, Springer, 1998, Germany.

[2]Esto es, ahora estamos resolviendo el mismo problema de noche pero con un puente lo suficientemente robusto.

[3]En otras palabras, resolviendo una versión relajada en la que se cruza un puente endeble que sólo soporta a dos personas, pero de día

[4]En el texto, Mr. A es el que tarda 1 minuto y Mr. B, C y D son los que tardan 2, 5 y 10 minutos respectivamente