Martingalas

Vamos a estudiar una clase de procesos que pueden verse como la fortuna de un jugador que juega repetidamente un *juego justo*. Así que pensemos que M_n es la fortuna del jugador luego de jugar n turnos del juego.

Decimos que $M_0, M_1, \ldots$ es una **martingala** si para cualquier $n \geq 0$

1. $E|M_n| < \infty$
2. para cualquier sucesión de posibles valores $m_0, m_1, \ldots, m_n$

$$E[M_{n+1}|M_0 = m_0, M_1 = m_1, \ldots, M_n = m_n] = m_n$$

La segunda propiedad es equivalente a

$$E[M_{n+1} - M_n|M_0 = m_0, M_1 = m_1, \ldots, M_n = m_n] = 0.$$

Es decir, condicionando al pasado, la ganancia neta esperada luego del turno siguiente es cero. Esto es, el juego es justo.

Esperanza condicional

Como el estudio de martingalas recae fuertemente en el concepto de esperanza condicional es conveniente extenderla en un sentido más general. En los cursos introductorios de probabilidad, si X, Y son variables aleatorias, la esperanza de X dado $Y = y$ se entiende como el valor esperado de la distribución de X dado $Y = y$,

$$E[X|Y = y] = \begin{cases} \sum_x x \; P(X = x|Y = y) & \text{caso discreto} \\ \int x \; f_{X|Y=y}(x)dx & \text{caso continuo} \end{cases}$$

Sea ψ tal que, para cada posible valor y de Y se tiene

$$\psi(y) = E[X|Y = y]$$

La **variable aleatoria** $\psi(Y)$ es llamada **esperanza condicional de** X **dado** Y y se denota por $E[X|Y]$.

Definición

Usando el concepto revisado de esperanza condicional, volvemos a la definición de martingala:

Decimos que $M_0, M_1, \ldots$ es una **martingala** si para cualquier $n \geq 0$

1. $E|M_n| < \infty$
2. $E[M_{n+1}|M_0, M_1, \ldots, M_n] = M_n$

Si en vez de la igualdad en 2 tenemos lo que ocurre en la mayoría de los juegos de casino

$$E(M_{n+1}|M_0, M_1, \ldots, M_n) \leq M_n$$

decimos entonces que $\{M_n\}$ es una **supermartingala**. Si por el contrario, el juego es a favor del jugador y

$$E[M_{n+1}|M_0, M_1, \ldots, M_n] \geq M_n$$

decimos que es una **submartingala**.

Ejemplos

- **Paseos aleatorios**. Sean $X_1, X_2, \dots$ variables aleatorias independientes y $M_n = M_0 + X_1 + \cdots + X_n$. Ya que

$$E[M_{n+1} - M_n | M_0, M_1, \dots, M_n] = E[X_{n+1}],$$

  M_n es una supermartingala si $E[X_i] \leq 0$, una martingala si $E[X_i] = 0$ y una submartingala si $E[X_i] \geq 0$.

- **Black-Scholes discreto**. Sean $Z_1, Z_2, \dots$ variables aleatorias independientes normales $N(\mu, \sigma^2)$ y definamos $M_n = M_0 e^{Z_1} \dots e^{Z_n}$. Entonces,

$$E[M_{n+1} | M_0, M_1, \dots, M_n] = M_n E[e^{Z_{n+1}}],$$

  Así que M_n es una supermartingala si $E[e^{Z_i}] \leq 1$, un martingala si $E[e^{Z_i}] = 1$ y una submartingala si $E[e^{Z_i}] \geq 1$.

Modelo Binomial de precios de acciones

Sean $Z_1, Z_2, \ldots$ variables aleatorias independientes, con

$$P\left(Z_i = \frac{(1+t)}{e^r}\right) = p \text{ y } P\left(Z_i = \frac{1}{(1+t)e^r}\right) = 1 - p,$$

y definamos los precios por $M_{n+1} = M_0 Z_1 \cdots Z_n$, $n \geq 1$. La constante r es la *tasa de interés* (descontamos por no ganar intereses) y el factor $(1+t)$ y $1/(1+t)$ modela las variaciones del mercado y garantiza que el precio tiene la forma $M_0(1+t)^z e^{-nr}$, con $|z| \leq n$. La *volatilidad* está asociada a p. Entonces,

$$E[M_{n+1}|M_0, M_1, \ldots, M_n] = M_n E[Z_{n+1}],$$

Así que M_n es una supermartingala si $E[Z_i] \leq 1$, un martingala si $E[Z_i] = 1$ y una submartingala si $E[Z_i] \geq 1$.

Martingalas respecto a CM

Decimos que $M_0, M_1, \ldots$ es una **martingala** respecto a $X_0, X_1, \ldots$ si para cualquier $n \geq 0$, $E|M_n| < \infty$ y

$$E[M_{n+1} - M_n | X_0, X_1, \ldots, X_n] = 0$$

Esta nueva definición no es un simple capricho matemático, se justificará cuando enunciemos el teorema de muestreo opcional. Por ahora, mencionamos que en la mayoría de los ejemplos $\{X_n\}$ es una CM y $M_n = g(X_n, n)$ para alguna función g.

Teorema 1 Sea $\{X_n\}$ una CM con espacio de estados S y matriz de probabilidades de transición P. Sea $g : S \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tal que

$$g(i, n) = \sum_{j \in S} p(i, j) g(j, n+1)$$

Entonces $M_n = g(X_n, n)$ es una martingala.

Ejemplos

- **Martingala cuadrática**. Sean $X_1, X_2, \ldots$ variables aleatorias independientes con $E[X_i] = 0$ y $E[X_i^2] = \sigma^2$. Considere el paseo $S_n = S_0 + X_1 + \cdots + X_n$, con S_0 constante, y

$$M_n = g(S_n, n) = S_n^2 - n\sigma^2$$

  Entonces M_n es una martingala con respecto a $S_0, S_1, \ldots$.

- **Martingala exponencial**. Sean $Z_1, Z_2, \ldots$ variables aleatorias independientes con función generatriz de momentos $\psi(\alpha) = E[\exp(\alpha Z_i)]$. Definamos $S_n = S_0 + X_1 + \cdots + X_n$, con S_0 constante. Entonces

$$M_n = g(S_n, n) = \frac{e^{\alpha S_n}}{\psi^n(\alpha)}$$

  es una martingala con respecto a $S_0, S_1, \ldots$.

Propiedades elementales

Antes de discutir los resultados centrales de la teoría de martingalas, es conveniente aclarar algunos resultados elementales:

1. Si $\{X_n\}$ es una martingala (super-martingala) con respecto a $\{Y_n\}$ entonces $E[X_{n+k}|Y_0, \ldots, Y_n] = X_n \quad ('' \leq '')$ para todo $k \geq 0$.
2. Si $\{X_n\}$ es una martingala (supermartingala) con respecto a $\{Y_n\}$ entonces para $0 \leq k \leq n$ se satisface
$$E[X_n] = E[X_k] \qquad (resp.\, E[X_n] \leq E[X_k])$$
3. Si $\{X_n\}$ es una martingala con respecto a $\{Y_n\}$ y ϕ es una función convexa entonces $\{\phi(X_n)\}$ es una submartingala con respecto a $\{Y_n\}$.

Tiempos de parada

Decimos que la variable aleatoria T es un **tiempo de parada** para el proceso $\{X_n\}$ si la ocurrencia o no del evento $\{T = n\}$ (que se entiende como *paramos el proceso en el instante* n) puede ser determinado conociendo sólo los valores $X_0, X_1, \ldots, X_n$ (no se requiere conocer ni X_{n+1}, ni X_{n+2}, ...).

Ejemplo. Si X_n es una CM que representa nuestro capital en euros luego de jugar n veces, el instante (aleatorio) T en el que por primera vez tenemos m euros es un tiempo de parada:

$$\{T = n\} = \{X_0 \neq m, \ldots, X_{n-1} \neq m, X_n = m\}$$

Podríamos pensar en enriquecernos apostando en un casino y **parando** de jugar cuando alcancemos la suma deseada. Veamos que dice el resultado central de la teoría de martingalas.

Teorema del muestreo opcional

Teorema 2. Si M_n es una martingala respecto a $\{X_n\}$ y T es un tiempo de parada (también respecto a $\{X_n\}$) entonces el **proceso parado en** T, a saber $\{M_{\min(T,n)}, n \geq 0\}$, es también una martingala respecto a $\{X_n\}$. Si adicionalmente, $P(T < \infty) = 1$ y existe una $c \in \mathbb{R}^+$ tal que $|M_{\min(T,n)}| \leq c$ para todo n entonces

$$E[M_T] = M_0$$

La versión del teorema anterior para súper y submartingalas es:

Teorema 3. Si M_n es una supermartingala respecto a $\{X_n\}$ (respectivamente submartingala) y T es un tiempo de parada (también respecto a $\{X_n\}$) entonces el proceso parado en T es una supermartingala respecto a $\{X_n\}$ (respectivamente submartingala).

Comportamiento asintótico

Teorema 4. Si $\{M_n\}$ es una martingala tal que para todo n se satisface $E\,|M_n| \leq c$, para algún $c < \infty$, entonces $\lim_{n\to\infty} M_n$ existe y es una variable aleatoria finita con probabilidad 1.

Corolario. Si $\{M_n\}$ es una martingala no negativa entonces $\lim_{n\to\infty} M_n$ existe casi siempre y es finito.

Teorema 5. Sea $\{M_n\}$ una martingala con incrementos acotados, es decir, para todo n, $|M_{n+1} - M_n| < c$ para algún $c < \infty$. Sea

$$\sigma_n^2 = E[(M_{n+1} - M_n)^2 | M_0, M_1 \ldots, M_n]$$

y definamos $n(s) = \min\left\{n : \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 \geq s\right\}$. Entonces

$$\lim_{s\to\infty} \frac{M_{n(s)}}{\sqrt{s}} \Rightarrow \mathcal{N}(0,1)$$