



4 Integrales de línea y de superficie

4.1 Integrales sobre curvas y campos conservativos.

Problema 4.1 Integra

- i) $f(x, y) = 2xy^2$ sobre el primer cuadrante de la circunferencia de radio R .
- ii) $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^2$ a lo largo del arco de hélice circular $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, 3t)$, desde el punto $(1, 0, 0)$ hasta el punto $(1, 0, 6\pi)$.

Solución: i) $2R^4/3$; ii) $2\pi\sqrt{10}(5 + 120\pi^2 + 1296\pi^5)/5$.

Problema 4.2 Determina la longitud y la masa de un hilo cuya forma es el arco de parábola $y = x^2$ desde $(0, 0)$ hasta $(2, 4)$ y cuya densidad es $\rho(x, y) = x$.

Solución: La longitud es $\sqrt{17} + (\log(4 + \sqrt{17}))/4$ y la masa es $(17^{3/2} - 1)/12$.

Problema 4.3 En los ejercicios que siguen, calcula la integral de línea del campo vectorial \mathbf{f} a lo largo del camino que se indica:

- i) $\mathbf{f}(x, y) = (x^2 - 2xy, y^2 - 2xy)$, a lo largo de la parábola $y = x^2$ desde $(-1, 1)$ a $(1, 1)$,
- ii) $\mathbf{f}(x, y) = (x^2 + y^2, x^2 - y^2)$, a lo largo de la curva $y = 1 - |1 - x|$, desde $(0, 0)$ a $(2, 0)$,
- iii) $\mathbf{f}(x, y, z) = (y^2 - z^2, 2yz, -x^2)$, a lo largo del camino descrito por $r(t) = (t, t^2, t^3)$, con $t \in [0, 1]$,
- iv) $\mathbf{f}(x, y, z) = (2xy, x^2 + z, y)$, a lo largo del segmento que une $(1, 0, 2)$ con $(3, 4, 1)$

Solución: i) $-14/15$; ii) $4/3$; iii) $1/35$; iv) 40 .

Problema 4.4 Se considera la función vectorial $f(x, y) = (x^2, y)$. Calcula la integral de línea de f desde $(1, 0)$ hasta $(-1, 0)$ a lo largo de:

- i) El segmento que une ambos puntos.
- ii) Los dos recorridos posibles del rectángulo $[-1, 1] \times [-1, 1]$.
- iii) La semicircunferencia superior que une ambos puntos.

Solución: $2/3$ en todos los casos.

Problema 4.5 Calcula:

- i) $\int_g (x - y)dx + (x + y)dy$, siendo g el segmento que une $(1, 0)$ con $(0, 2)$.
- ii) $\int_C x^3 dy - y^3 dx$, siendo C la circunferencia unidad.

- iii) $\int_{\Gamma} \frac{dx + dy}{|x| + |y|}$, siendo Γ el cuadrado de vértices $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ y $(0,-1)$, recorrido en sentido contrario a las agujas del reloj.
- iv) $\int_{\rho} (x + 2y)dx + (3x - y)dy$ siendo ρ la elipse de ecuación $x^2 + 4y^2 = 4$, recorrida en sentido contrario a las agujas del reloj.
- v) $\int_R \frac{y^3 dx - xy^2 dy}{x^5}$, siendo R la curva $x = \sqrt{1-t^2}$, $y = t\sqrt{1-t^2}$, $-1 \leq t \leq 1$.

Solución: i) $7/2$; ii) $3\pi/2$; iii) 0 ; iv) 2π ; v) $-\pi/2$.

Problema 4.6 Calcula:

- i) $\int_{\gamma} y dx - x dy + z dz$, siendo γ la curva de intersección del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ y el plano $z - y = a$ en sentido antihorario.
- ii) $\int_{\gamma} \mathbf{F}$, siendo $\mathbf{F}(x, y, z) = (2xy + z^2, x^2, 2xz)$ y γ la intersección del plano $x = y$ con la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, recorrida en cualquiera de los dos sentidos.
- iii) $\int_{\gamma} \mathbf{F}$, siendo $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, z, x)$ y γ la curva intersección de $x^2 + y^2 = 2x$ con $x = z$, recorrida en sentido positivo.

Solución: i) $-2\pi a^2$; ii) 0 ; iii) 0 .

Problema 4.7 Una partícula de masa m se mueve desde $t = 0$ hasta $t = 1$ describiendo la curva:

$$\mathbf{r}(t) = (t^2, \text{sen } t, \text{cos } t), t \in [0, 1].$$

Halla la fuerza que actúa sobre la partícula sabiendo que viene dada por la expresión $\mathbf{F}(t) = m\mathbf{r}''(t)$ (segunda ley de Newton). Calcula también el trabajo total realizado por dicha fuerza.

Solución: $\mathbf{F}(t) = m(2, -\text{sen } t, -\text{cos } t)$. El trabajo es $2m$.

Problema 4.8 Halla el valor de $b > 0$ que minimiza el trabajo producido al mover una partícula sometida al campo de fuerzas $\mathbf{F}(x, y) = (3y^2 + 2, 16x)$, desde $(-1, 0)$ hasta $(1, 0)$, a lo largo de la semielipse $b^2 x^2 + y^2 = b^2$, $y \geq 0$.

Solución: El trabajo mínimo es $4(1 - \pi^2)$, que se alcanza para $b = \pi$.

Problema 4.9 Considera el campo de fuerzas $\mathbf{F}(x, y) = (cxy, x^6 y^2)$, $a, b, c > 0$. Calcula el parámetro a en términos de c para que el trabajo producido al mover una partícula a lo largo de la parábola $y = ax^b$ desde $x = 0$ hasta $x = 1$ no dependa de b .

Solución: $a = \sqrt{3c/2}$.

Problema 4.10 Calcula el trabajo producido al mover una partícula sometida al campo de fuerzas (en polares) $\mathbf{F}(r, \theta) = (-4 \text{sen } \theta, 4 \text{sen } \theta)$, a lo largo de la curva $r = e^{-\theta}$ desde el punto $(1, 0)$ hasta el origen.

Solución: $8/5$.

Problema 4.11 Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = (\sin y + z, x \cos y + e^z, x + ye^z)$.

i) Prueba que la integral sobre cualquier curva cerrada, regular a trozos, vale 0.

ii) Obtén el potencial de \mathbf{F} , es decir, encuentra ϕ tal que $\mathbf{F} = \nabla\phi$.

Solución: i) $\text{rot } \mathbf{F} = 0$ y \mathbf{F} es de clase C^1 en todo \mathbb{R}^3 (que es un conjunto simplemente conexo);

ii) $\phi(x, y, z) = x(\sin y + z) + ye^z$.

Problema 4.12 Calcula $\int_{\gamma} \mathbf{F}$, siendo $\mathbf{F}(x, y, z) = (2xze^{x^2+y^2}, 2yze^{x^2+y^2}, e^{x^2+y^2})$ y γ la curva en \mathbb{R}^3 dada por $\mathbf{r}(t) = (t, t^2, t^3)$, $0 \leq t \leq 1$.

Solución: e^2 .

Problema 4.13 Sea la curva en \mathbb{R}^3 , $\gamma(t) = (e^{t^2} + t(1 - e) - 1, \sin^5(\pi t), \cos(t^2 - t))$, $t \in [0, 1]$, y el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (y + z + x^4 \sin x^5, x + z + \arctg y, x + y + \sin^2 z)$.

i) Halla $\int_{\gamma} \mathbf{F}$.

ii) ¿Existe f tal que $\nabla f = \mathbf{F}$? En caso afirmativo halla f .

Solución: i) 0; ii) $f(x, y, z) = xy + xz + yz - \frac{1}{5} \cos x^5 + y \arctg y - \frac{1}{2} \log(1 + y^2) + \frac{z}{2} - \frac{1}{4} \sin 2z$.

Problema 4.14 Sea la curva en \mathbb{R}^3 , $\Gamma = \{x^2 + y^2 = 1, z = y^2 - x^2\}$, y el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (y^3, e^y, z)$.

i) Halla $\int_{\Gamma} \mathbf{F}$.

ii) ¿Existe f tal que $\nabla f = \mathbf{F}$?

Solución: i) $-3\pi/4$; ii) No.

Problema 4.15 Determina a y b de manera que el campo vectorial

$$\mathbf{w}(x, y) = e^{2x+3y} \left((a \sin x + a \cos y + \cos x), (b \sin x + b \cos y - \sin y) \right)$$

sea conservativo, y calcula la función potencial correspondiente.

Solución: $a = 2$, $b = 3$; $\varphi(x, y) = e^{2x+3y}(\sin x + \cos y) + C$.

Problema 4.16 Considera el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{\log(xy)}{x}, \frac{\log(xy)}{y} \right),$$

definido para $x > 0$, $y > 0$, y sean $a > 0$, $b > 0$ dos constantes.

i) Calcula $\int_{\gamma} \mathbf{F}$ siendo γ el arco de la hipérbola $xy = a$ con $x_1 \leq x \leq x_2$.

ii) Si A es un punto (cualquiera) de la hipérbola $xy = a$, B es un punto (cualquiera) de la hipérbola $xy = b$, y γ es una curva (cualquiera) de clase C^1 , contenida en el primer cuadrante que une A con B , prueba que

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} = \frac{1}{2} \log(ab) \log(b/a).$$

Solución: i) $\mathbf{F} = \nabla f$, con $f(x, y) = \frac{1}{2}(\log(xy))^2 + c$, $\int_{\gamma} \mathbf{F} = 0$.

4.2 Integrales sobre superficies.

Problema 4.17 Calcula el área de las siguientes superficies:

- i) esfera de radio R ;
- ii) cono circular parametrizado por $\mathbf{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u)$, donde $0 \leq u \leq a$ y $0 \leq v \leq 2\pi$.
- iii) porción del paraboloido $z = x^2 + y^2$ que se encuentra en el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$;
- iv) porción del cilindro $x^2 + z^2 = 16$ limitada por el cilindro $x^2 + y^2 = 16$.

Solución: i) $4\pi R^2$; ii) $\pi a^2 \sqrt{2}$; iii) $\pi((1 + 4a^2)^{3/2} - 1)/6$; iv) 128.

Problema 4.18 Halla el área de la superficie de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ situada fuera de los cilindros $x^2 + y^2 = \pm ax$.

Solución: $4\pi a^2 - 8a^2$.

Problema 4.19

- i) Deduce la fórmula del área de la superficie de revolución obtenida al girar la gráfica $y = f(x)$, $0 < a \leq x \leq b$, alrededor del eje vertical:

$$A = 2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx,$$

con la parametrización $\mathbf{s}(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, f(r))$, donde $a \leq r \leq b$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

- ii) Obtén el área de la superficie del toro obtenido al girar la gráfica $(x - R)^2 + y^2 = c^2$, $0 < c < R$.
- iii) Deduce la parametrización correspondiente para obtener la fórmula análoga en el caso de girar la gráfica $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, alrededor del eje horizontal.

Solución: ii) $4\pi^2 Rc$; iii) $\mathbf{s}(x, \theta) = (x, f(x) \cos \theta, f(x) \sin \theta)$.

Problema 4.20 Sea el conjunto de \mathbb{R}^3 , $W = \{1 \leq z \leq (x^2 + y^2)^{-1/2}\}$. Demostrar que W tiene volumen finito pero su frontera tiene área infinita.

Solución: $V = \pi$.

Problema 4.21 Se consideran la superficie $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, y \geq 0\}$ orientada con la normal exterior a la esfera unidad, y la función $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + z, y + z, 2z)$.

- i) Calcula $\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$.
- ii) Calcula $\int_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$.

Solución: i) $8\pi/3$; ii) π .

Problema 4.22 Calcula $\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ en los siguientes casos, donde \mathbf{n} denota la normal exterior en los apartados i) iii) iv), y la normal que apunta hacia arriba (con tercera componente positiva) en el apartado ii):

- i) $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$ y S la frontera del cubo $0 \leq x, y, z \leq 1$.
- ii) $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy, -x^2, x+z)$ y S la porción del plano $2x+2y+z=6$ situada en el primer octante.
- iii) $\mathbf{F}(x, y, z) = (xz^2, x^2y - z^2, 2xy + y^2z)$ y S la semiesfera superior $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$.
- iv) $\mathbf{F}(x, y, z) = (2x^2 + \cos yz, 3y^2z^2 + \cos(x^2 + z^2), e^{y^2} - 2yz^3)$ y S la superficie del sólido engendrado por el corte del cono $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$ y la bola $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

Solución: i) 3; ii) 27/4; iii) $2\pi a^5/5$; iv) 0.

Problema 4.23 Halla el momento de inercia respecto de un diámetro de una lámina esférica homogénea de masa m y radio a .

Solución: $2ma^2/3$.

4.3 Teoremas de Green, Stokes y Gauss.

Problema 4.24 Calcula $\int_{\gamma} (5 - xy - y^2)dx - (2xy - x^2)dy$ siendo γ el cuadrado de vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ y $(0,1)$, directamente y aplicando el teorema de Green.

Solución: 3/2.

Problema 4.25 Sea f una función derivable en \mathbb{R} . Sean

$$P(x, y) = e^{x^2} - \frac{y}{3 + e^{xy}}, \quad Q(x, y) = f(y),$$

y γ la frontera del cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ recorrida en sentido positivo. Calcula $\int_{\gamma} Pdx + Qdy$.

Solución: $(1 - \log(e + 3) + \log 4)/3$.

Problema 4.26 Sean las funciones $P(x, y) = y/(x^2 + y^2)$ y $Q(x, y) = -x/(x^2 + y^2)$. Sea C una curva cerrada, regular a trozos, que no pasa por el origen, con $C = \partial D$.

- i) Demuestra que $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.
- ii) Si $(0, 0) \in D$, prueba que $\int_C P dx + Q dy = \pm 2\pi$, dependiendo de la orientación de γ .
- iii) Si $(0, 0) \notin D$, calcula $\int_C P dx + Q dy$.

Solución: iii) 0.

Problema 4.27 Evalúa $\int_{\gamma} \frac{-y dx + (x-1) dy}{(x-1)^2 + y^2}$, siendo γ una curva cerrada, simple, regular a trozos, que contiene al punto $(1,0)$ en su interior.

Solución: $\pm 2\pi$, dependiendo de la orientación de γ .

Problema 4.28

i) Sea A el área de un dominio D , acotado por C curva cerrada, simple, regular a trozos, y orientada en sentido positivo (contrario a las agujas del reloj). Prueba que

$$A = \frac{1}{2} \int_C -y dx + x dy,$$

y que en coordenadas polares es

$$A = \frac{1}{2} \int_C r^2(\theta) d\theta.$$

ii) Calcula el área interior al bucle que forma la curva parametrizada como $\mathbf{s}(t) = (t^2 - 1, t^3 - t)$.

iii) Calcula el área de la cardioide en polares $r(\theta) = a(1 - \cos \theta)$, ($0 \leq \theta \leq 2\pi$).

Solución: ii) $8/15$; iii) $3\pi a^2/2$.

Problema 4.29

i) Calcula $\int_D (x + 2y) dx dy$, donde D es el dominio acotado por el intervalo $[0, 2\pi]$ y la arcada de la cicloide $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, con $0 \leq t \leq 2\pi$.

ii) Calcula $\int_D xy^2 dx dy$, donde D es el dominio limitado por el astroide $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, $0 \leq t \leq \pi/2$ y los ejes.

iii) Calcula $\int_D y^2 dx dy$, donde D es el dominio limitado por la curva $x = a(t - \sin^2 t)$, $y = a \sin^2 t$, $0 \leq t \leq \pi$, y la recta que une sus extremos.

Solución: i) $-2\pi(3\pi + 2)$; ii) $8/2145$; iii) 0 .

Problema 4.30 Utilizando el teorema de Stokes calcula la integral $\int_S \text{rot } \mathbf{F}$ en los siguientes casos, donde S está orientada según la normal exterior:

i) $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 y^2, yz, xy)$ y S el paraboloides $z = a^2 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$.

ii) $\mathbf{F}(x, y, z) = ((1 - z)y, ze^x, x \sin z)$ y S la semiesfera superior de radio a .

iii) $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^3 + z^3, e^{x+y+z}, x^3 + y^3)$ y $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1, y \geq 0\}$.

Solución: i) 0 ; ii) $-\pi a^2$; iii) 0 .

Problema 4.31 Considera el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, x^2, (x^2 + y^4)^{3/2} \text{sen}(e^{\sqrt{xyz}}))$.

Calcula $\int_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$, donde \mathbf{n} denota la normal interior al semielipsoide

$$S = \{(x, y, z) : 4x^2 + 9y^2 + 36z^2 = 36, z \geq 0\}.$$

Solución: 6π .

Problema 4.32 Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = (2y, 3z, x)$ y T el triángulo de vértices $A(0, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$ y $C(1, 1, 1)$.

i) Da una orientación a la superficie del triángulo T y la inducida en la frontera.

ii) Calcula la integral de línea del campo \mathbf{F} sobre la frontera de T .

Solución: i) $\mathbf{n} = (1, 0, -1)$; la frontera se recorre de A a B , de B a C y de C a A ; ii) -1 .

Problema 4.33 Se consideran la función $\mathbf{F}(x, y, z) = (y \operatorname{sen}(x^2 + y^2), -x \operatorname{sen}(x^2 + y^2), z(3 - 2y))$ y el dominio $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}$. Calcula $\int_{\partial W} \mathbf{F}$.

Solución: 1.

Problema 4.34 Verificar el teorema de Stokes para:

i) $\mathbf{F}(x, y, z) = (y^2, xy, xz)$, en el paraboloido $z = a^2 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$.

ii) $\mathbf{F}(x, y, z) = (-y^3, x^3, z^3)$ en $S = \{z = y, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Solución: i) 0; ii) $3\pi/4$.

Problema 4.35 Un campo de vectores en \mathbb{R}^3 es de la forma $\mathbf{F}(x, y, z) = (P_1(x, y) + P_2(x, z), x + Q(y, z), R(x, y, z))$, con $P_1, P_2, Q, R \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$. Si Γ_h es el contorno de la sección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ a la altura h , demostrar que $\int_{\Gamma_h} \mathbf{F}$ es independiente de h .

Problema 4.36 Calcula la integral $\int_S \mathbf{F}$, donde

i) $\mathbf{F}(x, y, z) = (18z, -12, 3y)$, y S es la región del plano $2x + 3y + 6z = 12$ situada en el primer octante.

ii) $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^3, x^2y, x^2z)$, y S es la superficie cerrada que consta del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$, $0 \leq z \leq b$, y sus tapas superior e inferior.

iii) $\mathbf{F}(x, y, z) = (4xz, -y^2, yz)$, y S es la superficie que limita el cubo $0 \leq x, y, z \leq 1$.

iv) $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$, y S es una superficie cerrada simple.

Solución: i) 24; ii) $5\pi a^4 b/4$; iii) $3/2$; iv) $3|\Omega|$, donde $S = \partial\Omega$.

Problema 4.37 Sea S el cuadrado de vértices $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ y $(0, 1, 1)$ (orientado con la normal de primera coordenada positiva). Se considera también el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (xy^2, 2y^2z, 3z^2x).$$

Calcular $\int_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ de dos maneras distintas (utilizando el Teorema de Stokes).

Solución: $-2/3$.

Problema 4.38 Calcula el flujo del campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (y^2, yz, xz)$ a través de la superficie del tetraedro acotado por $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$, orientada según la normal exterior.

Solución: $1/12$.

Problema 4.39 Supongamos que la temperatura en cada punto del espacio sea proporcional al cuadrado de la distancia al eje vertical, y consideremos el dominio $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 2z, z \leq 2\}$.

- i) Calcula el volumen de V .
- ii) Calcula la temperatura promedio en V .
- iii) Calcula el flujo del gradiente de temperatura a través (y hacia fuera), de ∂V .

Solución: i) $16\pi/3$; ii) α (la constante de proporcionalidad); iii) $32\alpha\pi$.

Problema 4.40 Sea S la esfera de radio a orientada con su vector normal exterior, y sea el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (\sin yz + e^z, x \cos z + \log(1 + x^2 + z^2), e^{x^2+y^2+z^2})$. Calcula $\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$.

Solución: 0.

Problema 4.41 Sea $S = S_1 \cup S_2$, donde S_1 y S_2 son las superficies

$$S_1 = \{x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\} \quad S_2 = \{x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1, z \geq 1\},$$

y sea el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (zx + z^2y + x, z^3yx + y, z^4x^2)$.

- i) Calcula $\int_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ utilizando el teorema de Stokes.
- ii) Calcula la misma integral utilizando el teorema de la divergencia.

Solución: 0.

Problema 4.42 Sea $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Halla $\int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$, donde \mathbf{n} es el vector normal unitario interior a $\partial\Omega$, y

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(e^{y^2+z^2} + \int_0^x \frac{e^{t^2+y^2}}{\sqrt{t^2+y^2}} dt, \sin(x^2 + e^z), h(x, y) \right),$$

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

Solución: $\pi(1 - e)/4$.

Problema 4.43 Considera el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(ye^z, \int_0^x e^{-t^2+\cos z} dt, z(x^2 + y^2) \right).$$

Calcula $\int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$, donde \mathbf{n} denota la normal exterior a la frontera del dominio

$$\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 < a^2, x^2 + y^2 < z^2\}.$$

Solución: $(8 - 5\sqrt{2})\pi a^5/30$.