PROCESO DE POISSON
Rosario Romera
Febrero 2009

1. Proceso de Conteo

Un proceso estocástico $\{N_t\}_{t\geq 0}$ es un proceso de conteo si N_t representa el total de sucesos ocurridos hasta el tiempo t. Sean Ω un espacio muestral, P una probabilidad, $\omega \in \Omega$ y $t \geq 0 \rightarrow N_t(\omega)$ es el número de llegadas en el intervalo $[0, t]$ para la realización ω, $\quad t \rightarrow N_t(\omega)$ es una función escalón.

Definición: El Proceso $\{N_t\}_{t\geq 0}$ es Proceso de Conteo

1. $N_0 = 0$.
2. $N_t \in \mathbb{N} \quad \Leftrightarrow \quad N_t \geq 0$
3. $s < t \quad \rightarrow \quad N_s \leq N_t$
4. $N_t - N_s$ es el número de llegadas en el intervalo $[s, t]$.

De todos los procesos de este tipo, el más importante es el Proceso de Poisson, que limita los saltos de la función a saltos iguales.

Definición: Sea $o(h)$ el infinitésimo de orden h, f es $o(h)$ si $\lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = 0$, esto es: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad$ tal que si $\quad |h| < \delta \quad \rightarrow \quad \left|\frac{f(h)}{h}\right| < \varepsilon$

Ejemplos:

1. La función $f(x) = x \equiv o(h)$
2. La función cuadrática $f(x) = x^2 \equiv o(h)$

$$\lim_{h\to 0} \frac{h^2}{h} = \lim_{h\to 0} h = 0$$

3. La función $f(x) = x^r$ con $r > 1$ es $o(h)$

$$\lim_{h\to 0} \frac{h^r}{h} = \lim_{h\to 0} h^{r-1} = 0$$

4. Las funciones f, g son $o(h)$, con c, d constantes, entonces la función: $cf + dg$ es $o(h)$

$$\lim_{h \to 0} cf(h) + dg(h) = 0$$

5. Sean $c_1, \ldots, c_n$ constantes, las funciones $f_1, \ldots, f_n$ son $o(h)$, entonces la función:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i f_i(h) \quad \text{es} \quad o(h)$$

6. Si X es variable aleatoria con distribución $\exp(\lambda)$ y $h > 0$ entonces X tiene la Propiedad de Markov:

$$P[X \leq t + h/X > t] = P[X \leq h]$$

como:

$$\begin{aligned} P[X \leq h] &= 1 - e^{-\lambda h} = 1 - [1 - \lambda h + \frac{(\lambda h)^2}{2!} + ...] \\ &= \lambda h - (\lambda h)^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-\lambda h)^{n-2}}{n!} = \lambda h + o(h) \end{aligned}$$

entonces

$$P[X \leq t + h/X > t] = \lambda h + o(h)$$

2. Proceso de Poisson (de tasa o intensidad $\lambda > 0$)

Es un proceso de conteo $\{N_t\}_{t \geq 0}$ que verifica:

1. Es de incrementos independientes y estacionarios
2. $P[N_h = 1] = \lambda h + o(h)$
   $P[N_h \geq 2] = o(h)$
   por tanto $P[N_h = 0] = 1 - \lambda h + o(h)$

Proposición: Sea Y la variable aleatoria que describe el número de llegadas (sucesos) en cualquier intervalo de longitud t en un proceso de Poisson $\{N_t\}_{t \geq 0}$ de tasa λ, entonces Y es variable aleatoria Poisson de parámetro λt.

Demostración

Sea $P_n(t) = P\{N_t = n\} \quad \forall n \in N$

Sea $n = 0$

$$\begin{aligned}
P_0(t+h) &= \text{(Incrementos Independientes)} \\
&= P\{0 \text{ llegadas en } [0,t] \cap 0 \text{ llegadas en } [t,t+h]\} \\
&= P_0(t).P(N_{t+h} - N_t = 0) \quad \text{(Incrementos Estacionarios)} \\
&= P_0(t).P(N_h = 0) = P_0(t).[1 - \lambda h + o(h)] \\
\lim_{h\to 0} \frac{P_0(t+h) - P_0(t)}{h} &= -\lambda P_0(t) + P_0(t). \lim_{h\to 0} \frac{o(h)}{h} \\
\text{luego} & \\
\text{con} & \quad \left\{ \begin{array}{rl} \frac{d}{dt}P_0(t) = & -\lambda P_0(t) \\ P_0(0) = & 1 \text{ (condiciones iniciales)} \\ & \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Solución de la ecuación diferencial de variables separables

$$\left\{ \begin{array}{ll} P_0'(t) & = -\lambda.P_0(t) \\ P_0(0) & = 1 \end{array} \right. \qquad \text{de donde } P_0(t) = e^{-\lambda t}$$

Sea ahora $n > 0$, entonces en el intervalo $t + h$ ocurren n llegadas (sucesos), esto es $\{N_{t+h} = n\}$ si:

1. suceden n en $[0,t]$ y 0 en $[t,t+h]$,
2. suceden $n-1$ en $[0,t]$ y 1 en $[t,t+h]$,
3. suceden $(n-k)$ en $[0,t]$ y k en $[t,t+h]$ con $k = 2,\ldots,n$.

Acumulando las probabilidades asociadas

$$\begin{aligned}
P_n(t+h) &= P_n(t)[1 - \lambda h + o(h)] + \lambda h P_{n-1}(t) + o(h) \\
\text{entonces} & \\
\frac{P_n(t+h) - P_n(t)}{h} &= -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + \frac{o(h)}{h} \\
\text{tomando límites } h \to \infty & \\
\frac{dP_n(t)}{dt} &= -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) \\
\text{esto es la ecuación diferencial} & \\
& \quad \left\{ \begin{array}{rl} P_n'(t) = & -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) \\ P_n(0) = & 0 \end{array} \right. \\
\text{cuya solución es} & \quad P_n(t) = \frac{e^{-\lambda t}.(\lambda t)^n}{n!} \qquad \square
\end{aligned}$$

Corolario 1: El número medio de llegadas en el intervalo $[0,t]$ es λt, y el número medio de llegadas en el intervalo $[0,1]$ es λ.

Corolario 2: Estimación de λ.

Por la Ley de los Grandes Números

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{N_n}{n} & = & \dfrac{N_1 + N_2 - N_1 + ...N_n - N_{n-1}}{n} \\ \text{si } n \to \infty & & \text{entonces} \quad E[N_i] = \lambda \\ \text{luego} & & \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{N_t}{t} = \lambda \end{array}$$

Además por el Teorema Central del Límite si $\lambda t \to \infty$ entonces:

$$N_t \quad \to N(\lambda t, \lambda t)$$

Válido para $\lambda t > 10$.

Corolario 3:

$$P\{N_{t+s} - N_t = k/N_l, l \leq t\} \quad = \quad P\{N_{t+s} - N_t = k\}$$

Ejemplo

$P\{N_{2,5} = 17, N_{3,7} = 22, N_{4,3} = 36\}$ en un Proceso Poisson de tasa $\lambda = 8$.

$$\begin{aligned} P\{N_{2,5} &= 17, N_{3,7} = 22, N_{4,3} = 36\} = \\ &= P(N_{2,5} = 17).P(N_{3,7} - N_{2,5} = 5).P(N_{4,3} - N_{3,7} = 14) \\ &= P(Poisson(8 \times 2,5) = 17).P[Poisson(8 \times 1,5) = 5].P(Poisson(8 \times 0,6) = 14) \\ &= \frac{e^{-20},20^{17}}{17!}.\frac{e^{-9,6},9,6^5}{5!}.\frac{e^{-4,8},4,8^{14}}{14!} \end{aligned}$$

aproximación Poisson $(\lambda t) \approx N(\lambda t, \lambda t)$

Proposición: $\{N_t\}_{t\geq 0}$ Proceso de Poisson de tasa λ. Sea $\tau \sim$ variable aleatoria "tiempo entre llegadas consecutivas", entonces τ es una variable aleatoria con distribución $\exp(\lambda)$

Demostración

$$\begin{aligned} P(\tau \leq t) &= 1 - P(\tau > t) = 1 - P\{N_t = 0\} \\ &= 1 - \frac{e^{-\lambda t}.(\lambda t)^0}{0!} = 1 - e^{-\lambda t} \quad \Rightarrow \quad \tau \sim \exp(\lambda) \qquad \square \end{aligned}$$

Observación:

$$E[\text{ tiempo entre llegadas }] = \frac{1}{\lambda}$$

Proposición: Sea $\{N_t\}_{t\geq 0}$ Proceso de Poisson de tasa λ y en $[0, t]$ se ha producido una llegada, sea $Y \sim$ variable aleatoria que describe la ocurrencia de esta llegada de Poisson entonces Y es uniforme $[0, t]$.

Demostración.

Sea $0 < x < t$, por definición de Y:

$$\begin{aligned} P[Y \leq x] &= P[\tau_1 \leq x/N_t = 1] = P[N_x = 1, N_t = 1] \\ &= \frac{P[N_x = 1, N_t - N_x = 0]}{P[N_t = 1]} \\ &= \frac{\lambda x e^{-\lambda x}.e^{-\lambda(t-x)}}{\lambda t e^{-\lambda t}} = \frac{x}{t} \end{aligned}$$

entonces $Y \sim u(0,t)$. $\square$

Proposición: Superposición de procesos de Poisson
Sean $\{L_t\}_{t\geq 0}$ y $\{M_t\}_{t\geq 0}$ Procesos de Poisson independientes, de tasas λ y μ respectivamente, entonces:

$$N_t(\omega) = L_t(\omega) + M_t(\omega)$$

es proceso de Poisson de tasa $(\lambda + \mu)$.

Demostración

Sea $N_B =$ número de llegadas en el intervalo $[0, B]$, veamos qué es una variable aleatoria de Poisson de parámetro $(\lambda + \mu).B$.

$$\begin{aligned} P[N_B = n] &= \sum_{k=0}^{n} P[L_B = k, M_B = n-k] \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{-\lambda B}(\lambda B)^k}{k!}.\frac{e^{-\mu B}.(\mu B)^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \frac{e^{-\lambda B}.e^{-\mu B} B^k B^{n-k}}{n!}(\lambda+\mu)^n \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k \cdot \left(\frac{\mu^{n-k}}{\lambda+\mu}\right) \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{e^{-B(\lambda+\mu)} B^n.(\lambda+\mu)^n}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-k} \\ &= \left(\text{ya que } \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^n 1^n\right) \\ &= \frac{e^{-(\lambda+\mu)B}.((\lambda+\mu).B)^n}{n!} \\ &\approx \text{Poisson } (\lambda+\mu).B \qquad \square \end{aligned}$$

Proposición: Descomposición del Proceso de Poisson
Sea $\{N_t\}_{t\geq 0}$ Poisson de tasa λ, se consideran:
$\{X_n\}_{n\geq 1}$ Proceso Bernoulli (p) independiente de N_t
$\{S_n\}_{n\geq 1}$ Proceso Sumas de Bernoulli (p) tal que:
$S_{N_t} =$ número de éxitos en $[0,t]$ y
$L_t = N_t - S_{Nt} =$ Número de fracasos en $[0,t]$

Entonces los procesos $\{S_{Nt}\}_{t\geq 0}$ y $\{L_t\}_{t\geq 0}$ son Procesos de Poisson independientes de tasas λp y $\lambda(1-p)$ respectivamente.

Idea de la prueba.

Se demuestra que:

$$P\{S_{N_{t+s}} - S_{N_t} = m, L_{t+s} - L_t = k/S_{N_u}, L_u, u \leq t\} = \frac{\bar{e}^{\lambda ps}(\lambda ps)^m}{m!} \cdot \frac{\bar{e}^{\lambda qs}(\lambda qs)^k}{k!}$$

$$\forall k, m = 0, 1 \ldots \qquad s, t \geq 0$$

Ejemplo

Los vehículos llegan a un aparcamiento según un Proceso de Poisson de tasa $\lambda = 20$ por hora. Las probabilidades de que un vehículo lleve 1, 2, 3, 4, 5 personas son 0,3 0,3 0,2 0,1 y 0,1 respectivamente. Calcular el número esperado de personas que llegan al aparcamiento en una hora.

Solución.

N^1, $N^2, \ldots, N^5$ son el número de vehículos que llegan con 1, 2, $\ldots$5 personas en una hora sus distribuciones son:

N^1	$\sim$	Poisson (20 x 0,3)	$E[N^1] = 6$
N^2	$\sim$	Poisson (20 x 0,3)	$E[N^2] = 6$
N^3	$\sim$	Poisson (20 x 0,2)	$E[N^3] = 4$
N^4	$\sim$	Poisson (20 x 0,1)	$E[N^4] = 2$
N^5	$\sim$	Poisson (20 x 0,1)	$E[N^5] = 2$

$$\begin{aligned} E[Y: \quad & \text{número de personas que llegan en 1 hora}] = \\ = \; & E[N^1 + 2N^2 + 3N^3 + 4N^4 + 5N^5] \\ = \; & 1 \cdot E[N^1] + 2 \cdot E[N^2] + 3 \cdot E[N^3] + 4 \cdot E[N^4] + 5 \cdot E[N^5] \\ = \; & 6 + 2 \times 6 + 3 \times 4 + 4 \times 2 + 5 \times 2 = 48 \end{aligned}$$

Probabilidad de que en 3 horas lleguen 6 vehículos con 5 personas:

$$P[P_0(3 \cdot 20 \cdot 0{,}1) = 6] = P[P_0(6) = 6]$$

3. Generalización del Proceso de Poisson: Proceso de Nacimiento y Muerte

Relajando la hipótesis sobre la tasa λ (intensidad) constante, a una situación más realista, en la que la tasa de llegadas λ depende del estado en que se encuentra el proceso (λ_n) se tiene el Proceso de Nacimiento Puro que se caracteriza como

- Proceso de Conteo.
- Proceso de incrementos independientes y estacionarios
- Verificando

$$P(X_{t+h} = n + 1/X_t = n) = \lambda_n h + o(h)$$

$$P(X_{t+h} \geq n + 2/X_t = n) = o(h)$$

de donde

$$P(X_{t+h}=n/X_t=n)=1-\lambda_n h+o(h)$$

Admitiendo además la existencia de posibles transiciones a estados anteriores según tasa dependiente del estado del proceso (μ_n), se obtiene el **Proceso de Nacimiento y Muerte**:

- Proceso de incrementos independientes y estacionarios
- Verificando

$$P(X_{t+h}=n+1/X_t=n)=\lambda_n h+o(h)$$

$$P(X_{t+h}=n-1/X_t=n)=\mu_n h+o(h)$$

$$P(X_{t+h}=m/X_t=n)=o(h) \qquad \text{si} \quad |m-n|>1$$

de donde

$$P(X_{t+h}=n/X_t=n)=1-(\lambda_n+\mu_n)0(h)+0(h)$$

En forma matricial, en términos de la matriz Q (generador infinitesimal del proceso) o matriz de tasas

$$Q=\begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \ldots \\ \mu_1 & -\lambda_1-\mu_1 & \lambda_1 & 0 & \ldots \\ 0 & -\mu_2 & -\lambda_2-\mu_2 & \lambda_2 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

Ecuaciones diferenciales del Proceso Nacimiento y Muerte
denotando

$$\begin{aligned} P_n(t) &= P(X_t=n) \\ P_n(t+h) &= P(X_t=n).P(0 \text{ llegadas en } (t,t+h]/X_t=n) \\ &\qquad +P(X_t=n-1).P(1 \text{ llegada en } (t,t+h]/X_t=n-1)+ \\ &\qquad +P(X_t=n+1).P(1 \text{ abandono en } (t,t+h]/X_t=n+1)+ \\ &\qquad +P(\text{ resto de los casos }) \\ &= P_n(t).(1-(\lambda_n+\mu_n)h+o(h)+P_{n-1}(t).(\lambda_{n-1}h+o(h))+ \\ &+ P_{n+1}(t)(\mu_n h+o(h))+o(h) \end{aligned}$$

el cociente incremental

$$\begin{aligned} \frac{p_n(t+h)-p_n(t)}{h} &= -(\lambda_n+\mu_n)p_n(t)+p_n\frac{o(h)}{h}+p_{n-1}(t).\lambda_{n-1}+p_{n-1}(t)\frac{o(h)}{h}+ \\ &\qquad +p_{n+1}(t)\mu_{n+1}+p_{n+1}(t)+p_{n+1}(t)\frac{o(h)}{h}+\frac{o(h)}{h} \end{aligned}$$

tomando límites, con $h\to 0$

$$\lim_{h\to 0}\frac{p_n(t+h)-p_n(t)}{h}=-(\lambda_n+\mu_n)p_n(t)+\lambda_{n-1}p_{n-1}(t)+\mu_n p_{n+1}(t)$$

$$\begin{cases} p_n'(t)= & -(\lambda_n+\mu_n)p_n(t)+\lambda_{n-1}p_{n+1}(t)+\mu_n p_{n+1}(t) \qquad n\geq 1 \\ p_0'(t)= & -\lambda_0 p_0(t)+\mu_1 p_1(t) \end{cases}$$

La solución de esta ecuación diferencial se establece para las condiciones en las que el sistema está en equilibrio:

$$\begin{cases} p_n(t) = p_n \\ \frac{dp_n(t)}{dt} = 0 \end{cases}$$

que proporciona la solución siguiente sujeta a la condición de normalización

$$\sum_n p_n = 1$$

$$\begin{cases} \mu_{n+1}p_{n+1} - \lambda_n p_n = & \mu_n p_n - \lambda_{n-1}p_{n-1} \qquad n \geq 1 \\ \mu_1 p_1 - \lambda_0 p_0 = & 0 \end{cases}$$

equivalente a

$$\mu_n p_n = \lambda_{n-1}p_{n-1} \qquad n \geq 0$$

iterando

$$\left[\begin{array}{l} p_n = p_0 \prod_{j=1}^{n} (\lambda_{j-1}/\mu_j) \qquad n \geq 1 \\ \text{con} \quad p_0 = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j} \right) \right]^{-1} \end{array} \right]$$

3.1. Ejemplos de Procesos de Nacimiento y Muerte

Cola tipo M/M/1

Sea X_n = número de usuarios en el sistema con $\lambda_n = \lambda$, $\mu_n = \mu \quad \forall n \geq 0$. La distribución estacionaria se obtiene como

$$\begin{cases} p_n = p_0 . \left(\begin{array}{c} \lambda \\ \mu \end{array} \right)^n \\ p_0 = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{n} \frac{\lambda}{\mu} \right]^{-1} = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \right]^{-1} = \left(1 + \frac{\lambda/\mu}{1-\lambda/\mu} \right)^{-1} = \\ \qquad = (1 - \lambda/\mu) \qquad \text{si } \frac{\lambda}{\mu} < 1 \end{cases}$$

$$p_n = (1 - \lambda/\mu) \quad \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \quad \sim \quad \text{Geométrica} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right) \quad \text{si} \quad \frac{\lambda}{\mu} < 1$$

Cola tipo M/M/s

Sea X_n = número de usuarios en el sistema, siendo $\lambda_n = \lambda$ y

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & \text{si} \quad 1 \leq n \leq s \\ s\mu & \text{si} \quad n > s \end{cases}$$

Modelo de crecimiento lineal con inmigración (reproducción biológica)

$\mu_n = n\mu \quad$ con $\quad n \geq 1$
$\lambda_n = n\lambda + \theta \quad$ con $\quad n \geq 0$
θ : tasa de inmigración
λ : tasa exp. de reproducción por individuo.
μ : tasa muerte por individuo.

4. Proceso de Poisson Compuesto

Un proceso de Poisson compuesto $(X_t)_{t\geq 0}$ es un proceso estocástico que puede ser representado en la siguiente forma:

$$X_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i \quad , \quad t \geq 0$$

donde $(N_t)_{t\geq 0}$ es un proceso de Poisson y $\{Y_n : n \geq 0\}$ es una familia de variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas las cuales además son independientes de $(N_t)_{t\geq 0}$.

Observación 1: Si $Y_i \equiv 1$ para todo i entonces $X_t = N_t$ es decir, obtenemos el proceso ordinario de Poisson.

Observación 2: En la teoría del riesgo el proceso de Poisson compuesto tiene la siguiente interpretación: La v.a N_t representa el número de reclamaciones que se hacen a una compañía en el intervalo de tiempo $(0, t]$, Y_i representa la cantidad del i-ésimo reclamo y X_t representa la cantidad total reclamada en el intervalo de tiempo $(0, t]$.

Observación 3:

$$EX_t = \lambda t EY_1 \qquad y \qquad VarX_t = (\lambda t)EY_1^2$$

En efecto:

$$EX_t = E(E(X_t \mid N_t)) \text{ como } E(X_t \mid N_t = n) = E(\sum_{i=1}^{n} Y_i) = nEY_1$$

Entonces $E(X_t \mid N_t) = N_t EY_1$

Por otra parte $VarX_t = E(Var(X_t \mid N_t)) + Var(E(X_t \mid N_t))$

(recuerde: $Var(X \mid Y) := E((X - E(X \mid Y))^2 \mid Y)$.

De ahí $VarX = E(Var(X \mid Y)) + Var(E(X \mid Y)))$

Por consiguiente:

$$\begin{aligned} VarX_t &= E(N_t VarY_1) + Var(N_t EY_1) \\ &= \lambda t VarY_1 + (E(Y_1))^2.VarN_t \\ &= \lambda t VarY_1 + (E(Y_1))^2.\lambda t \\ &= \lambda t E(Y_1^2). \end{aligned}$$