FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES
APUNTES DE CALCULO II PARA PRIMER CURSO DE LOS GRADOS DE INGENIERÍA INDUSTRIAL Y DE TELECOMUNICACION

Elaborados por Arturo de Pablo, Domingo Pestana y José Manuel Rodríguez

5. TRANSFORMADA DE LAPLACE Y ECUACIONES DIFERENCIALES

Definición. Para todo $x > 0$, se define la **función gamma** como

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt\,.$$

La función gamma tiene las siguientes propiedades:
(1) Γ es continua y derivable.
(2) $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$; $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.
(3) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
(4) De lo anterior se deduce que $\lim_{x\to 0^+} \Gamma(x) = +\infty$.
(5) Si $n \in \mathbf{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$.
(6) Si $n \in \mathbf{N}$, $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!}\sqrt{\pi}$.

Definición. Dada $f : (0,\infty) \longrightarrow \mathbf{R}$, se dice que f tiene **crecimiento a lo sumo exponencial** si para algún $\alpha \in \mathbf{R}$ se verifica $\lim_{t\to\infty} f(t)\, e^{-\alpha t} = 0$. En ese caso podemos definir la **transformada de Laplace de** f para $s > \alpha$, como la integral

$$L(f)(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt\,.$$

La transformada de Laplace tiene las siguientes propiedades:
$L(\alpha f + \beta g) = \alpha\, L(f) + \beta\, L(g) \qquad \alpha, \beta \in \mathbf{R}$.
$L(e^{-at} f(t))(s) = L(f)(s+a) \qquad a \in \mathbf{R}$.
$L(f(at))(s) = \frac{1}{a}\, L(f(t))\big(\frac{s}{a}\big) \qquad a > 0$.

Teorema 1. Sea f una función continua en $[0,\infty)$ con crecimiento a lo sumo exponencial.
(1) Si f es derivable en $(0,\infty)$ y f' es continua, entonces

$$L(f')(s) = s\, L(f)(s) - f(0)\,.$$

(2) $L(f)$ es derivable y

$$\frac{d}{ds}[L(f)(s)] = -L(t\, f(t))(s)\,.$$

(3) $L(f)$ tiene derivadas de todos los órdenes y

$$\frac{d^n}{ds^n}[L(f)(s)] = (-1)^n L(t^n f(t))(s)\,.$$

Teorema 2. Si f es continua en $[0,\infty)$ y tiene crecimiento a lo sumo exponencial, entonces lo mismo es válido para la función

$$g(x) = \int_0^x f(t)\, dt\,,$$

y además

$$L(g)(s) = \frac{1}{s}\, L(f)(s)\,.$$

TABLA DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE

$$
\begin{aligned}
f(t) &= 1\,, & L(f)(s) &= \frac{1}{s}\,,\\
f(t) &= t^n\,, & L(f)(s) &= \frac{n!}{s^{n+1}}\,,\\
f(t) &= t^a\,, & L(f)(s) &= \frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}\,,\\
f(t) &= \operatorname{sen}(at)\,, & L(f)(s) &= \frac{a}{s^2+a^2}\,,\\
f(t) &= \cos(at)\,, & L(f)(s) &= \frac{s}{s^2+a^2}\,,\\
f(t) &= \frac{\operatorname{sen}(at)}{t}\,, & L(f)(s) &= \arctan\frac{a}{s}\,,\\
f(t) &= e^{at}\,, & L(f)(s) &= \frac{1}{s-a}\,,\\
f(t) &= e^{at}t^b\,, & L(f)(s) &= \frac{\Gamma(b+1)}{(s-a)^{b+1}}\,,\\
f(t) &= e^{at}\operatorname{sen}(bt)\,, & L(f)(s) &= \frac{b}{(s-a)^2+b^2}\,,\\
f(t) &= e^{at}\cos(bt)\,, & L(f)(s) &= \frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}\,,\\
f(t) = \operatorname{senh}(at) &= \frac{e^{at}-e^{-at}}{2}\,, & L(f)(s) &= \frac{a}{s^2-a^2}\,,\\
f(t) = \cosh(at) &= \frac{e^{at}+e^{-at}}{2}\,, & L(f)(s) &= \frac{s}{s^2-a^2}\,.
\end{aligned}
$$