2 Estudio local de funciones de varias variables.

2.1 Derivadas de orden superior.

Problema 2.1 Sea la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

i) Calcula las derivadas parciales fuera del origen.

ii) Demuestra que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

iii) Demuestra que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$, mientras que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1$. Explica lo que ocurre.

Solución: i) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2}$, $\quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{xy^4+4x^3y^2-x^5}{(x^2+y^2)^2}$; *iii)* f no es C^2 en ningún entorno del origen.

Problema 2.2 Calcula la matriz hessiana de las funciones:

i) $f(x,y) = \log(x^2+y^3)$;

ii) $f(x,y) = x^2\cos y + y^2 \operatorname{sen} x$;

iii) $f(x,y) = x^y$;

iv) $f(x,y) = \operatorname{arctg}(xy)$;

v) $f(x,y) = \operatorname{arctg}(x/y)$;

vi) $f(x,y,z) = 2x^2 - 6xy + xz - y^2 + yz + 3z^2$;

vii) $f(x,y,z) = (x+y)(y+z)(z+x)$.

Solución: i) $\begin{pmatrix} \frac{2y^3-2x^2}{(x^2+y^3)^2} & -\frac{6xy^2}{(x^2+y^3)^2} \\ -\frac{6xy^2}{(x^2+y^3)^2} & \frac{6x^2y-3y^4}{(x^2+y^3)^2} \end{pmatrix}$; *ii)* $\begin{pmatrix} 2\cos y - y^2 \operatorname{sen} x & -2x \operatorname{sen} y + 2y\cos x \\ -2x\operatorname{sen} y + 2y \cos x & -x^2\cos y + 2\operatorname{sen} x \end{pmatrix}$;
iii) $\begin{pmatrix} y(y-1)x^{y-2} & x^{y-1}(1+y\log x) \\ x^{y-1}(1+y\log x) & x^y \log^2 x \end{pmatrix}$; *iv)* $\begin{pmatrix} \frac{-2xy^3}{(1+x^2y^2)^2} & \frac{1-x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2} \\ \frac{1-x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2} & \frac{-2x^3y}{(1+x^2y^2)^2} \end{pmatrix}$;
v) $\begin{pmatrix} \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} & \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} & \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}$; *vi)* $\begin{pmatrix} 4 & -6 & 1 \\ -6 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$; *vii)* $\begin{pmatrix} 2y+2z & 2x+2y+2z & 2x+2y+2z \\ 2x+2y+2z & 2x+2z & 2x+2y+2z \\ 2x+2y+2z & 2x+2y+2z & 2x+2y \end{pmatrix}$.

Problema 2.3

i) Prueba que las siguientes funciones de $\mathbb{R}^2$,

$$a) \quad u(x,y) = \operatorname{arctg}(y/x), \qquad b) \quad u(x,y) = \log(x^2+y^2),$$

son armónicas, es decir, satisfacen la ecuación de Laplace $\Delta u = 0$ en su dominio.

ii) Si $u(x,y) = f(r)$, con $r = \sqrt{x^2+y^2}$ (u es una función radial), prueba que se verifica

$$\Delta u = f''(r) + \frac{1}{r} f'(r).$$

iii) Si $u(x,y) = f(r,\theta)$ (coordenadas polares), prueba que se verifica

$$\Delta u = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}.$$

iv) Rehaz el primer apartado con estas fórmulas.

Problema 2.4

i) Prueba que las siguientes funciones

$$\begin{array}{lll} u(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2}, & \text{en} & \mathbb{R}^3 \\ u(x,y,z,w) = (x^2+y^2+z^2+w^2)^{-1}, & \text{en} & \mathbb{R}^4, \end{array}$$

son armónicas ($\Delta u = 0$) en su dominio.

ii) Si $u(\mathbf{x}) = f(r)$, (u es una función radial), prueba que se verifica

$$\Delta u = f''(r) + \frac{n-1}{r} f'(r).$$

iii) Calcula $k \in \mathbb{R}$ para que la función $u(\mathbf{x}) = r^k$ con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $r = ||\mathbf{x}||$, sea armónica para $\mathbf{x} \neq 0$.

Solución: iii) $k = 2 - n$.

Problema 2.5 Demuestra que $u(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x+y}$ satisface la ecuación diferencial:

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 3u.$$

Problema 2.6 Demuestra que $u = x^2y + y^2z + z^2x$ satisface la ecuación diferencial:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = (x+y+z)^2.$$

Problema 2.7 Demuestra que las siguientes funciones satisfacen la ecuación de ondas:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$

i) $f(x,t) = (Ax+B)(Ct+D)$.

ii) $f(x,t) = g(x-ct)$ donde g es cualquier función dos veces derivable.

Problema 2.8 Encuentra soluciones del tipo $f(x,t) = \cos(kx - \omega t)$ de las ecuaciones en derivadas parciales (k, ω son constantes):

i) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, (ecuación de ondas, con c constante);

ii) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - h^2 f$, (ecuación de Klein–Gordon, con c, h constantes).

Solución: i) Se debe verificar la relación $\omega^2 = c^2k^2$; ii) Se debe verificar a relación $\omega^2 = c^2k^2 + h^2$.

Problema 2.9 Encuentra soluciones del tipo $u(x,t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}\operatorname{sen} kx$ de la ecuación (λ, k son constantes)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad \text{(ecuación del calor, con } \mu \text{ constante).}$$

Solución: Se debe verificar la relación $\lambda = \mu k^2$.

Problema 2.10 Considera la ecuación de ondas $\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ (c es una constante).

i) Demuestra que el cambio de variables $f(x,t) = u(\xi, \eta)$, con $\xi = x + ct$, $\eta = x - ct$, la convierte en la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} = 0.$$

ii) Comprueba entonces que dado cualquier par de funciones φ_1 y φ_2 de una variable (derivables dos veces), la función $f(x,y) = \varphi_1(x+ct) + \varphi_2(x-ct)$ es solución de la ecuación de ondas.

iii) Esboza la gráfica de f si

$$\varphi_1(\xi) = \begin{cases} 1 + \cos\xi & \text{si } |\xi| \le \pi \\ 0 & \text{si } |\xi| > \pi \end{cases}, \qquad \varphi_2(\eta) = 0.$$

2.2 Extremos de funciones de varias variables.

Problema 2.11 Halla los puntos críticos y determina los valores extremos locales de las siguientes funciones de dos variables:

i) $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 4y$,

ii) $g(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 2x + 2y - 6$,

iii) $h(x,y) = 3x^2 + 2xy + 2x + y^2 - y + 4$,

iv) $k(x,y) = 8x^3 - 24xy + y^3$.

Solución: i) f alcanza en $(0,1)$ un mínimo local de valor $f(0,1) = -2$; ii) g alcanza en $(-2,-2)$ un mínimo local de valor $g(-2,-2) = -10$; iii) h alcanza en $(-3/4, 5/4)$ un mínimo local de valor $h(-3/4, 5/4) = 21/8$; iv) k tiene en $(0,0)$ un punto de silla y en $(-2,4)$ un mínimo local de valor $k(-2,4) = 128$.

Problema 2.12 Calcula los extremos de la función $f(x,y) = \mathrm{e}^{-x^2+\varepsilon y^2}$ para $\varepsilon = 0,\ 1,\ -1$.

Solución: Si $\varepsilon = 0$, f alcanza en los puntos de la forma $(0, y_0)$ el máximo absoluto de valor $f(0, y_0) = 1$; Si $\varepsilon = 1$ el único punto crítico de f es $(0,0)$ y es un punto de silla; Si $\varepsilon = -1$ el único punto crítico es de nuevo $(0,0)$, pero ahora f alcanza en ese punto un máximo absoluto de valor 1.

Problema 2.13 Calcula los extremos de las siguientes funciones en los recintos que se especifican:

i) $f(x,y) = x^3 y^3$ en $\mathbb{R}^2$;

ii) $f(x,y) = x^4y^4$ en $I\!R^2$;

iii) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$ en $I\!R^2$;

iv) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{1+x^2+y^2}$ en $I\!R^2$;

v) $f(x,y) = |x| + |y|$ en $A = \{(x,y) : \ |x| \le 1, |y| \le 1\}$;

vi) $f(x,y) = x^2+2xy+y^2$ en $A = \{(x,y) : \ |x| \le 2, |y| \le 1\}$ y en $B = \{(x,y) : \ x^2+y^2 \le 8\}$.

Solución: *i)* $(x,0)$ y $(0,y)$ son puntos de silla (f no tiene máximos ni mínimos); *ii)* f alcanza en los puntos de la forma $(x,0)$ y $(0,y)$ el mínimo absoluto (f no tiene máximos) de valor 0; *iii)* f alcanza en $(0,3)$ un mínimo local de valor $f(0,3) = -9$; *iv)* f alcanza en $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ un máximo local de valor $f(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}) = 1/\sqrt{2}$, y en $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ un mínimo local de valor $f(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = -1/\sqrt{2}$; *v)* f tiene en $(0,0)$ un mínimo absoluto de valor 0 y en $(\pm 1, \pm 1)$ tiene máximos absolutos de valor 2; *vi)* Los puntos de la forma $(x_0, -x_0)$ son mínimos absolutos tanto en A como en B y en ellos f toma el valor 0; $(2,1)$ y $(-2,-1)$ son los máximos absolutos en A y en ellos f toma el valor 9; $(2,2)$ y $(-2,-2)$ son los máximos absolutos en B y en ellos f toma el valor 16.

Problema 2.14 Estudia si las siguientes funciones tienen un extremo (local o global) en el origen $(0,0)$:

i) $f(x,y) = x^4 + 2xy^3 + y^4 + 2xy$;

ii) $g(x,y) = \begin{cases} xy + xy^3 \operatorname{sen}(x/y) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0. \end{cases}$

Indicación: En el apartado *ii)* acércate a $(0,0)$ por dos rectas distintas, de forma que la función compuesta con las rectas tenga un punto máximo en 0 por una de ellas y un punto mínimo en 0 por la otra.
Solución: Las dos funciones tienen un punto de silla en $(0,0)$.

Problema 2.15 Sea la función $\phi : I\!R^n \to I\!R$ definida por

$$\phi(\mathbf{x}) = r\mathrm{e}^{-r}, \qquad r = ||\mathbf{x}||.$$

Halla los extremos locales y globales de ϕ en los casos $n = 1$ y $n = 2$.

Solución: Si $n = 1$, ϕ alcanza el máximo absoluto en $x = \pm 1$, $\phi(\pm 1) = e^{-1}$, además alcanza el mínimo absoluto cero en el origen. Si $n = 2$, ϕ alcanza igualmente mínimo absoluto en el origen y el valor mínimo es 0; en los puntos de la circunferencia unidad, esto es en los puntos de la forma $(x_0, \pm\sqrt{1-x_0^2})$ con $|x_0| \le 1$, ϕ alcanza su valor máximo absoluto e^{-1}.

Problema 2.16 Dado el conjunto de pares de valores $\{(x_i, y_i), \ i = 1, \ldots, N\}$, construimos la función de dos variables

$$f(m,b) = \sum_{i=1}^{N} (y_i - mx_i - b)^2.$$

Encuentra los valores de m y b que minimizan f. (*Método de mínimos cuadrados* para aproximar el conjunto de puntos $\{(x_i, y_i)\}$ mediante la recta $y = mx + b$).

Solución: Llamando $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$, $\bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i$, se tiene que

$$m = \frac{\sum_{i=1}^{N}(y_i - \bar{y})x_i}{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})x_i}\,, \qquad b = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i - mx_i) = \bar{y} - m\bar{x}\,.$$

2.3 Extremos condicionados.

Problema 2.17

i) Calcula el mínimo de la función $f(x,y)=x^2+y^2$ en el conjunto $A=\{xy=1\}$.

ii) Calcula el máximo y el mínimo de la función $f(x,y)=xy$ en el conjunto $A=\{x^2+4y^2=4\}$.

Solución: $i)$ mínimos $(1,1)$ y $(-1,-1)$; $ii)$ máximos $(\sqrt{2},1/\sqrt{2}\,)$ y $(-\sqrt{2},-1/\sqrt{2}\,)$; mínimos $(\sqrt{2},-1/\sqrt{2}\,)$ y $(-\sqrt{2},1/\sqrt{2}\,)$.

Problema 2.18 Calcular los máximos y mínimos absolutos de la función

$$f(x,y)=x^2+y^2+6x-8y+25$$

en el conjunto $D=\{x^2+y^2\leq 16\}$.

Solución: Máximo $(-12/5,16/5)$; mínimo $(12/5,-16/5)$.

Problema 2.19 Calcula los extremos de las siguientes funciones sujetas a las restricciones que se especifican:

i) $f(x,y)=xy$ sujeto a $2x+3y-5=0$;

ii) $u(x,y)=\dfrac{\log x}{x}+\dfrac{\log y}{y}$ sujeto a $x+y=1$ $x,y>0$.

iii) $g(x,y,z)=xyz$ sujeto a $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$;

iv) $h(x,y,z)=x^2y^4z^6$ sujeto a $x+y+z=1,\ x,y,z>0$;

Solución: $i)$ máximo $(36/5,24/5)$, no hay mínimo; $ii)$ máximo $(1/2,1/2)$, no hay mínimo; $iii)$ máximos $\frac{1}{\sqrt{3}}(|a|,|b|,|c|)$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(-|a|,-|b|,|c|)$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(-|a|,|b|,-|c|)$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(|a|,-|b|,-|c|)$; mínimos $\frac{1}{\sqrt{3}}(-|a|,|b|,|c|)$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(|a|,-|b|,|c|)$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(|a|,|b|,-|c|)$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(-|a|,-|b|,-|c|)$; $iv)$ máximo $(1/2,1,3/2)$, no hay mínimo.

Problema 2.20 Encuentra los extremos de las siguientes funciones en los conjuntos que se indican:

i) $f(x,y)=x^2+y^2-2x-2y+2$ en $T=\{\,y/2\leq x\leq 3-\sqrt{2y},\ 0\leq y\leq 2\,\}$;

ii) $f(x,y,z)=x+y+z$ en $S=\{\,2x^2+3y^2+6z^2=1\,\}$;

iii) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ en $U=\{\,(x,y,z)\in I\!\!R^3\,/\,z\geq x^2+y^2-2\,\}$.

Solución: $i)$ máximo $(3,0)$ y mínimo $(1,1)$; $ii)$ máximo $(1/2,1/3,1/6)$ y mínimo $(-1/2,-1/3,-1/6)$; $iii)$ no existe máximo y el mínimo es $(0,0,0)$.

Problema 2.21 Maximiza xyz en la esfera $x^2+y^2+z^2=1$.

Solución: Máximo $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$.

Problema 2.22 Minimiza $x+2y+4z$ en la esfera $x^2+y^2+z^2=1$.

Solución: Mínimo $\frac{1}{\sqrt{21}}(1,2,4)$.

Problema 2.23 Encuentra los valores máximo y mínimo de la función $f(x,y,z) = x+2y+3z$ en la elipse $x^2+y^2=2,\ x+z=1$.

Solución: Máximo $M=7$, mínimo $m=-1$.

Problema 2.24 Calcula la distancia del punto $(4,4,10)$ a la esfera $(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=25$:

i) geométricamente;

ii) utilizando multiplicadores de Lagrange.

Solución: $d=8$.

Problema 2.25 Representa un número positivo a como producto de cuatro factores positivos cuya suma sea mínima.

Solución: $a=(a^{1/4})^4$.

Problema 2.26 La producción de una compañía es una función $Q=f(K,L)=K^{\alpha}L^{1-\alpha}$, donde $0<\alpha<1$, K es la cantidad de capital invertido y L es la cantidad de trabajo usado. El precio del capital es p y el del trabajo q. Calcula la proporción entre el capital y el trabajo que hay que utilizar para maximizar la producción usando un presupuesto B.

Solución: $\dfrac{K}{L}=\dfrac{\alpha q}{(1-\alpha)p}$.

Problema 2.27 Un fabricante puede producir tres productos distintos en cantidades Q_1,Q_2,Q_3 respectivamente, y genera un beneficio igual a $P(Q_1,Q_2,Q_3)=2Q_1+8Q_2+24Q_3$. Halla los valores de Q_1,Q_2,Q_3 que maximizan el beneficio si la producción está sujeta a la restricción $Q_1^2+2Q_2^2+4Q_3^2=4.5\times 10^9$.

Solución: $Q_1=10^4$, $Q_2=2Q_1$, $Q_3=3Q_1$.