Procesos de Renovación y el Proceso de Poisson

Sean $T_1, T_2, \ldots$ variables aleatorias i.i.d no negativas y

$$S_n = T_1 + \cdots + T_n \text{ si } n \geq 1 \text{ y } S_0 = 0$$

Pensemos en $\{S_n\}$ como los tiempos en los que se reporta una incidencia (fallo, reclamo, etc.) en un sistema. El proceso que representa el total de incidencias hasta el tiempo t, definido por

$$N(t) = \max\{n : S_n \leq t\},$$

se conoce como **proceso de renovación**. El caso particular en el que **los tiempos entre incidencias** $T_1, T_2, \ldots$ son variables exponenciales con media $\lambda > 0$ se denomina **proceso de Poisson** con intensidad λ. A partir de la fórmula de convolución para la suma de variables independientes, se demuestra que $N(t)$ es una variable aleatoria Poisson con media λt.

Propiedades

Teorema. $\{N(t), t \geq 0\}$ es un proceso de Poisson con intensidad λ si y sólo si

1. $N(0) = 0$
2. $N(t) - N(s) \sim Poisson(\lambda(t-s))$, para todo $0 \leq s < t$
3. $\{N(t), t \geq 0\}$ tiene incrementos independientes. Es decir, si $t_0 < t_1 < \cdots < t_m$ entonces

$$N(t_1) - N(t_0), N(t_2) - N(t_1), \ldots, N(t_n) - N(t_{n-1})$$

son variables aleatorias independientes

Además de ser un proceso de renovación y un proceso con incrementos independientes, veremos más adelante que el proceso de Poisson es un proceso de Markov a tiempo continuo. A partir de él se pueden construir varios procesos de interés

Proceso de Poisson no homgéneo

En numerosas situaciones es realista suponer que hay más incidencias a ciertas *horas* que a otras. Para modelar esta situación, es conveniente la siguiente generalización del Proceso de Poisson:

Decimos que $\{N(t), t \geq 0\}$ es un proceso de Poisson **no homogéneo** con intensidad $\lambda(t)$ si

1. $N(0) = 0$
2. $N(t) - N(s) \sim Poisson\left(\int_s^t \lambda(r)dr\right)$, para todo $0 \leq s < t$
3. $\{N(t), t \geq 0\}$ tiene incrementos independientes

Los tiempos entre ocurrencias asociados a un Proceso de Poisson no homogéneo no tienen por que ser exponenciales. Es suficiente calcular la distribución del tiempo de la primera incidencia

$$P(T_1 \leq t) = 1 - P(N(t) = 0) = 1 - e^{-\int_0^t \lambda(s)ds}$$

Proceso de Poisson compuesto

Podemos asociar variables a cada incidencia que representen costos de atención o reclamos. Así, si Y_i representa el costo de atención de la incidencia i-ésima, el proceso

$$S(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } N(t) = 0 \\ Y_1 + \cdots + Y_{N(t)} & \text{si } N(t) \geq 1 \end{cases} \tag{1}$$

representa el costo acumulado a tiempo t. Cuando los reclamos $\{Y_i\}$ sean i.i.d., un supuesto común en teoría del riesgo, y el proceso $N(t)$ en (1) es de Poisson, el proceso $\{S(t), t \geq 0\}$ se conoce como **Proceso de Poisson Compuesto**. La media y la varianza de $S(t)$ se puede calcular para el caso más general:

$$ES(t) = EN(t) \cdot EY_i$$

$$Var(S(t)) = EN(t)Var(Y_i) + Var(N(t))(EY_i)^2$$

Proceso de Riesgo Colectivo

Consideremos una cartera de seguros que recibe un ingreso por primas de c euros por unidad de tiempo. Denotemos por Y_i el monto del reclamo del siniestro i y sea $N(t)$ el proceso que registra el número de reclamos a tiempo t. El proceso de riesgo está definido por

$$X(t) = X(0) + ct - S(t),$$

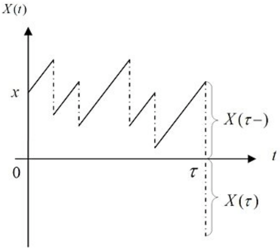
siendo $\{S(t), t \geq 0\}$ el proceso definido en (1)

El tiempo de ruina es

$$\tau = \inf_t \{t > 0 : X(t) < 0\}$$

y la probabilidad de ruina

$$\psi(x) = P(\tau < \infty | X(0) = x)$$



Problema clásico: calcular $\psi(x)$