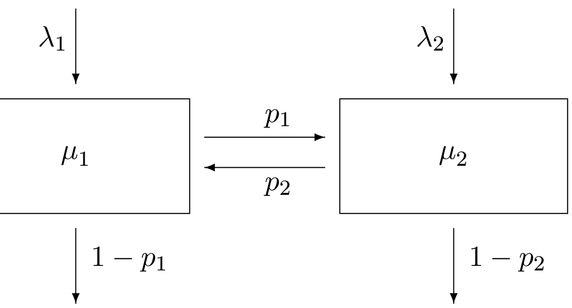
PROCESOS ESTOCÁSTICOS

LISTA DE EJERCICIOS 4

1. A partir del siguiente esquema de red de colas,



   sabiendo que cada nodo se comporta como una *M/M/1*, determinar qué restricciones deben verificar p_1 y p_2 para que exista ergodicidad.

   a) Suponiendo servidores ocupados.

   b) En el caso general.

2. *a*) Plantea las ecuaciones diferenciales de Kolmogorov (*forward*)para la Cadena de Markov a tiempo continuo cuyas tasas de transición son

$$\lambda_n = \lambda \quad \forall n \geq 0$$
$$\mu_n = \mu_{(n \wedge c)} \quad \forall n \geq 0$$

   b) Dibujar el grafo e identificar de que modelo estocástico se trata.

   c) Plantear las ecuaciones de balance para el sistema en régimen estacionario.

   d) Obtener la expresión explícita para la probabilidad de sistema vacío.

3. Dada una cadena de Markov de parámetro continuo y homogénea, sea $T_i \equiv$ *tiempo transcurrido en el estado i antes de que se produzca un salto fuera de él.* Probar que T_i es *exponencial* de parámetro q_i.

$$\left(q_i = \lim_{t \to 0} \frac{1 - P_{ii}(t)}{t} = -P'_{ii}(t) \right)$$

4. Supongamos que una industria tiene M máquinas y s personas encargadas de la reparación, con $s < M$. Supongamos que

   - Cada máquina opera durante una longitud de tiempo distribuída exponencialmente (tiempo medio $= 1/\lambda$) antes de romperse.
   - Cuando una máquina se rompe, el primer operario disponible la repara (si todos están ocupados, la máquina espera en una cola). El tiempo de reparación está exponencialmente distribuído (con media $1/\mu$).
   - Los tiempos de ruptura y de reparación son variables mutuamente independientes.

a) Sea $X(t) \equiv$ número de máquinas descompuestas en el instante t. Probar que $X(t)$ es un proceso de nacimiento y muerte y hallar las tasas correspondientes.

b) Hallar las probabilidades límite para todos los estados.

5. Hallar

   a) las ecuaciones *backward* y *forward* para un proceso de nacimiento y muerte y particularizarlo para uno de nacimiento puro.

   b) las probabilidades de transición $P_{ij}(t)$ si consideramos un proceso de nacimiento puro con $\lambda_j = j\lambda,\ j \geq 0$ (proceso de *Yule*).

6. Hallar π_n en el caso de una cola *M/M/1*.

7. Sea $X(t)$ un proceso de nacimiento puro. Asumamos que

$$P\,(ocurra\ un\ evento\ en\ \ (t, t+h)\,|\,X(t) = impar) = \lambda_1 h + o(h)$$
$$P\,(ocurra\ un\ evento\ en\ \ (t, t+h)\,|\,X(t) = par) = \lambda_2 h + o(h)$$

   Considerando $X(0) = 0$, hallar las siguientes probabilidades

   a) $P_1(t) = P\,(X(t) = impar)$

   b) $P_2(t) = P\,(X(t) = par)$

8. El departamento de hombres de unos grandes almacenes tiene un sastre para hacer los ajustes a la ropa. Los clientes que necesitan ajustes siguen una distribución de *Poisson* con media 24 clientes/hora. El tiempo necesario para realizar el ajuste se distribuye exponencialmente con media 2 minutos. Calcular:

   a) El número promedio de clientes en la sala de ajuste.

   b) Tiempo medio de espera de un cliente en la sala de ajuste.

   c) La probabilidad de que un cliente espere los servicios del sastre más de 10 minutos.

   d) Porcentaje de tiempo que el sastre permanece ocioso.

9. A un aeropuerto llegan 20 aviones por hora. Cada avión tarda 4 minutos en aterrizar. Determinar el número de pistas necesario para que al llegar el avión la probabilidad de que tenga que esperar no sea superior a 0.1 (las llegadas son *Poisson* y los tiempos de aterrizaje se distribuyen exponencialmente).

10. Sea X_t una cadena de Markov en tiempo continuo cuyo generador es

$$Q = \begin{pmatrix} -\mu & \mu \\ \lambda & -\lambda \end{pmatrix} \quad \text{con } \lambda\mu > 0$$

   a) Escribir las ecuaciones *forward* y resolverlas para las probabilidades de transición $p_{ij}(t),\ i, j = 1, 2$.

   b) Resolver la ecuación $\Pi Q = 0$ y comprobar que

$$p_{ij}(t) \to \pi_j \quad \text{si } t \to \infty$$

11. Imagina cuatro personas en una casa, de las cuales algunas están sanas y otras presentan cierta enfermedad. Supóngase que las personas enfermas se curan a una tasa de μ, mientras que dos personas se encuentran según una tasa de λ y se transmite la enfermedad si una de las dos está enferma y la otra es susceptible a contraerla.

    a) Formula un modelo de cadena de Markov para este sistema.

    b) Supóngase, para simplificar, que curarse es imposible, $\mu = 0$. ¿Cuánto tiempo pasa desde que se infecta la primera persona hasta que las cuatro personas lo están?

12. Una pequeña tienda de ordenadores tiene espacio disponible para almacenar 3 ordenadores para su venta. Los clientes llegan a la tienda según un proceso de *Poisson* con un promedio de 2 a la semana, para comprar un ordenador, cosa que hacen si por lo menos hay uno disponible. Cuando en la tienda hay sólo un ordenador se realiza un pedido de dos ordenadores más. El tiempo en que se satisface el pedido sigue una distribución *exponencial* de media una semana. Mientras llega el pedido, el ordenador que quedaba puede ser vendido.

    a) Escribe la matriz de tasas de transición Q_{ij} y resuelve $\pi Q = 0$ para obtener la distribución estacionaria.

    b) ¿A qué tasa se producen las ventas de la tienda?

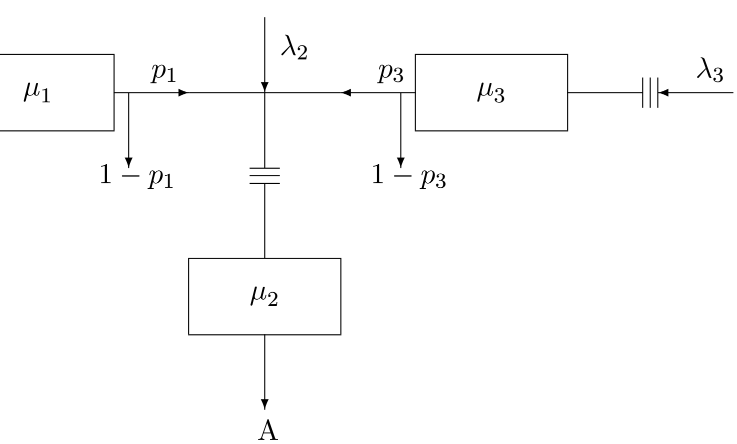
13. En el modelo de cola *M/M/1*

    a) dibujar el grafo de transición de estados para la cadena de Markov X_t que contabiliza el número de usuarios en el sistema,

    b) escribir la matriz de tasas de transición (generador),

    c) obtener la distribución en equilibrio a partir de las ecuaciones diferenciales (*forward*) de Chapman-Kolmogorov.

14. Cada una de las colas de la red adjunta sigue un régimen *M/M/1* con las tasas que se especifican. Se denomina *tasa de utilización del servidor* en una cola *M/M/1* a la fracción $\rho = \lambda/\mu$. Si dicha tasa es próxima a 1, significa que el tiempo que cada servidor está ocioso ($p_0 = 1 - \lambda/\mu$) es despreciable.



    a) Determinar qué proceso estocástico contabiliza en intervalos de duración t, la salida A del sistema para el caso general (posibles servidores 1, 2 y 3 ociosos).

b) Determinar qué proceso estocástico contabiliza en intervalos de duración t, la salida A del sistema para el caso en el que λ_2/μ_2 sea próximo a 1.

c) Dibujar el grafo de evolución del proceso de nacimiento y muerte X_n que describe el número de usuarios en el sistema de la cola 2, suponiendo que todas las tasas de utilización son próximas a 1.

d) Deducir la distribución estacionaria para el sistema de la cola 2 en las mismas condiciones que *c)*.

15. La ocupación de un cierto local de ocio, se puede reducir a tres tipos de situaciones atendiendo al servicio requerido en cada caso. La evolución del tipo de ocupación a lo largo del tiempo puede describirse como una Cadena de Markov en tiempo continuo, con $S = \{1, 2, 3\}$ y con tasas $q_{12} = \lambda_1$, $q_{13} = \lambda_2$, $q_{21} = \mu_2$, $q_{23} = 0$, $q_{31} = \mu_3$, $q_{32} = \mu_1$.

    a) Dibujar el grafo de transición y dar la matriz de tasas de transición.

    b) Plantear y resolver las ecuaciones *forward* diferenciales de Chapman-Kolmogorov para el régimen de equilibrio.