Movimiento Browniano

- El botánico R. Brown (1773-1858) observó, a través de un microscopio, que pequeñas partículas de polen suspendidas en agua realizaban un movimiento particularmente irregular. El propio Brown descubrió que partículas muy finas de varios minerales seguían el mismo movimiento.
- En 1900, L. Bachelier introdujo un proceso para modelar las fluctuaciones financieras.
- También Einstein (1905) dió una explicación del fenómeno
- Wiener (1894-1964) logró dar un modelo preciso y riguroso para las trayectorias irregulares de las partículas, como funciones continuas pero no diferenciables en ningún punto.
- Desde entonces, las contribuciones teóricas y aplicaciones a otras áreas de las ciencias no han cesado.

Definición

El proceso estocástico $\{B(t), t \geq 0\}$ es un **Movimiento Browniano** (MB) con varianza σ^2 si cumple las siguientes condiciones:

1. $B(0) = 0$
2. Tiene incrementos independientes
3. Para todo $s < t$, $B(t) - B(s) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2(t-s))$
4. Las trayectorias del proceso $t \to B_t$ son funciones continuas.

Si $\sigma = 1$ decimos que el movimiento es estándar. Note que si $B(t)$ es estándar entonces $\beta B(t)$ es un MB con varianza β^2. Así que de ahora en adelante asumiremos sin pérdida de generalidad que $B(t)$ es estándar.

Otra propiedad útil es la de reescalamiento. Esta es, para cualquier $\alpha > 0$,

$$\{B(\alpha t), t \geq 0\} \equiv \{\sqrt{\alpha} B(t), t \geq 0\}$$

El MB como un Proceso Gaussiano

El Movimiento Browniano es un caso particular de los procesos Gaussianos. Es decir

$$(B(t_1), B(t_2), \ldots, B(t_n)) \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$$

cualesquiera que sean $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$. La forma de Σ es sencilla, sigue de la siguiente importante propiedad

$$E[B(t)B(s)] = \min(t, s)$$

Otros Procesos Gaussianos derivados del MB son

- **Puente Browniano**: $B(t) - tB(1)$, para $0 \leq t \leq 1$.
- **Proceso de Ornstein-Uhlenback**: $e^{-t}B(e^{2t})$, para $-\infty < t < \infty$.
- **Proceso de Ito**: $\int_0^t \mu(t)dt + \int_0^t \sigma(t)dB(t)$, para $0 \leq t$.

Fórmula de Ito

Aún cuando las trayectorias brownianas no son diferenciables en ningún punto, existe un proceso con trayectorias continuas que tiene la misma distribución que la aproximaxión límite por sumas de Riemann-Stieltjes del proceso de Ito

$$dX_t = \mu(t)dt + \sigma(t)dB(t)$$

Lo anterior es la clave para definir el cálculo estocástico. Como para el cálculo diferencial estándar requerimos de la regla de la cadena, en este contexto requerimos de una regla operativa conocida como **fórmula de Ito**. La fórmula establece que, para cualquier f con derivada de segundo orden continua, el proceso $f(X_t)$ es de Ito y satisface la **ecuación diferencial estocástica**

$$df(X_t) = f'(X_t)\sigma(t)dB(t) + \left(f'(X_t) + \frac{1}{2}f''(X_t)\sigma^2\right) dt$$

Fórmula de Black-Scholes

Una aplicación selecta de la fórmula de Ito es la famosa fórmula de Black-Scholes. En su versión original supone que los precios de las acciones siguen un movimiento browniano exponencial

$$dX_t = X_t(\mu dt + \sigma dB_t)$$

Si el valor de la acción a tiempo t es $f(t, X_t)$ y r es la tasa de interés entonces

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 X_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial X_t^2} + rX_t \frac{\partial f}{\partial X_t} - r\ f = 0$$

Usando la fórmula de Black-Scholes, el cálculo de la llamada opción europea $(X_T - K)^+$ resulta

$$X_0 \Phi(\sigma\sqrt{t} - \alpha) - e^{-rt} K \Phi(\alpha)$$

Siendo $\alpha = (\log(K/X_0) - \mu t)/\sigma\sqrt{t}$ y $\Phi(x) = P(\mathcal{N}(0,1) \leq x)$