Cálculo Diferencial Aplicado

EXAMEN FINAL 2

Autores:
Manuel Carretero, Luis L. Bonilla, Filippo Terragni, Sergei Iakunin y Rocio Vega

---

Cuestión 1 (2 puntos) Dada la ecuación diferencial $x^2y'' - 3xy' + 4y = \ln x \quad x > 0,$ se pide:

i) Efectuar el cambio de variable adecuado que permite transformarla en una ecuación diferencial con coeficientes constantes.

ii) Resolver la ecuación diferencial así obtenida sujeta a las condiciones $y(1) = \frac{1}{2}$, $y'(1) = 1$.

Cuestión 2 (2 puntos) Considera el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\begin{pmatrix} X_1'(t) \\ X_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ \alpha & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix}$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$ y $t > 0$.

i) Encuentra el valor de α para el cual el comportamiento cualitativo de las soluciones del sistema cambia (*sugerencia*: calcula los valores propios de la matriz de coeficientes en términos de α). Justifica tu respuesta.

ii) Halla la solución del sistema cuando $\alpha = 1$ y $(X_1(0), X_2(0)) = (1, 0)$. Además, calcula la distancia $d(t)$ desde la posición $(0, 0)$ hasta la posición de la partícula que esté moviéndose acorde a la solución calculada (*sugerencia*: utiliza la fórmula $d(t) = \sqrt{X_1(t)^2 + X_2(t)^2}$).

Cuestión 3 (2 puntos) Resuelve el siguiente PVI

$$\begin{cases} x^2 + e^y + (xe^y + \cos y)y' &= 0 \\ y(0) &= g(\pi/2) \end{cases}$$

sabiendo que la función g cumple

$$g'(x) = \sin(x)\,, \quad g(0) = -1\,.$$

Cuestión 4 (2 puntos) Consideremos el siguiente modelo de ecuación del calor:

$$\begin{aligned} \text{Ecuación en Derivadas Parciales (EDP)} &: \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,, \ \ t > 0\,, \ \ x \in (0, \pi/3) \\ \text{Condiciones de Contorno (CC)} &: \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0\,, \ \frac{\partial u}{\partial x}(\pi/3, t) = 0\,, \ \ t > 0\,, \\ \text{Condición Inicial (CI)} &: \quad u(x,0) = f(x)\,, \ \ x \in [0, \pi/3]\,. \end{aligned}$$

Aplicando separación de variables $u(x,t) = X(x)\,T(t) \not\equiv 0$, se pide:

i) Demostrar que $X(x)$ satisface el siguiente problema de valores en la frontera:

$$X'' + \lambda X = 0\,; \quad X'(0) = 0\,; \, X'(\pi/3) = 0\,;$$

y hallar los valores de la constante de separación $\lambda \geq 0$ que dan lugar a soluciones no nulas.

ii) Sabiendo que la solución $u(x,t)$ se puede expresar como:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-9n^2 t} \cos(3nx)\ ; \quad \text{con } A_n \in \mathbb{R}\,,$$

hallar el valor aproximado de $u(\pi/6, 1/9)$, tomando solamente los tres primeros sumandos de la serie anterior, sabiendo que la función del dato inicial es: $f(x) = 2x + 1$

Nota: Puede ser útil el siguiente resultado:

- Dados $L > 0$ y $m\,, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se tiene que: $\displaystyle\int_0^L \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0\,; \ m \neq n \\ L/2\,; \ m = n \neq 0 \\ L\,; \ m = n = 0 \end{cases}$

Cuestión 5 (2 puntos) Se quiere resolver numéricamente el siguiente PVI

$$\begin{cases} y' &= t + \dfrac{y}{2} + 1\,, \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

mediante el esquema numérico de Adams-Bashforth:

$$Y_{n+2} = Y_{n+1} + \frac{3}{2}hf(t_{n+1}, Y_{n+1}) - \frac{1}{2}hf(t_n, Y_n)$$

i) Calcula con paso $h_1 = 0.1$ la solución aproximada $Y^{h_1}_{t=0.3}$ de $y(0.3)$, sabiendo que Y_1 debe calcularse mediante el método de Euler explícito.

ii) Usando el paso $h_2 = 0.01$ se obtiene la aproximación $Y^{h_2}_{t=0.3} = 1.5327258$. Estima el orden del método a partir de $Y^{h_1}_{t=0.3}$, $Y^{h_2}_{t=0.3}$ y la solución exacta $y(t) = 7e^{t/2} - 2(t+3)$.
