PROCESOS ESTOCASTICOS

LISTA DE EJERCICIOS 5

1. Responder verdadero o falso explicando brevemente el por qué.
   Sea B_t un movimiento browniano con parámetro $var = \sigma^2$.

   a) B_t es martingala.
   b) B_t es martingala sólo si $\sigma^2 = 1$.
   c) El proceso cB_t es martingala sólo si $c < 1$, c constante.
   d) $\{\mu t + cB_t\}$ es movimiento browniano con distribución marginal $\mathcal{N}\left(\mu t, c^2\sigma^2 t\right)$.

2. Demostrar que todo proceso centrado de incrementos independientes es martingala.

3. Sea B_t movimiento browniano estándar ($\sigma^2 = 1$). Probar que el proceso $B_t^2 - t$ es martingala, esto es, si $s < t$ se verifica que

$$E\left[B_t^2 - t \,|\, B_r, r \leq s\right] = B_s^2 - s.$$

4. Probar que los procesos B_{ct} y $\sqrt{c}B_t$ son movimientos brownianos con idéntica distribución para todo t.

5. Sea $\{B_t\}$ un movimiento browniano con $\sigma^2 = 1$. Calcular $Cov\,(B_t, B_s)$.

6. Demostrar que (suponiendo $\sigma^2 = 1$)

$$E\left[B_t \,|\, B_1 = 0\right] = 0 \qquad \text{y} \qquad E\left[B_t^2 \,|\, B_1 = 0\right] = t(1-t)$$

7. Si B_t^0 verifica las condiciones del movimiento browniano y además verifica que $B_1^0 = 0$, se dice que B_t^0 es un puente browniano.
   Calcular $Cov\left(B_t^0, B_s^0\right)$, para $s < t < 1$.

8. Sea B_t un movimiento browniano. Fijemos un instante $t_0 \geq 0$. Demostrar que el proceso

$$\left\{\widetilde{B}_t = B_{t_0+t} - B_{t_0}, t \geq 0\right\}$$

   es también un movimiento browniano.

9. *Movimiento browniano geométrico:* se trata de la exponencial de un movimiento browniano con deriva lineal, es decir,

$$X_t = \exp\left(\sigma B_t + \mu t\right)$$

   $t \geq 0$, donde $\sigma > 0$ y $\mu \in \mathbb{R}$ son constantes. Este proceso se propone como modelo para la curva de precios de los activos financieros.
   Calcular la media y la autocovarianza del movimiento browniano geométrico. ¿Es un proceso gaussiano?

10. Comprobar si los siguientes procesos estocásticos, definidos a partir de un movimiento browniano B_t (con $\sigma^2 = 1$) son martingalas:

a) $X_t = \exp\left(\varphi B_t - \frac{t\varphi^2}{2}\right)$

b) $X_t = B_t^3 - 3tB_t$.

c) $X_t = (B_t + t)\exp\left(-B_t - \frac{1}{2}t\right)$

11. Demuestra que si $s < t$, la distribución condicionada de $B_s \mid B_t = z$ es normal con media zs/t y varianza $s(t-s)/t$.

12. Sea $B_t^0 = B_t - tB_1$ un puente browniano y sea $X_t = (1-t)B_{t/(1+t)}^0$. Demostrar que X_t es un movimiento browniano estándar.

13. Sea $R_t = \text{mín}\{s > t : B_s = 0\}$. Calcular $P_0(R_t = u)$.

14. Sea $\left(B_t^1, \ldots, B_t^d\right)$ un movimiento browniano d-dimensional y sea

$$R_t = \sqrt{\left(B_t^1\right)^2 + \ldots + \left(B_t^d\right)^2}$$

la distancia al origen. Demuestra que $R_t^2 - td$ es una martingala.

15. Comprueba directamente que

$$E\left[B_t^4 - 6tB_t^2 + 3t^2 \mid B_r, r \leq s\right] = B_s^4 - 6sB_s^2 + 3s^2.$$

16. Dado un movimiento browniano $\{B_t\}$, consideremos las variables

$$X_i = \sqrt{n}\left(B_{i/n} - B_{(i-1)/n}\right)$$

Demostrar que

$$E\left[|X_i|\right] = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \qquad \text{y} \qquad V\left[|X_i|\right] = 1 - \frac{2}{\pi}$$

17. Sea $X_t = \mu t + \sigma B_t$ el movimiento browniano con deriva. Demostrar que

$$E\left[X_t\right] = \mu t \qquad \text{y} \qquad Cov(X_t, X_s) = \sigma^2 \text{mín}(t, s)$$

Comprobar además que

$$X_t - X_s \sim \mathcal{N}\left(\mu(t-s), \sigma^2 |t-s|\right)$$

18. Sea B_t un movimiento browniano n-dimensional. Consideremos una matriz $\mathcal{U}$ cuadrada de dimensión n, ortogonal (es decir, $\mathcal{U}\mathcal{U}^T = I$). Demostrar que el proceso

$$\widetilde{B}_t = \mathcal{U}B_t$$

es también un movimiento browniano.

19. Dado el proceso estocástico $M_t = 5B_t + 3$, siendo B_t un movimiento browniano estándar,

a) demostrar que es una martingala,

b) ¿qué distribución sigue el incremento $M_{5,3} - M_{2,1}$.?