uc3m | Universidad **Carlos III** de Madrid

Cálculo Diferencial Aplicado

EXAMEN FINAL 1

Autores:
Manuel Carretero, Luis L. Bonilla, Filippo Terragni, Sergei Iakunin y Rocio Vega

---

Cuestión 1 (2 puntos) Dada la ecuación diferencial ordinaria (EDO):

$$y'' + y = xe^{x} + 2e^{-x}$$

Se pide:

i) Hallar la solución general de la EDO.

ii) Encontrar la solución que satisface las siguientes condiciones iniciales: $y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$.

Cuestión 2 (2 puntos) Dado el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\vec{X}'(t) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} \vec{X}(t)$$

siendo $t > 0$.

i) Hallar la solución general del sistema y comprobar los resultados.

ii) Analizar el comportamiento de la solución del apartado i) cuando el tiempo t tiende a infinito. ¿Puede depender dicho comportamiento de la condición inicial que se asigne al sistema?

Cuestión 3 (2 puntos) Sabiendo que $g(x) = -1 - x/2$, resolver el siguiente PVI

$$\begin{cases} -\dfrac{2y+x}{y+x}y' & = & \dfrac{2y}{x^2}(1+g)\,, \quad x \geq 1\,, \\ y(1) & = & 1 \end{cases}$$

Cuestión 4 (2 puntos) Consideremos el siguiente modelo de ecuación del calor:

$$\begin{aligned}
\text{Ecuación en Derivadas Parciales (EDP)} \quad &: \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,, \quad t > 0\,, \quad x \in (0,\pi) \\
\text{Condiciones de Contorno (CC)} \quad &: \quad u(0,t) = 0\,, \quad u(\pi,t) = 0\,, \quad t > 0\,, \\
\text{Condición Inicial (CI)} \quad &: \quad u(x,0) = f(x)\,, \quad x \in [0,\pi]\,.
\end{aligned}$$

Aplicando separación de variables $u(x,t) = X(x)\,T(t) \not\equiv 0$, se pide:

i) Demostrar que $T(t) = ce^{-\lambda t}$, siendo $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, y λ la constante de separación.

ii) Demostrar que $X(x)$ satisface el siguiente problema de valores en la frontera:

$$X'' + \lambda X = 0\,; \quad X(0) = 0\,;\, X(\pi) = 0\,;$$

y hallar los valores de $\lambda > 0$ que dan lugar a soluciones no nulas.

iii) Sabiendo que la solución $u(x,t)$ se puede expresar como:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-n^2 t} \sin(nx)\ ; \quad \text{con } A_n \in \mathbb{R}\,,$$

hallar los coeficientes $A_n\,, n \in \mathbb{N}$, sabiendo que la función del dato inicial es: $f(x) = \sin^3(x)$

Nota: Pueden ser útiles los siguientes resultados:

- Dados $L > 0$ y $m\,, n \in \mathbb{N}$, se tiene que: $\displaystyle\int_0^L \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \mathrm{d}x = \begin{cases} 0\,, & m \neq n \\ L/2\,, & m = n \end{cases}$
- $\sin(3x) = \sin(x)(3 - 4\sin^2(x))\,, \forall x \in \mathbb{R}\,;$

Cuestión 5 (2 puntos) Sea el problema de valor inicial (PVI)

$$\begin{cases} y' &= 1 + \dfrac{y}{2}\,, \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

al que se le aplica el siguiente esquema numérico (Euler mejorado):

$$Y_{n+1} = Y_n + \frac{h}{2}(\, f(t_n, Y_n) + f(t_{n+1}, Y_n + hf(t_n, Y_n))\,)$$

i) Calcular, usando los pasos $h_1 = 0.2$ y $h_2 = 0.1$, las soluciones aproximadas $Y^{h_1}_{t=0.4}$, $Y^{h_2}_{t=0.4}$ de $y(0.4)$.

ii) Estimar el orden del método a partir de los resultados anteriores, sabiendo que la solución exacta del PVI es: $y(t) = 2(e^{t/2} - 1)$.